TD2, Commande par retour d'état

Rafik BENSAADI,
univ-batna2, mai 2020

pré-requis: *espace d'état,*
système dynamique du 2nd ordre,
pôles dominants

Problème 1

Soit le procédé:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (8 \quad 2.5)\, \mathbf{x}(t)$$

1) Donner le schéma fonctionnel,
2) Le procédé est instable, prouvez-le.
3) Pour résoudre le problème d'instabilité, on propose un schéma de commande par retour d'état, $u = v - \mathbf{Kx}$. Concevoir la commande permettant de placer les pôles (valeurs propres) à $\boldsymbol{\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -6}$.
   a) Contrôlabilité du procédé ?
   b) Calcul des gains,
   c) Schéma du système sous-contrôle,
4) Déduire le modèle d'état du système sous-contrôle. Vérifier ses valeurs propres.

Problème 2

Soit le procédé:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 3.75 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (1 \quad 0.5)\, \mathbf{x}(t)$$

mis sous contrôle par retour d'état.

– Concevoir la commande permettant de placer les pôles à $p_{1,2} = -1 \pm 1.5i$

Problème 3

Soit le procédé:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -8 & 0.75 & 5.625 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

mis sous contrôle par retour d'état

– Concevoir la commande permettant de placer les pôles à $p_{1,2} = -1 \pm 1.2i \quad p_3 = -3$

Problème 4

Considérons le procédé, réalisé en considérant les variables de phase comme variables d'état:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

Le procédé est mis sous contrôle par retour d'état.

1) – Polynôme caractéristique en fonction des gains k_1 et k_2,

   – A.N. commande réalisée avec retour unitaire: $k_1 = 1$, $k_2 = 0$

   – En déduire les valeurs du rapport d'amortissement ζ et constante de temps τ

2) La valeur de ζ est supposée acceptable, mais on exige la constante de temps $\tau = 0.1s$. Concevoir la commande.

3) Vérifier ces paramètres par les moyens de simulation disponibles: réponse indicielle correspondant aux questions 1 et 2.

Problème 5

Soit le procédé du problème 2, mis sous contrôle par retour d'état.

– Concevoir la commande permettant d'avoir le rapport d'amortissement $\zeta = 0.7$ et la constante de temps $\tau = 0.65$ s

Problème 6

Considérons le procédé du problème 3, mis sous contrôle par retour d'état.

– Concevoir la commande permettant d'avoir $\zeta = 0.7$ et $\tau = 0.65\ s$

(important keywords: *cancellation of poles and zeros, dominant closed-loop poles, …*)

Réponses

Problème 1

Schéma fonctionnel

… [TD1]

Instabilité du procédé

Valeurs propres:

$\ldots \Longrightarrow \lambda \in \{-1, +2\}$

Il existe un pôle (une valeur propre) à partie réelle positive: $\lambda = +2 \Longrightarrow$ Système instable

```
%Matlab, script
A=[-1 0;0 2]
B=[-3;5]
C=[8 2.5]
D=0
%
lambda=eig(A)
Mc=ctrb(A,B)
det(Mc)
%
p1=[-2 -6]
K=acker(A,B,p1)
%
F1=ss(A-B*K,B,C-D*K,D)
eig(F1)
```

Synthèse de la commande par retour d'état

$|\mathbf{B}|\mathbf{AB}| = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = -45 \neq 0 \Longrightarrow$ système Contrôlable

Le système contrôlable, il est donc possible de calculer **K**:

Par

identification du polynôme caractéristique: $\alpha_c(p) = |p\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| \; = \; (p - \lambda_1)(p - \lambda_2) = p^2 + 8p + 12$;

Ou

application directe de la formule d'Ackermann: $\mathbf{K} = [0 \quad 1][\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]^{-1}\alpha_c(\mathbf{A})$; avec $\alpha_c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 8\mathbf{A} + 12\mathbf{I}$

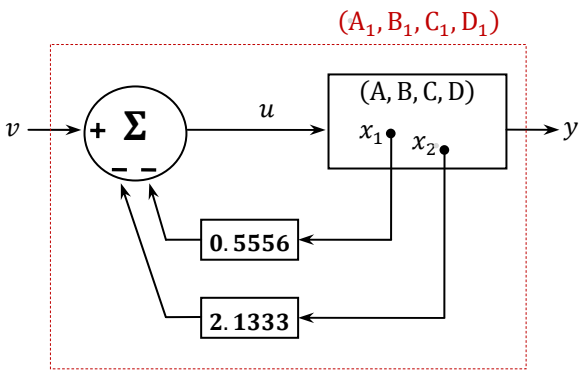
$\mathbf{K} = \underbrace{[0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0 \;\; 1]}_{\boldsymbol{n-1}\,(0)\,et\;\mathbf{1}(1)}[\mathrm{B} \mid \mathrm{AB} \mid \ldots \; \mathrm{A}^{n-1}\mathrm{B}]^{-1}\alpha_c(\mathrm{A})$

Soit ...

...

$\mathbf{K} \; = \; [0.5556 \quad 2.1333]$

Schéma du système sous contrôle



modèle d'état du système sous contrôle

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A_1\mathbf{x} + B_1 v \\ y = C_1\mathbf{x} + D_1 v \end{cases}$$

E/S: v/y, vecteur d'état $= \mathbf{x}$

Avec

$$(A_1 = A - BK) \quad (B_1 = B) \quad (C_1 = C - DK) \quad (D_1 = D)$$

(Démonstration: …)

<u>A.N.</u>

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.6667 & 6.4 \\ -2.778 & -8.667 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C_1 = (8 \quad 2.5) \quad D_1 = 0$$

Valeurs propres:

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A_1}| = 0 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \lambda \in \{-2, -6\} \text{ . évident !}$$

Problème 2

…

$$\mathbf{K} = [-0.9148 \quad -0.183]$$

```
…
p1=[ -1+1.5i -1-1.5i]
…
```

Problème 3

…

$$\mathbf{K} = [-6 \quad 5.72 \quad 12.165]$$

Problème 4

$\alpha_c(p) = |p\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = \cdots = p^2 + (6 + 16k_2)p + (5 + 16k_1)$

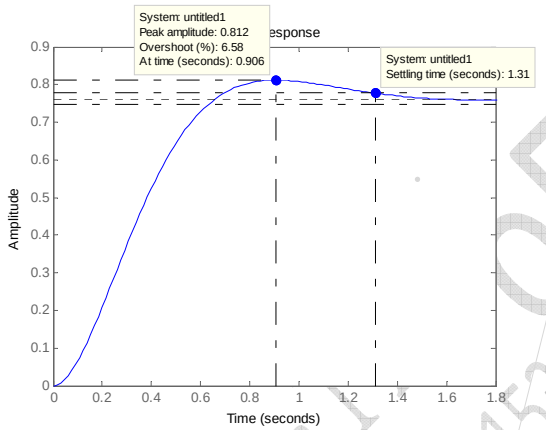
$\alpha_c(p) = p^2 + 6p + 21$

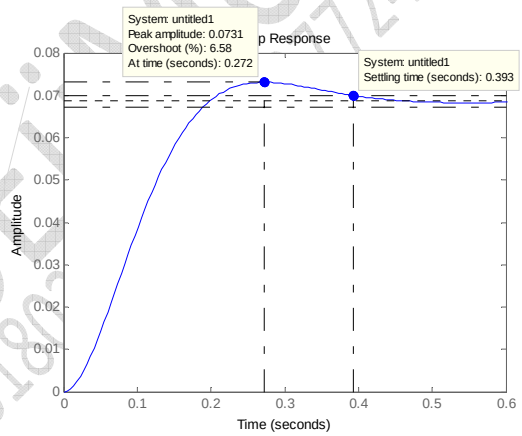
Par identification avec le polynôme typique: $\alpha_c(p) = p^2 + 2\zeta\omega_n p + {\omega_n}^2$; avec $\tau = {}^{1}/_{\zeta\omega_n}$

$\ldots\ (\tau = 0.33) \quad (\zeta = 0.6547)$

$$\begin{cases} \tau = 0.1 \\ \zeta = 0.6547 \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha_c(p) = p^2 + 20p + 233.3 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbf{K} = [14.2688 \quad 0.875]$$

```
%Matlab, script
A=[0 1;-5 -6]
B=[0;16]
C=[1 0]
D=0;
%
K=[1 0]
F1=ss(A-B*K,B,C-D*K,D)
figure(1);step(F1)
%
tau2=0.1
z2=0.6547
wn2=1/(tau2*z2)
poly2=[1 2*z2*wn2 wn2*wn2]
p2=roots(poly2)
Kc=acker(A,B,p2)
F2=ss(A-B*Kc,B,C-D*Kc,D)
figure(2);step(F2)
```





(*settling time*) : temps d'établissement à 2% $\approx \mathbf{4\tau}$

(*overshoot*) : 1er dépassement = $\mathbf{exp}\left(-\boldsymbol{\zeta\pi}/\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{\zeta}^2}\right)$

(pour un système fondamental)

Remarque:

Le cas $(0 < \zeta < 1)$ traduit le régime oscillatoire amorti dans lequel le polynôme $p^2 + 2\zeta\omega_n p + {\omega_n}^2$ possède une paires de racines complexes conjuguées: $p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$.

Problème 5

…

$$\mathbf{K} = [-0.9292 \quad -0.4012]$$

Problème 6

On ne s'intéresse ici qu'au comportement transitoire (le gain statique désiré, rectifié autrement).

Plusieurs solution possibles:

…

$$\mathbf{K} = [-5.8462 \quad 6.9921 \quad 12.4576]$$

…

$$\mathbf{K} = [\ldots$$