جامعة باتنة 2
الشهيد مصطفى بن بولعيد

UE F212
Cours Physique 2
Eléctrostatique

Dr L. Abdelhamid

Programme F212

Chapitre I Electrostatique

I-1 Rappel mathématique
I-1-1 *Notion sur le gradient*
I-1-2 *Notion sur la divergence*
I-1-3 *Notions sur le rotationnel*
I-1-4 *Eléments de longueur et de volume dans les différents Systèmes de cordonnées*
I-2 Champ et force électrostatique
I-2-1 *notions de charges électriques*
I-2-2 *Interaction élémentaire : Loi de Coulomb*
I -2- 3 *Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle*
I-2-4 *Champ électrostatique crée par un ensemble de charges :*
I-2-4-a *Cas d'une distribution discrète de charges*
I-2-4-b *Cas d'une distribution continue de charges*

Programme F212

I-3 *Potentiel électrostatique*

I-3-1 *Potentiel électrostatique crée par une charge ponctuelle*

I-3-2 *potentiel électrostatique crée par un ensemble de charges*

I-3-2-a *Cas d'une distribution discrète de charges*

I-3-2-b *Cas d'une distribution continue de charges*

I-4 *APPLICATIONS*

I-5 Dipôle électrostatique

I-5-1 Potentiel crée par un dipôle à grande distance

I-6 Théorème de Gauss

I-6-1 Enoncé

I-6-2 Exemples d’application

I-6-2-a Sphère chargée en volume

I-6-2-b Sphère chargée en surface

I-6-3-a Cylindre chargée en surface

I-6-3-b Sphère chargée en volume

I-7 Conducteurs en équilibre électrostatique

I-7-1 Equilibre électrostatique

I-7-2 Champ au voisinage d’un conducteur (Théorème de Coulomb)

I-7-3 Pression électrostatique

Chapitre II Magnétostatique

II-1 Définition du champ magnétique
II-2 Force de Lorentz
II-3 Loi de Laplace
II-4 Loi de Biot et Savart
II-4-a Enoncé de la loi de Biot & Savart
II-4-b Cas du fil rectiligne infini

Chapitre III Electrocinétique

III-1 Intensité du courant électrique
III-2 Loi des nœuds - Loi des mailles
III-2-a Loi des nœuds
III-2-b Loi des mailles
III-3 Loi d'Ohm
III-4 Relation entre le champ électrique et la densité de courant
III-5 Association série et parallèle
III-5-1 Association série
III-5-2 Association parallèle
III- 6APPLICATIONS
III-7 Théorème de Thévenin
III-7-1 Énoncé du théorème de Thévenin
III-7-2. Détermination de la tension équivalente E et de la résistance équivalente r

- **L**’importance de l'analyse vectorielle provient de son utilisation intensive en physique et dans les sciences de l’ingénieur L'analyse vectorielle est une branche des mathématiques qui étudie les champs de scalaires et de vecteurs. Dans ce cadre, un champ de vecteurs associe à chaque point de l'espace un vecteur, tandis qu'un champ scalaire y associe un réel. Le gradient, la divergence et le rotationnel sont les trois principaux opérateurs différentiels linéaires du premier ordre.

L'opérateur nabla est défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Le gradient est un opérateur qui s'applique à un champ de scalaires et décrit un champ de vecteurs qui représente la variation de la valeur du champ scalaire dans l'espace

En coordonnées cartésiennes le gradient est donné par :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Simplement appliqué à un champ scalaire f(x,y,z), l'opérateur nabla donne le gradient du champ. Le gradient obtenu est lui un champ vectoriel.

Notion sur la divergence

Le produit scalaire entre l'opérateur nabla et un champ vectoriel U (défini par ses trois composantes) donne la divergence de ce champ vectoriel. La divergence obtenue est un champ scalaire.

$$\mathrm{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ désigne le champ de vecteurs auquel est appliqué l'opérateur divergence.

Notions sur le rotationnel

Le rotationnel transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs. Plus difficile à se représenter aussi précisément que le gradient et la divergence, il exprime la tendance qu'a un champ à tourner autour d'un point.
En coordonnées cartésiennes, on peut définir le rotationnel par la relation

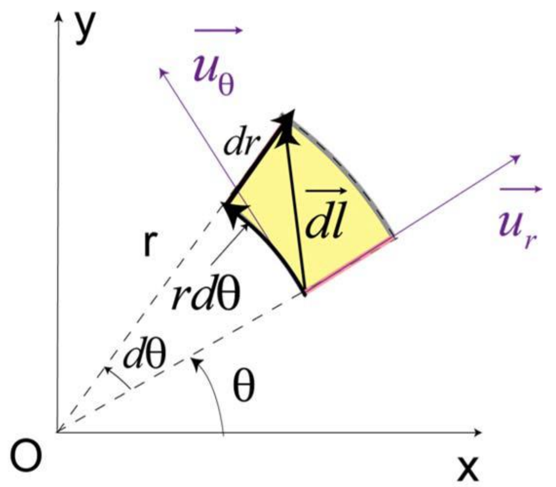
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial F_z/\partial y - \partial F_y/\partial z \\ \partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x \\ \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y \end{pmatrix}$$

Eléments de longueur et de volume dans les différents Systèmes de cordonnées

- **L**'élément de longueur est donné dans le système de coordonnées cartésiennes par $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}$
- **D**ans les coordonnées polaires, l'élément de longueur devient

$$\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\vartheta\overrightarrow{u_\vartheta}$$

$$\overrightarrow{dl} = dr\overrightarrow{e_r} + rd\vartheta\overrightarrow{e_\vartheta}$$



Champ et force électrostatique

- **E**n physique, on désigne par champ électrique un champ crée par des particules électriquement chargées, cette notion fut introduite par Michael Faraday, elle permet d’expliquer comment deux objets peuvent interagir à distance, sans que rien ne les relie, à la fois la loi de la gravitation universelle de Newton et la loi de Coulomb en électrostatique, impliquent une telle interaction à distance, il n’y a pas de fil qui relie la terre au soleil, celui-ci exerce son attraction à distance.

- **D**e même, deux charges électriques s‘attirent ou se repoussent dans le vide sans que rien ne les relie.

- **S**oit une charge q_1 qui de part sa présence crée un champ électrostatique en tout point de l'espace, l'interaction de ce champ avec une charge q_2 crée une force électrostatique entre ces deux charges.
- **D**ans le cas de charges fixes dans le référentiel d'étude, le champ électrique est appelé champ électrostatique.si les charges sont en mouvement, il faut ajouter un champ électrique induit dû au déplacement des charges pour obtenir le champ total (champ électromagnétique).

Notions de charges électriques

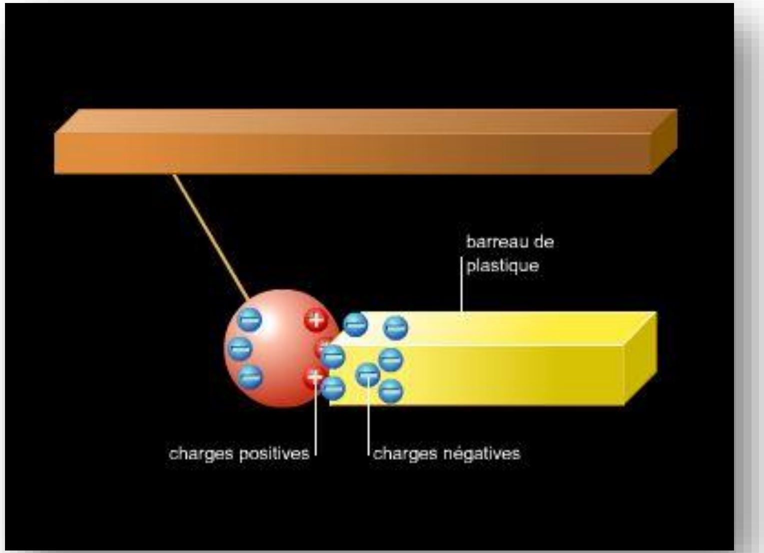
La matière est constituée de particules élémentaires (atome, proton et neutron), caractérisées par leur masse et leurs charges.

1/ Prenons une boule très légère en polystyrène par exemple, recouverte de métal fin. Approchons ensuite une tige de verre ou d'ambre préalablement frotté avec un tissu, on observe une attraction entre le verre et la boule et une répulsion entre l'ambre et la boule : on fait ainsi apparaitre deux types d'électricité, charges positives et charges négatives.

2/ Prenons maintenant deux boules en polystyrène électrisée l'une par du verre frotté et l'autre par de l'ambre frotté on voit que les deux boules s'attirent, ensuite les deux boules sont électrisées par du verre frotté, on remarque que les deux boules se repoussent.

Les charges de mêmes signes se repoussent

et les charges de signes opposés s'attirent.

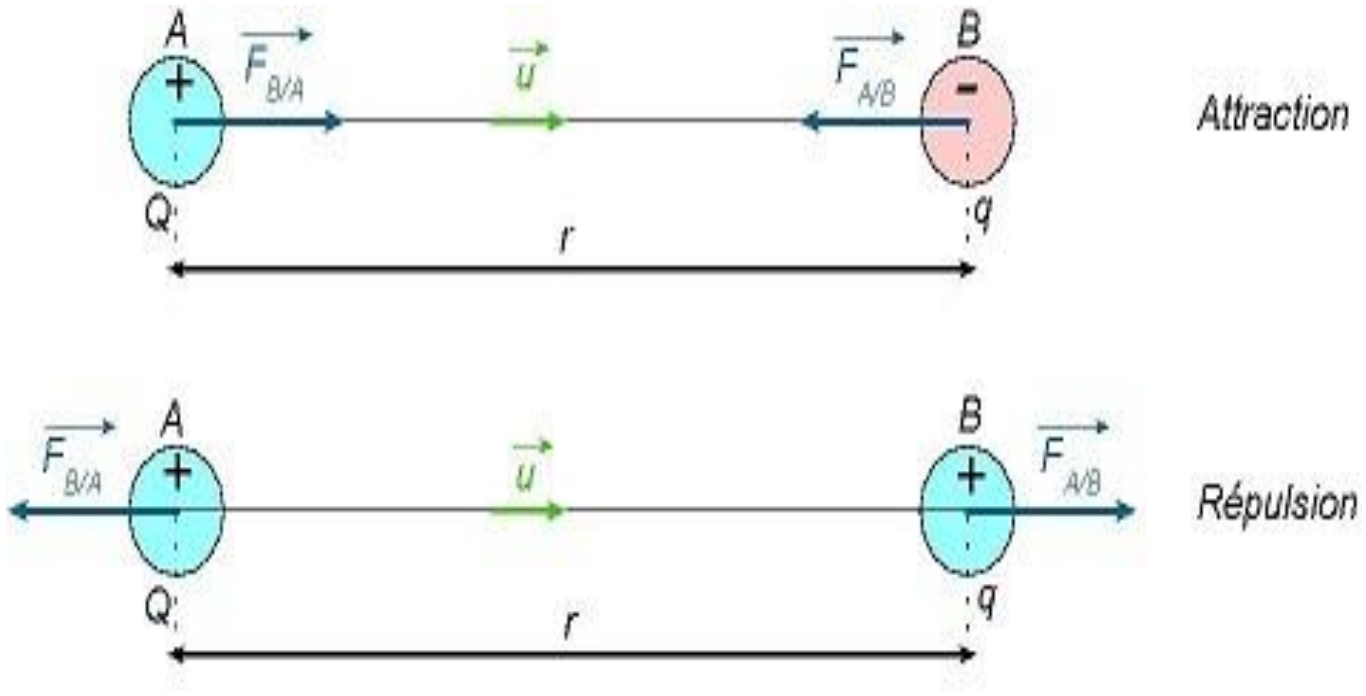


Interaction élémentaire : Loi de Coulomb

- **C**harles Auguste de Coulomb (1736-1806) a effectué une série de mesures (à l'aide d'une balance de torsion) qui lui ont permis de déterminer avec un certain degré de précision les propriétés de la force électrostatique exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une autre charge ponctuelle q_2.
- **L**a force est radiale, c'est-à-dire dirigée selon la droite qui joint les deux charges.
- **E**lle est proportionnelle au produit des charges
- **E**nfin, elle varie comme l'inverse du carré de la distance entre les deux charges.
- **L**'expression mathématique de la force de Coulomb exercée par la charge q_1 sur la charge q_2 et traduisant les propriétés ci-dessus est la suivante :

$$\overrightarrow{F}_{1\text{-}2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \overrightarrow{u}_{1\text{-}2}$$

Cette force est attractive si les charges sont de signe opposé, répulsive sinon.



- Cette expression n'est valable que pour des charges immobiles et dans le vide.
- Cette loi est la base même de toute l'électrostatique.
- Cette force obéit au principe d'Action et de Réaction de la mécanique classique.

La loi de Coulomb peut s'écrire aussi :

$$\overrightarrow{F}_{1-2} = K\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\vec{u}_{1-2} = K\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r} = K\,q_1 q_2\,\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ N.m^2/C^2\ \ (SI)$$

Où K est la constante de Coulomb et ε_0 est la permittivité du vide.

$\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12}$

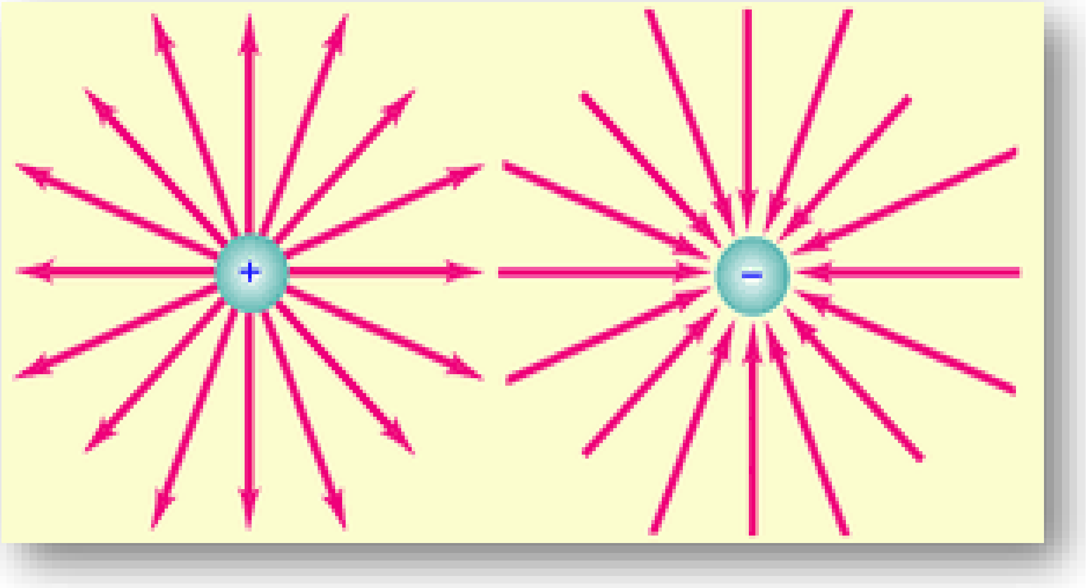
Dans le vide on a : $\mu_0\,\varepsilon_0\,C^2 = 1$ avec C célérité de la lumière $C = 3.10^8\ m/S$.

μ_0 : la perméabilité du vide : $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$

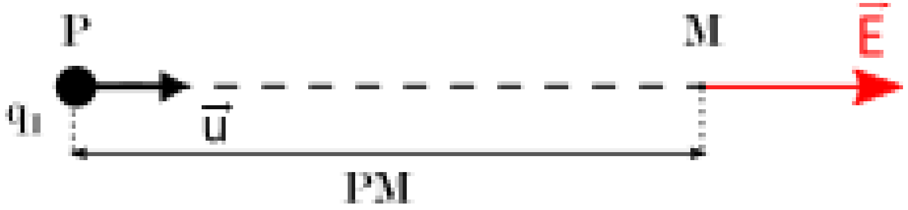
Champ électrostatique crée par une charge ponctuelle

- **L**e champ électrostatique traduit en tout point M la modification des propriétés de l'espace due à la présence d'une charge source Q.

$$\vec{E}\,(\mathrm{M}) = \mathrm{K}\frac{Q}{r2}\,\vec{u}$$

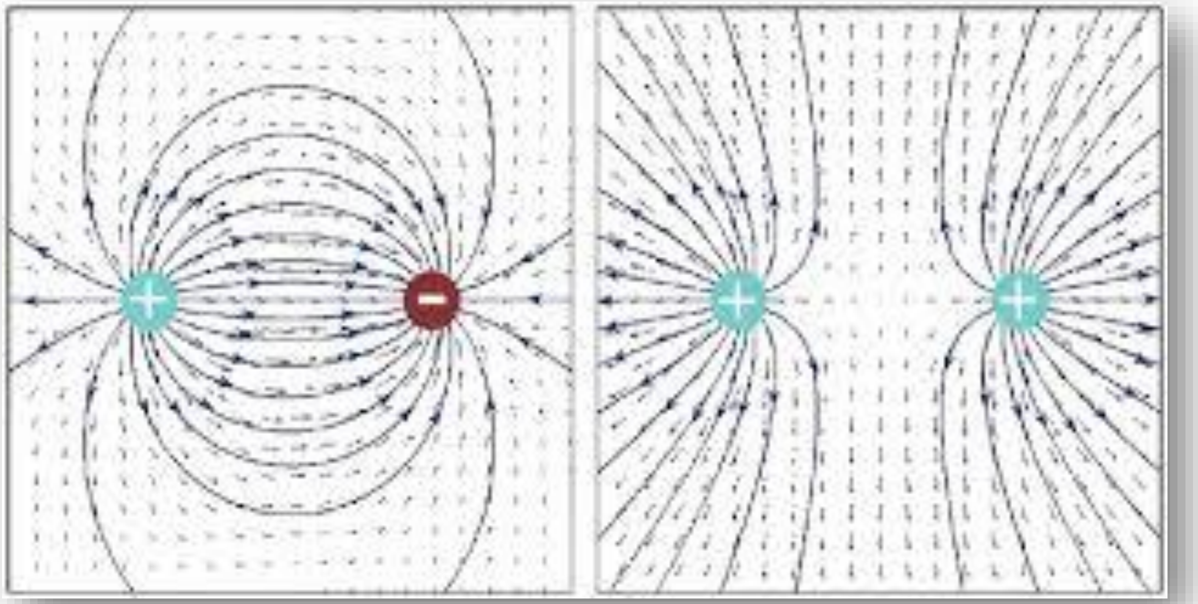


- Si $q_1 > 0$:

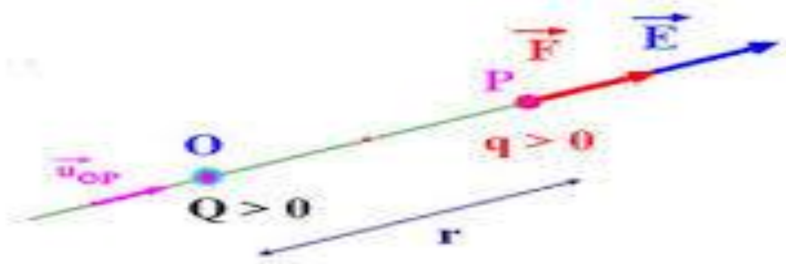


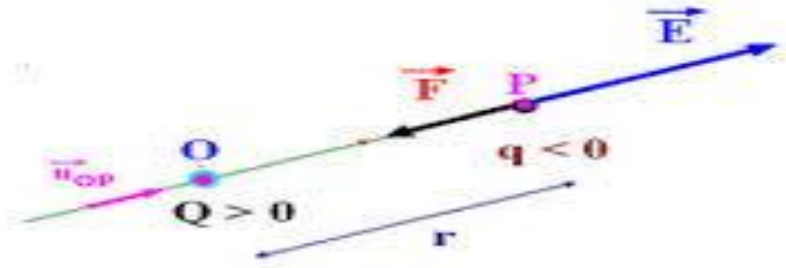
- Si $q_1 < 0$:

L'unité du champ dans le système international (SI) est : V/m ou N /C



Lignes de champs électrostatique



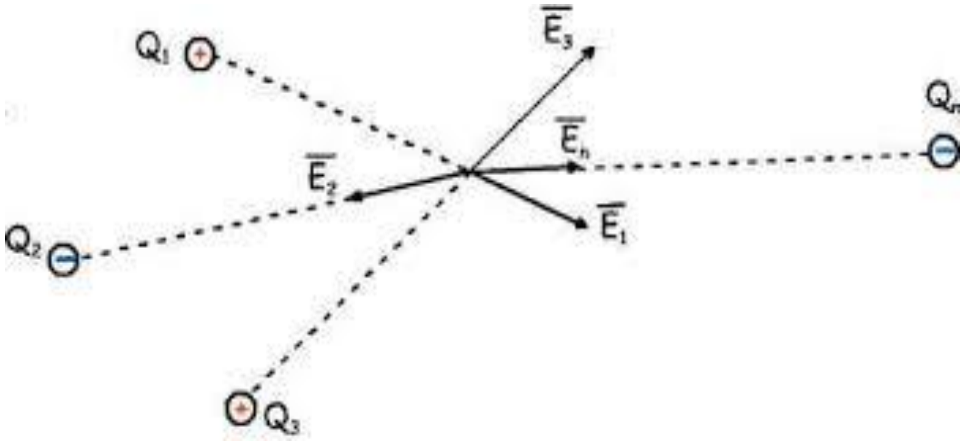


La force électrostatique s'exerçant sur une charge cible q placée au point M est :

$$\vec{F} = q\ \vec{E}$$

Champ électrostatique crée par un ensemble de charges :

Cas d'une distribution discrète de charges

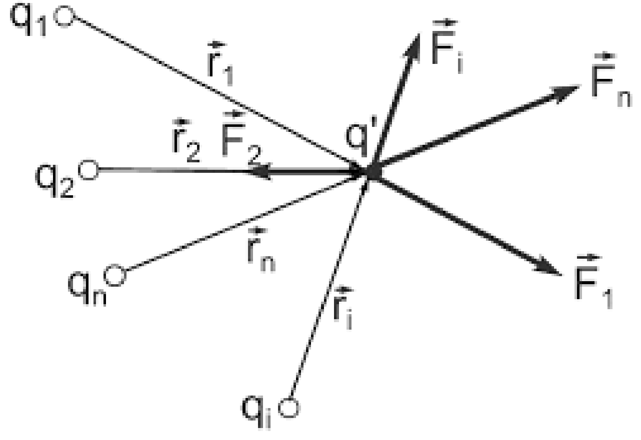


Principe de superposition : le champ électrostatique en un point de l'espace est égale à la somme des champs électrostatiques créés par les différentes charges en ce point.

$$\vec{E}_{\text{tot}}(\text{M}) = \sum_{i=1}^{n} \text{K} \frac{Qi}{r2} \vec{u}\, i \rightarrow M$$

Force électrostatique crée par un ensemble de charges

Cas d'une distribution discrète de charges



De même pour la force électrostatique créé par une distribution discrète de charge (ensemble de charges ponctuelles), la résultante des forces est donné par le principe de superposition :

$$\vec{F}_{\text{tot}}(\text{M}) = \sum_{i=1}^{n} \text{K} \frac{QiQM}{r2} \vec{u}\, i \rightarrow M$$

Cas d'une distribution continue de charges

Dès que le nombre de charges augmente, le calcul du champ total devient trop complexe et donc pour calculer le champ en un point M de l'espace dû à une distribution continue de charge on divise l'espace en petits morceaux contenant chacun une charge élémentaire dq distant de r du point M et la somme de ces champs élémentaires sera remplacée par une intégrale :

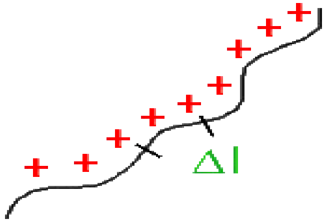
$$\vec{E} = \sum \vec{E}(M) = \int_{0}^{distr} \frac{Kdq}{r2}\,\vec{u}$$

$$\vec{E} = \sum \vec{E}(M) = \int_0^{distr} \frac{Kdq}{r^2}\,\vec{u}$$

On distingue trois cas de distribution continue :

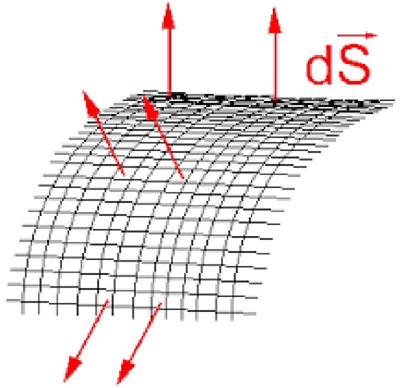
1/ Une distribution linéaire ou linéique de charge

dq = λ dl $\qquad$ **Q =** $\int \lambda dl$



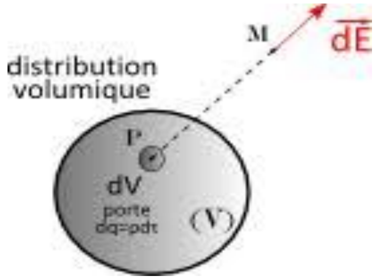
2/ Une distribution surfacique de charge

dq = σ dS $\qquad$ **Q =** $\iint \sigma ds$



3/ Une distribution volumique de charge

dq = ρdv $\qquad$ **Q =** $\iiint \rho dV$



Distribution linéique de charge

Soit un fil de longueur l portant une charge Q uniformément répartie sur sa longueur.

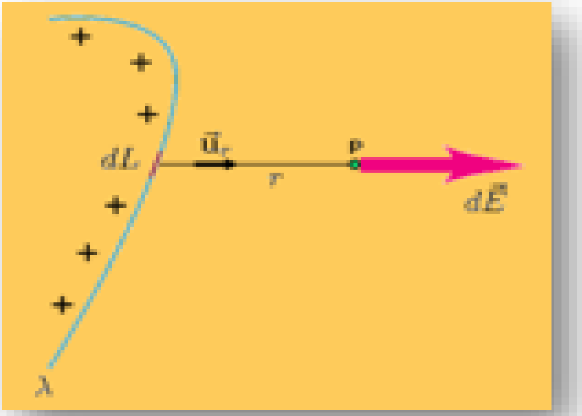
Soit un élément de longueur dl qui porte une charge élémentaire dq on a :

$dq = \lambda\, dl$ où λ représente la densité linéaire ou linéique de charge (C/m)

On peut écrire que la charge totale portée par le fil est :

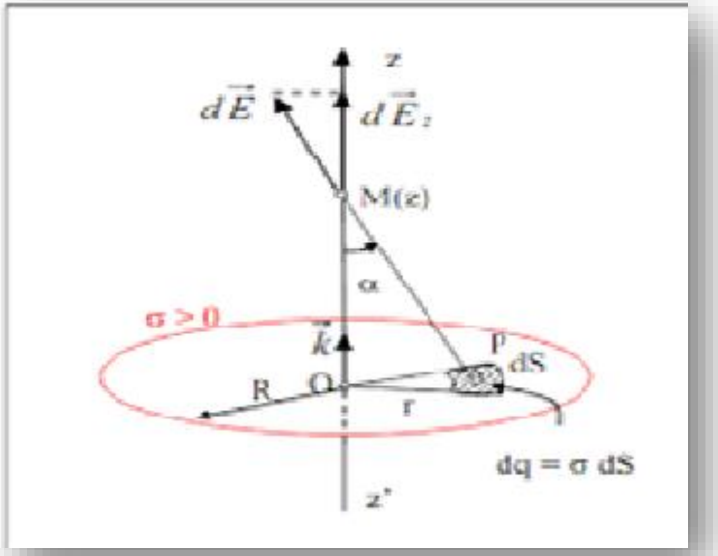
$Q = \int \lambda dl$ et que $\vec{E} = \int \overrightarrow{dE}(M)$

$\vec{E} = \int k \, \frac{dq}{r2} \, \vec{u}$ $\vec{E} = \int k \, \frac{\lambda dl}{r2} \, \vec{u}$



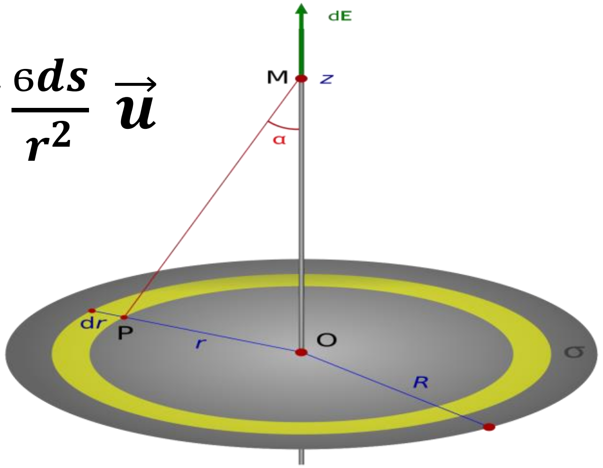
Distribution surfacique de charge

De la même manière on peut considérer une distribution surfacique de charge, Soit une surface S portant une charge Q uniformément répartie sur toute sa surface avec une densité surfacique de charge б (C/m²).Soit ds un élément de surface qui porte une charge élémentaire dq, on peut écrire :



$$Q = \iint б\,ds \qquad \text{et} \qquad \vec{E} = \int \overrightarrow{dE}(M)$$

$$\vec{E}(M) = \iint K \frac{dq}{r^2}\,\vec{u} \qquad\qquad \vec{E}(M) = \iint K \frac{б\,ds}{r^2}\,\vec{u}$$



Distribution volumique de charge

De la même manière on peut considérer une distribution volumique de charge, Soit un volume V portant une charge Q uniformément répartie sur tout son volume avec une densité volumique de charge ρ (C/m^3). Soit dv un élément de volume qui porte une charge élémentaire dq, on peut écrire :

$$\mathbf{Q} = \iiint \boldsymbol{\rho dV}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\mathbf{M}) = \iiint \overrightarrow{\boldsymbol{dE}}(\mathbf{M}) = \iiint \boldsymbol{K}\frac{\boldsymbol{dq}}{\boldsymbol{r^2}}\vec{\boldsymbol{u}} = \iiint \boldsymbol{K}\frac{\boldsymbol{\rho dV}}{\boldsymbol{r^2}}\vec{\boldsymbol{u}}$$

Potentiel électrostatique

La charge électrique d'une distribution peut être décrite par un vecteur : le champ électrique ou par une grandeur scalaire : le potentiel électrique V. On peut donc caractériser la perturbation du milieu due à la présence de charges électriques par une fonction scalaire : le potentiel V.

Le potentiel est lié au travail accompli pour transporter une charge d'un point à l'autre. Le champ électrostatique n'existe que s'il y a une variation de potentiel entre deux points.

Champ électrique = variation du potentiel dans l'espace.

La relation entre le potentiel et le champ électrique est :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \qquad dV = -\vec{E}\cdot\vec{dl} \qquad V = -\int \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

Potentiel électrostatique crée par une charge ponctuelle

V est donc un scalaire algébrique, s'exprime en volts.

Le potentiel en un point M situé à une distance r de la charge q est donné par :

$$V = K \frac{q}{r}$$

Rappel de l'élément de longueur en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{dl} = \mathrm{dx}\,\vec{\imath} + \mathrm{dy}\,\vec{\jmath} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{dl} = \mathrm{dr}\,\vec{u}_r + \mathrm{r\,d}\theta\,\vec{u}_\theta$$

Et donc le produit scalaire donne en coordonnées polaires et de même pour les coordonnées sphériques :

$$\vec{E}\,.\,\overrightarrow{dl} = \mathrm{K}\frac{q}{r2}\vec{u}_r\,.\,(\mathrm{dr}\,\vec{u}_r + \mathrm{r\,d}\theta\,\vec{u}_\theta) = \mathrm{K}\frac{q}{r2}\mathrm{dr}$$

$$\mathrm{V} = -\int \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dl} = -\int \mathrm{K}\frac{q}{r2}\mathrm{dr} = \mathrm{K}\,\frac{q}{r} + c^{ste}$$

On suppose que le potentiel à l'infini est nul V (∞) = o

Alors o + C^{ste} = o donc C^{ste} =o

et **V = K** $\boldsymbol{\frac{q}{r}}$

Potentiel électrostatique crée par un ensemble de charges

Cas d'une distribution discrète de charges

Les potentiels s'ajoutent pour une distribution de charges ponctuelles, on applique alors le théorème de superposition.

$$V(M) = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

Cas d'une distribution continue de charges

- Distribution linéaire de charge : $V(M) = \int K \frac{dq}{r} = \int K \frac{\lambda dl}{r}$
- Distribution surfacique de charge : $V(M) = \int K \frac{dq}{r} = \iint K \frac{6ds}{r}$
- Distribution volumique de charge: $V(M) = \int K \frac{dq}{r} = \iiint K \frac{\rho dV}{r}$

APPLICATIONS

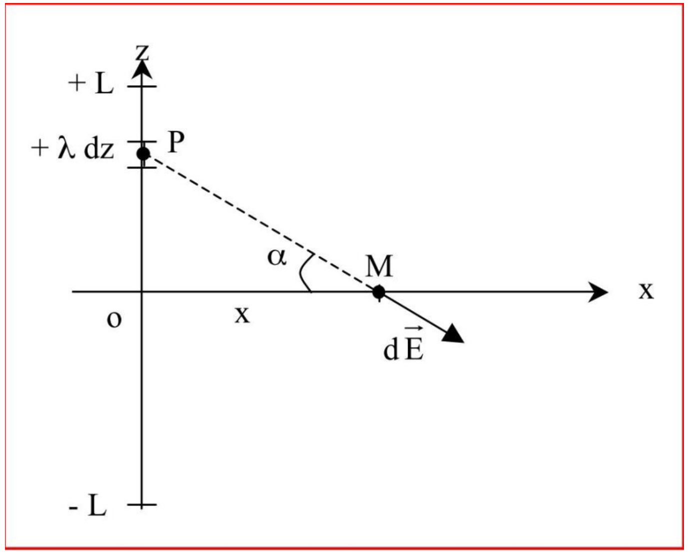
Soit un fil de longueur 2L portant une densité linéique de charge λ positive et uniforme. Déterminons le champ électrique créé par cette distribution en un point M situé à une distance x sur sa médiatrice.

Pour raison de symétrie le champ électrostatique est nul selon Oz $E(M)_{/Oz} = 0$

Il ne reste que la composante du champ selon OX :

$$d\vec{E}(M) = 2\, d\vec{E}_{/OX}\,\vec{\imath} \quad = \quad 2dE\cos\alpha\,\vec{\imath}$$

$$\vec{E}\,(M) = 2\int_0^L dE\ \cos\alpha\,\vec{\imath} \qquad E(M) = 2\int_0^L dE\ \cos\alpha$$



$$E(M) = 2\int_0^L \frac{Kdq}{r^2} \cos\alpha \quad = \quad 2\int_0^L \frac{K\lambda dl}{r^2} \cos\alpha$$

Avec : $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ d'où $r = \frac{x}{\cos\alpha}$ et $r^2 = \frac{x^2}{\cos\alpha^2}$

On a aussi $\tan\alpha = \frac{l}{x}$ d'où $l = x\tan\alpha$ et $dl = \frac{x}{\cos\alpha^2} d\alpha$ avec $dl = dZ$

On obtient finalement :

$$E(M) = \frac{2K\lambda}{x}\int_0^{\phi} \cos\alpha \; d\alpha \quad = \frac{2K\lambda}{x} \sin\phi$$

Avec $\sin\phi = \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}$

$$\vec{E}(M) = \frac{2K\lambda}{x} \frac{L}{\sqrt{x^2+L^2}} \vec{i}$$

- Si le fil est infini alors $\phi = \frac{\pi}{2}$ et $\vec{E}(M) = \frac{2K\lambda}{x} \vec{i}$

Soit un fil circulaire de centre o et de rayon R , chargé avec une densité linéique λ positive et uniforme. Déterminons le champ électrique crée par cette distribution en un point M placé sur son axe de révolution tel que OM = Z

Pour des raisons de symétrie le champ est :

- Nul sur OX : $dE_{OX} = 0$
- Nul sur OY : $dE_{OY} = 0$
- Il ne reste que la composante sur OZ : $dE_{Oz} = dE \cos\alpha$

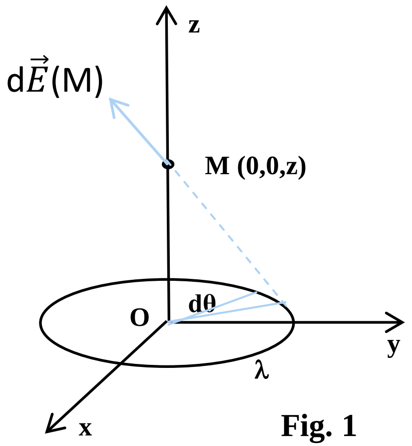


Fig. 1

$$\vec{E} = \int \overrightarrow{dE}(M) = \int \mathrm{dE}\ \cos\alpha\ \vec{k} \qquad \vec{E} = \int k\ \frac{dq}{r^2}\ \cos\alpha\ \ \vec{k}$$

$$\vec{E} = \int k \frac{\lambda dl}{r^2} \cos\alpha \quad \vec{k}$$

Avec : $\cos\alpha = \frac{Z}{r} = \frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}}$

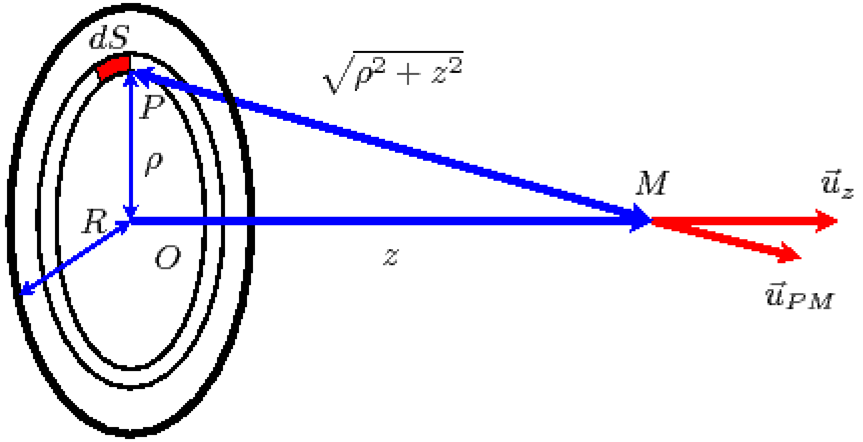
$$\vec{E} = \int k \frac{\lambda dl}{Z^2+R^2} \frac{Z}{\sqrt{Z^2+R^2}} \vec{k} = \int k \frac{Z\lambda dl}{\sqrt[3]{(Z^2+R^2)}} \vec{k} = \mathrm{K}\lambda \mathrm{Z} \int \frac{dl}{\sqrt[3]{(Z^2+R^2)}} \vec{k}$$

Avec : dl = Rdθ

$$\vec{E} = \mathrm{K}\lambda \mathrm{Z} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Rd\theta}}{\sqrt[3]{(Z^2+R^2)}} \vec{k} = \mathrm{K}\lambda \frac{\mathrm{RZ}}{\sqrt[3]{(Z^2+R^2)}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d\theta}\, \vec{k} = \frac{\lambda \mathrm{RZ}}{2\varepsilon_0 \sqrt[3]{(Z^2+R^2)}} \vec{k}$$

Soit un disque circulaire de centre o et de rayon R , chargé en surface, avec une densité superficielle б positive et uniforme. Déterminons le champ électrique crée par cette distribution en un point M placé sur l'axe de révolution du disque tel que OM = Z (Fig 2).

Nous avons une symétrie de distribution de charge qui fait que le champ final est selon l'axe OZ :



$$\vec{E} = \int \overrightarrow{dE}(\mathrm{M}) = \int \mathrm{dE}\ \cos\alpha\ \vec{u}_Z$$

$$\vec{E} = \int k\ \frac{dq}{r^2}\ \cos\alpha\ \vec{u}_Z$$

$$\vec{E} = \mathrm{K}\iint \frac{б dS}{r^2}\ \cos\alpha\ \ \vec{u}_Z$$

Avec $\cos\alpha = \frac{Z}{\sqrt{\rho^2+Z^2}}$ et $r^2 = \rho^2 + Z^2$

$$E = \mathrm{K}б\iint \frac{dS}{r^2}\ \cos\alpha = \mathrm{K}б\iint \frac{ZdS}{\sqrt[3]{\rho^2+Z^2}}$$

Avec $S = \pi\rho^2$ d'oừ $dS = 2\pi\rho d\rho$

$$E = K\sigma\pi \int_0^R \frac{2Z\rho d\rho}{\sqrt[3]{\rho^2+Z^2}} = \frac{6}{4\varepsilon}\int_0^R \frac{2Z\rho d\rho}{\sqrt[3]{\rho^2+Z^2}}$$

- de la forme : $\int u'u^n = \frac{U^{n+1}}{n+1}$
- Ce qui donne : $E = -\frac{6}{2\varepsilon_0}\left[\frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}} - \frac{Z}{|Z|}\right]$
- On obtient finalement :

$$E = \frac{6}{2\varepsilon_0}\left[\frac{Z}{|Z|} - \frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}\right]$$

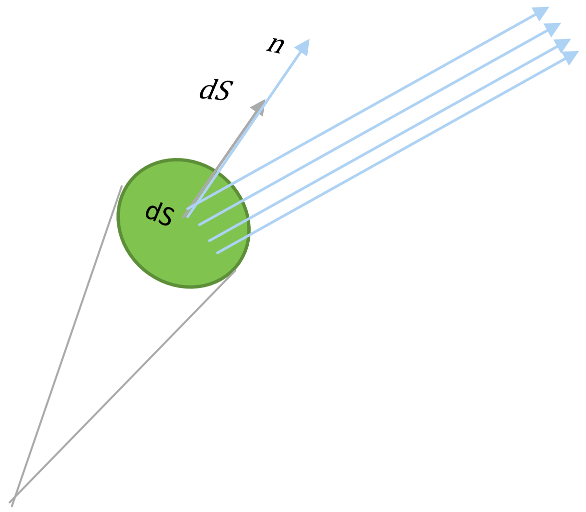
Et $\vec{E}(M) = \frac{6}{2\varepsilon_0}\left[\frac{Z}{|Z|} - \frac{Z}{\sqrt{R^2+Z^2}}\right]\vec{u}_Z$

Théorème de Gauss

Enoncé

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée orientée quelconque est égal, dans le vide, à $1/\varepsilon_o$ fois la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface.

$$\boldsymbol{\phi} = \oiint \vec{\boldsymbol{E}}.\overrightarrow{\boldsymbol{dS}} = \frac{\boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$$



Rappel sur le flux :

dS est un élément de surface

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire sortant et normal à la surface : $\overrightarrow{dS} = \vec{n}\,$dS

$$d\phi = \vec{E}.\overrightarrow{dS} \Rightarrow \phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Exemples d'application
Sphère chargée en volume

Soit une sphère de centre O et de rayon R, uniformément chargée en volume, avec une densité volumique ρ constante et positive.

En utilisant le théorème de Gauss, déterminons le champ électrostatique crée par cette distribution en tous points de l'espace ?(M à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère).

Les étapes à suivre pour le calcul du champ électrostatique par la méthode de Gauss sont :

1 / Rechercher les symétries du problème.

2/ Définir une surface de Gauss.

3/Appliquer le théorème de Gauss.

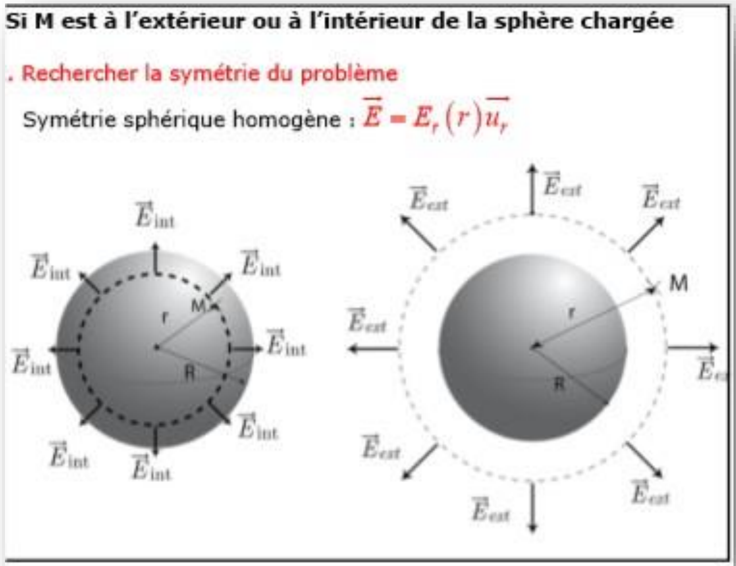
Dans ce cas nous avons une symétrie sphérique et le champ est sortant (charge est positive) selon $\overrightarrow{e_r}$ ou $\overrightarrow{u_r}$ (selon les littératures).

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \mathrm{E}\ \overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$$

La surface de Gauss qui correspond à la symétrie du problème est une sphère de centre O et de rayon r.

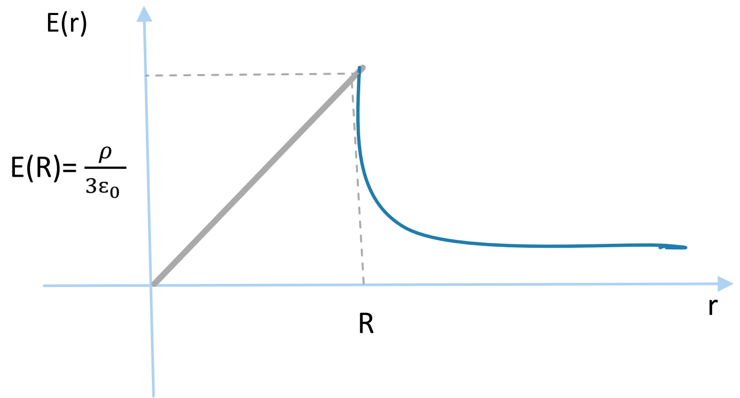
1er cas M à l'intérieur de la sphère (r<R)

- $\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
- Vu que $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires alors $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$= E.ds.cos 0=E.dS
- $\oiint E.dS = 4\pi r^2 E_{int} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho dv = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint dv$
- $4\pi r^2 E_{int} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3$
- $E_{int} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$ $\qquad \overrightarrow{E_{int}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\overrightarrow{e_r}$



$2^{ème}$ cas M à l'extérieur de la sphère (r>R)

- $\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
- $4\pi r^2 E_{ext} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \iiint \rho dv = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \iiint dv$
- $4\pi r^2 E_{ext} = \dfrac{4\rho}{3\varepsilon_0}\pi R^3$
- $E_{ext} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2}$
- $\overrightarrow{E_{ext}} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\dfrac{R^3}{r^2}\overrightarrow{e_r}$



Sphère chargée en surface

- **S**oit une sphère de centre O et de rayon R, uniformément chargée en surface, avec une densité surfacique б constante et positive.
- **E**n utilisant le théorème de Gauss, déterminons le champ électrostatique crée par cette distribution en tout point de l'espace ? (M à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère).
- **D**ans ce cas nous avons une symétrie sphérique et le champ est sortant (charge est positive) selon $\overrightarrow{e_r}$.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \mathrm{E}\ \overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$$

- **L**a surface de Gauss qui correspond à la symétrie du problème est une sphère de centre O et de rayon r.

1^{er} cas M à l'intérieur de la sphère(r<R)

- $\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0$
- $E_{int} = 0$

$2^{ème}$ cas M à l'extérieur de la sphère(r>R)

- $\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
- Vu que $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires alors $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$= E.ds.cos 0 = E.dS
- $\oiint E.dS = 4\pi r^2 E_{ext} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint 6dS = \frac{6}{\varepsilon_0} \iint dS$
- $4\pi r^2 E_{ext} = \frac{6}{\varepsilon_0} 4\pi R^2$
- $E_{ext} = \frac{6}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{r^2}$ $\overrightarrow{E_{ext}} = \frac{6}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{r^2} \overrightarrow{e_r}$

On peut en déduire le potentiel V(M) en tout point de l'espace.

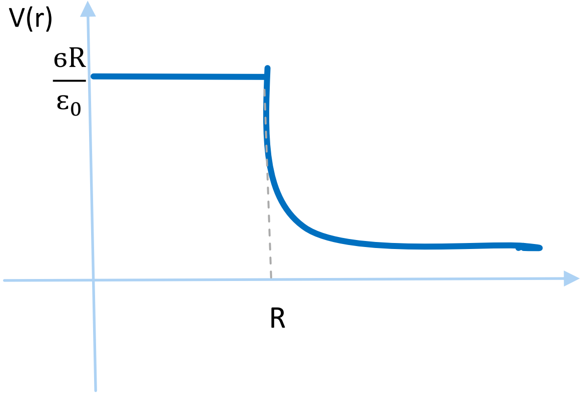
- $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ $\quad$ $dV = -\vec{E}\,.\,\overrightarrow{dl}$ $\quad$ $V = -\int \vec{E}\,.\,\overrightarrow{dl} = -\int E.dr$
- Pour r>R
- $V_{ext} = -\int E.dr = -\int \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}.dr = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int -\frac{dr}{r^2} = +\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C^{ste}{}_1$

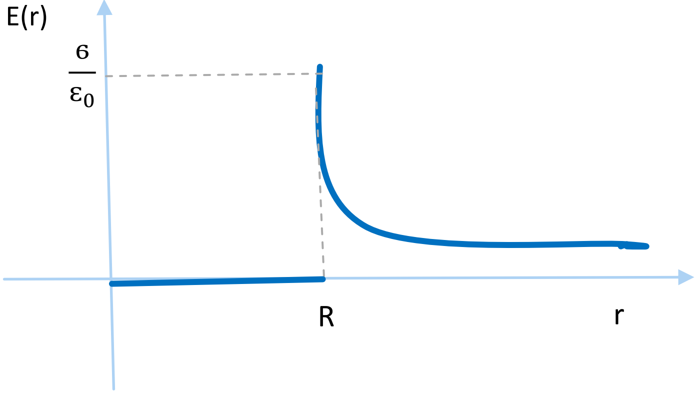
On a le potentiel nul à l'infini $V(\infty) = 0$, alors $C^{ste}{}_1 = 0$ $\quad$ $V_{ext} = +\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r}$

- Pour r <R $\quad$ $V_{int} = -\int E.dr = -\int 0\, dr = C^{ste}{}_2$

Et pour raison de continuité du potentiel on peut écrire :

- $V_{int} = V_{ext}$ quand $r \rightarrow R$ $\quad$ $+\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 R} = C^{ste}{}_2 = V_{int} = +\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$





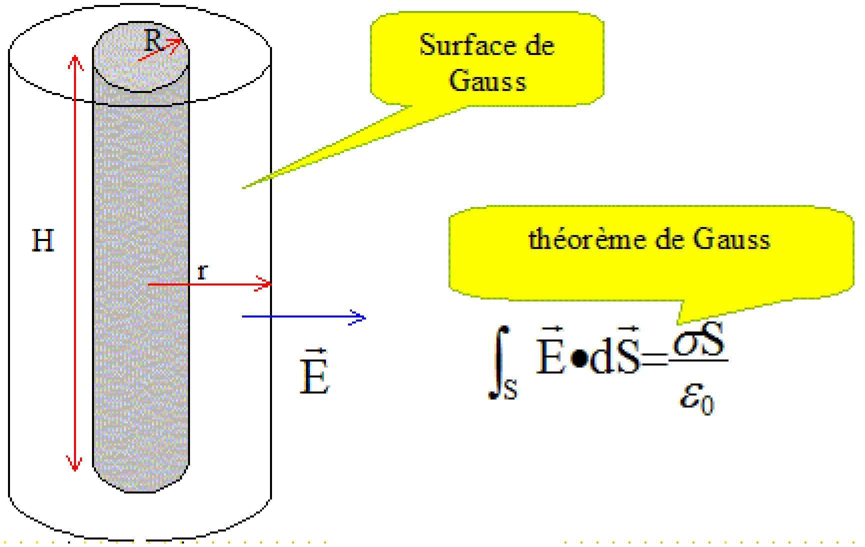
Cylindre chargé en surface

- **S**oit un cylindre de centre O,de longueur h et de rayon R, uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique б constante et positive.
- **E**n utilisant le théorème de Gauss, déterminons le champ électrostatique crée par cette distribution en tout point de l'espace ? (M à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre).
- **D**ans ce cas nous avons une symétrie cylindrique et le champ est sortant (charge est positive) selon $\overrightarrow{e_r}$.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}} = \mathrm{E}\ \overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$$

- **L**a surface de Gauss qui correspond à la symétrie du problème est un cylindre de longueur h et de rayon r.

Nous avons dans ce cas trois surfaces: un surface latérale S_L et deux surfaces de bases S1 et S2.Le flux de champ à travers les trois surfaces constitue la somme de ces flux.



Appliquons le théorème de Gauss : $\phi = \oint\!\!\oint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\phi = \sum \phi_i = \oint\!\!\oint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \oint\!\!\oint \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \oint\!\!\oint \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} + \oint\!\!\oint \vec{E}.\overrightarrow{dS_L}$

Or on sait que : $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_1}$ et $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_2}$ et donc le champ est nul, il ne reste que le flux du champ latéral $\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS_L}$.

$\phi = \oint\!\!\oint \vec{E}.\overrightarrow{dS_L} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

<u>1er cas M à l'intérieur du cylindre (r<R)</u>

Vu que $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires alors $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$= E.ds.cos 0=E.dS

E.ds = $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ =0 et donc E_{int} = 0 et V_{int} = C_1

<u>2ème cas M à l'extérieur du cylindre (r>R)</u>

Vu que $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires alors $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$= E.ds.cos 0 = E.dS

E.2πrh = $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iint 6dS = \frac{6}{\varepsilon_0} \iint dS = \frac{6.2\pi R\, h}{\varepsilon_0}$ $\quad E_{ext} = \frac{6R}{\varepsilon_0 r}$

$V_{ext} = -\int \frac{6R}{\varepsilon_0 r}\, dr = -\frac{6R}{\varepsilon_0} \ln r + C_2$

NB : pour le cylindre infini on ne peut pas calculer les constantes d'intégration C_1 et C_2 .

Cylindre chargé en volume

- Soit un cylindre de centre O, de longueur h et de rayon R, uniformément chargé en volume, avec une densité volumique ρ constante et positive.
- En utilisant le théorème de Gauss, déterminons le champ électrostatique crée par cette distribution en tout point de l'espace ? (M à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre).
- Dans ce cas nous avons une symétrie cylindrique et le champ est sortant (charge est positive) selon $\overrightarrow{e_r}$.

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \mathrm{E}\ \overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$$

- La surface de Gauss qui correspond à la symétrie du problème est un cylindre de longueur h et de rayon r. Nous avons dans ce cas trois surfaces: un surface latérale S_L et deux surfaces de bases S_1 et S_2
- Le flux de champ à travers les trois surfaces constitue la somme de ces flux.

Appliquons le théorème de Gauss.

- $\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$
- $\phi = \sum \phi_i = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\boldsymbol{Q_{int}}}{\varepsilon_{\mathbf{0}}} = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_1} + \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_2} + \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_L}$
- Or on sait que : $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_1}$ et $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS_2}$ et donc le champ est nul, il ne reste que le flux du champ latéral $\vec{E} \parallel \overrightarrow{dS_L}$.
- $\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS_L} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

1^{er} cas M à l'intérieur du cylindre (r<R)

- Vu que $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires alors $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$= E.ds.cos 0=E.dS
- $\oiint E.dS$=2πr hE_{int} = $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ =$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho dv$=$\frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint dv$
- 2πr hE_{int} = $\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ πr^2h
- E_{int} = $\frac{\rho}{2\varepsilon_0}$r

$$\vec{E}_{int} = E_{int}\,\overrightarrow{e_r} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r\,\overrightarrow{e_r}$$

- Le potentiel V_1 (r) = - $\int Eint\ dr$ - $\int \frac{\rho}{2\varepsilon_0}$ rdr= - $\frac{\rho}{4\varepsilon_0}$$r^2$ + C_1

2ème cas M à l'extérieur du cylindre (r>R)

- Vu que $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont colinéaires alors $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$= E.ds.cos 0=E.dS
- $\oiint E.dS$=2πr hE_{int} = $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ =$\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint \rho dv$=$\frac{\rho}{\varepsilon_0}\iiint dv$
- E.2πrh = $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ = $\rho\frac{\pi R^2}{\varepsilon_0}$h

  et E_{ext} = $\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}$

$$\vec{E}_{etx} = E_{etx}\,\overrightarrow{e_r} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\overrightarrow{e_r}$$

- Le potentiel V_2 (r) = - $\int Eext\, dr$ - $\int \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}dr$ = -$\frac{R\rho^2}{2\varepsilon_0}\ln|r|$+$C_2$

NB : pour le cylindre infini on ne peut pas calculer les constantes d'intégration C1 et C2 .

Conducteurs en équilibre électrostatique

- **J**usqu'à présent, nous nous sommes intéressés uniquement aux charges électriques et à leurs effets. Que se passe-t-il pour un corps conducteur dans lequel les charges sont libres de se déplacer ?
- **P**renons une baguette en plastique et frottons-la. On sait qu'elle devient électrisée parce qu'elle devient alors capable d'attirer de petits bouts de papier. Si on la met en contact avec une autre baguette, alors cette deuxième devient également électrisée, c'est à dire atteint un certain degré d'électrisation. Au moment du contact des deux baguettes, des charges électriques passent de l'une à l'autre, modifiant ainsi le nombre de charges contenues dans chacune des baguettes, jusqu'à ce qu'un équilibre soit atteint. Comment définir un tel équilibre ?

Equilibre électrostatique

- L'équilibre électrostatique d'un conducteur est atteint lorsque aucune charge électrique ne se déplace plus à l'intérieur du conducteur.
- Du point de vue de chaque charge élémentaire, cela signifie que le champ électrostatique total auquel elle est soumise est nul.
- Comme le champ dérive d'un potentiel, cela implique qu'un conducteur à l'équilibre électrostatique est équipotentiel ($V=C^{ste}$).

$dV = - \vec{E} \,.\, \overrightarrow{dl} = 0$ d'où $V = 0$

$E_{int} = 0$

$\phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \qquad Q_{int=0}$

- A l'intérieur d'un conducteur en équilibre, la charge électrique est nulle.
- La charge électrique d'un conducteur en équilibre est entièrement répartie sur sa surface.

Champ au voisinage d'un conducteur (Théorème de Coulomb)

En un point M infiniment voisin de la surface S d'un conducteur, le champ électrostatique E est normal à S. Considérons une petite surface S_{ext} parallèle à la surface S du conducteur. On peut ensuite construire une surface fermée ∑ en y adjoignant une surface rentrant à l'intérieur du conducteur S_{int} ainsi qu'une surface latérale S_L.

En appliquant le théorème de Gauss sur cette surface fermée, on obtient : $\phi = E.S = \frac{\sigma\, s}{\varepsilon_0}$

Où $\sigma\, s$ est la charge nette comprise à l'intérieur de la surface de Gauss, on obtient alors :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{soit vectoriellement} \quad \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\boldsymbol{n}}$$

- **T**héorème : le champ électrostatique au voisinage (à proximité immédiate) d'un conducteur portant une charge de densité surfacique σ vaut :

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{\boldsymbol{n}}$$

- **P**ar conséquent, à la traversée de la surface du conducteur et par continuité du champ, ce dernier vaut à la surface du conducteur : $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
- **C**ette dernière expression sera utilisée pour le calcul de la pression électrostatique.

Pression électrostatique

- Les charges électriques situées à la surface du conducteur sont soumises aux forces répulsives de la part d'autres charges du conducteur, soit un élément de surface ds portant une charge élémentaire dq = $6ds$ le champ $\vec{\mathrm{E}} = \frac{6}{2\varepsilon_{\mathbf{0}}}\,\vec{n}$ exerce sur la charge dq une force électrostatique $\overrightarrow{dF} = dq\vec{E}$

$$\overrightarrow{dF} = 6ds\,\frac{6}{\varepsilon_{\mathbf{0}}}\,\vec{\mathrm{n}} = 6^2\,\frac{\vec{n}}{2\varepsilon_0}$$

- La force par unité de surface c'est à dire la pression est alors donnée par :

$$\mathrm{P} = \frac{6^2}{2\varepsilon_0}$$