TD1, Modèle d'état

– systèmes dynamiques linéaires continus (analogiques)

Rafik BENSAADI,
univ-batna2, avril 2020

pré-requis: *Modélisation d'un système dynamique par l'équation différentielle ou fonction de transfert,*
Calcul matriciel,
Décomposition en fractions partielles.

Exercice 1

Soit le système:

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 8u \qquad (u(t)\text{: entrée; } y(t)\text{: sortie})$$

1) Trouver le modèle d'état du système, en considérant les *variables de phase* comme variables d'état:
   $(x_1 = y) \quad (x_2 = \dot{y})$
2) Schéma fonctionnel (diagramme de simulation),
3) Vérifier (stabilité, contrôlabilité et observabilité) du système ainsi réalisé.

24950103103,

Exercice 2

La fonction de transfert du système de l'exercice 1 étant:

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{8}{(p+1)(p+5)}$$

1) Trouver un modèle d'état selon la forme canonique diagonale (ou, de *Jordan*)
2) Schéma fonctionnel,
3) Vérifier (stabilité, contrôlabilité et observabilité) du système ainsi réalisé.

10357103103,

Exercice 3

(modèles d'état 1 et 2) et/ou (schémas 1 et 2): discussion comparative

2491035757,

Exercice 4

Refaire (les exercices 1, 2) avec:

$$\dddot{y} + 8\ddot{y} + 17\dot{y} + 10y = 8u$$

ou

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{8}{(p+1)(p+2)(p+5)}$$

Exercice 5

Soit le système,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

$u(t)$, entrée ;

$y(t)$, sortie ;

$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$: vecteur d'état

1) Identifier les matrices $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ du modèle d'état,
2) Calculer les valeurs propres,
3) Calculer les vecteurs propres. En déduire la matrice modale $\mathbf{M_0}$,
4) Déduire une forme diagonalisée du modèle d'état. (appliquer la transformation linéaire $\mathbf{x} = \mathbf{M_0 z}$)

Exercice 6

- Montrer l'invariance des modes propres sous transformation linéaire $\mathrm{x} = \mathbf{M}\mathrm{z}$. Avec $\mathbf{M}$ matrice carrée non-singulière (c.-à.-d. inversible), de même dimension que $\mathbf{A}$.
- Infinité de modèles d'état pour un système donné (pour une équation différentielle donnée) ?

Exercice 7

Autres représentations d'état:

- Forme canonique contrôlable (commandable),
- Forme canonique observable,
- …

Réponses

Exercice 1

Modèle d'état

Avec

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = \dot{y} & = x_2 & = 0x_1 + 1x_2 + 0u \\ \dot{x}_2 & = \ddot{y} & = -5y - 6\dot{y} + 8u & = -5x_1 - 6x_2 + 8u \\ y & = x_1 & & = 1x_1 + 0x_2 + 0u \end{cases}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0u$$

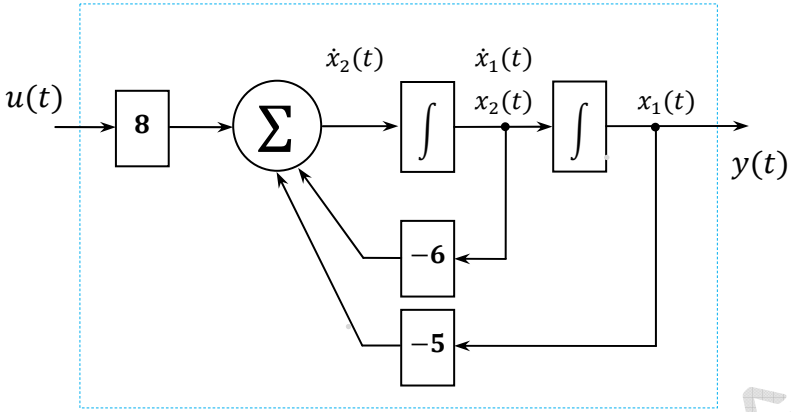
Soit,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = 0$$

ôÂ·TM-ôôÊÂÔÎë2 p29g
22951193581534524824669192212125235501711250357103

Schéma fonctionnel



Trois étapes:

1) Exprimer y,
2) Montrer les $\{(x_i, \dot{x}_i)\}$,
3) Exprimer les $\{\dot{x}_i\}$

Stabilité ?, Contrôlabilité ? et Observabilité ?

La stabilité dépend des valeurs propres, solutions de l'équation: $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ -5 & -6\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 5 & \lambda+6\end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 5 = (\lambda+1)(\lambda+5) = 0$$

$\Delta = 36 - 20 = 16 = 4^2$

$\Longrightarrow \lambda_1 = -1 \; et \; \lambda_2 = -5$

$\Longrightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 5 = 1(\lambda+1)(\lambda+5)$

$\Longrightarrow \lambda \in \{-1, -5\}$

(Toutes les valeurs propres à partie réelle négative) $\Longrightarrow$ système Stable

$$|\mathbf{B}|\mathbf{AB}| = \begin{vmatrix}0 & 8\\ 8 & -48\end{vmatrix} = -64 \neq 0 \Longrightarrow \text{système Contrôlable}$$

$$\begin{vmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{système Observable}$$

```
%Matlab, script
A=[0 1;-5 -6]
B=[0;8]
C=[1 0]
D=0
%
lambda=eig(A)
Mc=ctrb(A,B)
det(Mc)
Mo=obsv(A,C)
det(Mo)
%
F1=ss(A,B,C,D)
F2=tf(F1)
```

Exercice 2

Modèle d'état

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = F(p) = \frac{8}{(p+1)(p+5)} = \frac{c_1}{p+1} + \frac{c_2}{p+5}$$

$$c_1 = (p+1)F(p)|_{p=-1} = 2$$

$$c_2 = (p+5)F(p)|_{p=-5} = -2$$

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{2}{p+1} + \frac{-2}{p+5}$$

$$Y(p) = \underbrace{\frac{2}{p+1}U(p)}_{X_1(p)} + \underbrace{\frac{-2}{p+5}U(p)}_{X_2(p)}$$

```
%Matlab, script
num=8
den=poly([-1 -5])
%
[cf,pf,rf]=residue(num,den)
```

On choisit

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{2}{p+1}U \\ X_2 = \dfrac{-2}{p+5}U \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} X_1 = \frac{2}{p+1}U & \Longrightarrow pX_1 + X_1 = 2U & \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \dot{x}_1(t) + x_1(t) = 2u(t) & \Longrightarrow \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + 2u(t) \\ X_2 = \frac{-2}{p+5}U & \Longrightarrow pX_2 + 5X_2 = -2U & \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \dot{x}_2(t) + 5x_2(t) = -2u(t) & \Longrightarrow \dot{x}_2(t) = -5x_2(t) - 2u(t) \\ Y = X_1 + X_2 & & & \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} y(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{x}_1(t)\} &= pX_1(p) - x_1(t)|_{t=0} \\ &= pX_1(p) \end{aligned}$$

(la définition d'une fonction de transfert suppose des conditions initiales à-zéro)

ôSÁ·TM-ôôEÂÔÏè2 p29g
229511935815345248246691922121252350171125

Sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}u$$

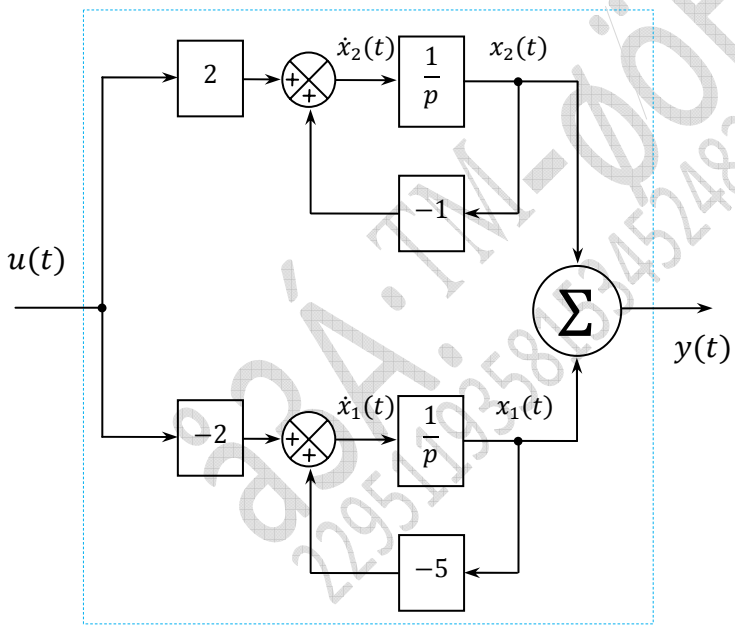
$$y = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + 0u$$

Soit,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = 0$$

Schéma fonctionnel



On rappelle:

La fonction $\frac{1}{p}$ du *domaine-p* correspond à l'opérateur 'intégrale' du *domaine-temps* [Transformée-de-Laplace].

Stabilité ?, Contrôlabilité ? et Observabilité ?

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \lambda \in \{-1, -5\}$$

(Toutes les valeurs propres à partie réelle négative) $\Longrightarrow$ système Stable

Etant donné la même dynamique, Les valeurs propres sont invariantes, indépendamment du modèle d'état [exercice 6]

$|\mathbf{B}|\mathbf{AB}| = \cdots = 16 \neq 0 \Longrightarrow$ système Contrôlable

$\begin{vmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{vmatrix} = \cdots = -4 \neq 0 \Longrightarrow$ système Observable

Exercice 3

(Modèles 1 et 2: comparaison / discussion)

…

à3A·TM-øøEÂÒÌè2 p29g
229511935815345248246691922121252355017112505703

Exercice 4

Modèle 1

Système du 3ème ordre $\Rightarrow$ trois variables d'état: $(x_1 = y) \quad (x_2 = \dot{y}) \quad (x_3 = \ddot{y})$

D'où, ….

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0u$$

Schéma fonctionnel 1

…

Stabilité ?, Contrôlabilité ? et Observabilité ?

$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \cdots = \lambda^3 + 8\lambda^2 + 17\lambda + 10 = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{-1, -2, -5\}$

(Toutes les valeurs propres à partie réelle négative) $\Longrightarrow$ système Stable

$|\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A^2B}| = \cdots = -512 \neq 0 \Longrightarrow$ système Contrôlable

$\begin{vmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA^2} \end{vmatrix} = \cdots = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ système Observable

Modèle 2

…

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\ -2.667\\ 0.667\end{pmatrix}u$$

$$y = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_2\end{pmatrix} + 0u$$

Schéma fonctionnel 2

…

Stabilité ?, Contrôlabilité ? et Observabilité ?

$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \cdots = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+5) = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{-1, -2, -5\}$

(Toutes les valeurs propres à partie réelle négative) $\Longrightarrow$ système Stable

Etant donné la même dynamique, Les valeurs propres sont invariantes, indépendamment du modèle d'état [exercice 6]

$|\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A^2B}| = \cdots = 42.67 \neq 0 \Longrightarrow$ système Contrôlable

$$\begin{vmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \mathbf{CA^2}\end{vmatrix} = \cdots = -12 \neq 0 \Longrightarrow \text{système Observable}$$

Exercice 5

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbf{D} = 0$

```
%Matlab, script
A=[0 1;-5 -6]
B=[0;8]
C=[1 0]
D=0
%
[M0,lambda]=eig(A)
A0=inv(M0)*A*M0
B0=inv(M0)*B
C0=C*M0
D0=D
```

valeurs propres

$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow (\lambda_1 = -1) \quad (\lambda_2 = -5)$

vecteurs propres: $\mathbf{v_1}$ et **$\mathbf{v_2}$** tel que:

$\mathbf{A}\mathbf{v_1} = \lambda_1 \mathbf{v_1}$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \begin{cases} v_{12} = -v_{11} \\ -5v_{11} - 6v_{12} = -v_{12} \end{cases}$

$\Longrightarrow v_{12} = -v_{11}$

```
% On rappelle: infinité de
possibilités pour (v1 et v2) ;
donc pour M0. La solution
générée par la fonction eig
ne suppose pas forcément v11 à
1
```

une infinité de solutions. On choisit une, <u>soit par exemple</u> pour $v_{11} = 1$:

$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathbf{A}\mathbf{v_2} = \lambda_2 \mathbf{v_2} \Longrightarrow \cdots$

$\Longrightarrow v_{22} = -5v_{21}$

<u>Soit, par exemple</u>, pour $v_{21} = 1$: $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

ä3A·TM-ÖÖEÂÒÌè2 p29g
229511935815345248466919221212523550171125057103

matrice modale $\mathbf{M_0}$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{v_1}| \quad \mathbf{v_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$$

un modèle d'état diagonalisée

<u>Modèle d'état</u>

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathbf{x} + \mathrm{B}u \\ y = \mathrm{C}\mathbf{x} + \mathrm{D}u \end{cases}$$

E/S: u/y, vecteur d'état $= \mathbf{x}$

<u>Un autre modèle d'état, diagonalisé, obtenu par transformation linéaire $\mathbf{x} = \mathbf{M_0}\mathbf{z}$</u>

La relation (E/S) maintenue

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathrm{A}_0\mathbf{z} + \mathrm{B}_0 u \\ y = \mathrm{C}_0\mathbf{z} + \mathrm{D}_0 u \end{cases}$$

E/S: u/y, **vecteur d'état** $= \mathbf{z}$

Avec

$(\mathrm{A}_0 = \mathrm{M}_0{}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{M}_0)$ $(\mathrm{B}_0 = \mathrm{M}_0{}^{-1}\mathrm{B})$

$(\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}\mathrm{M}_0)$ $(\mathrm{D}_0 = \mathrm{D})$

(Démonstration: …)

<u>A.N.</u>

$$\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C}_0 = (1 \quad 1) \qquad \mathrm{D}_0 = 0$$

ãÃ·TM-øOEÀÔlë2 b29g
2295129358153452482466919221212523550171125057103

Exercice 6

- Invariance des modes propres sous transformation linéaire $x = \mathbf{M}z$.

  (Démonstration: …)

- Infinité de modèles d'état pour un système dynamique donné ?

  (Discussion: …)

Exercice 7

Autres représentations d'état:

- Forme canonique contrôlable, ou commandable, (Bibliographie, et exercice)
- Forme canonique observable, (Bibliographie, et exercice)
- … (Bibliographie, et exercice)