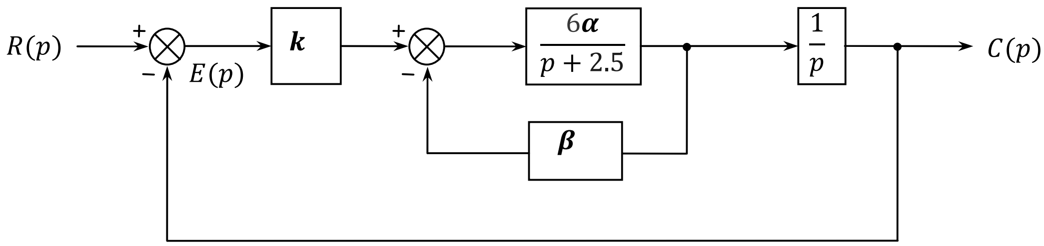
Problème 2/ 12.0 pts

Considérons un servomécanisme avec asservissement de vitesse, (figure ci-après), où $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ gains constants, ajustables.



1) Montrer la fonction de transfert:

$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{6\boldsymbol{k\alpha}}{p^2 + (2.5 + 6\boldsymbol{\alpha\beta})p + 6\boldsymbol{k\alpha}}$$

Exprimer, en fonction de k, α et β, le rapport d'amortissement $\boldsymbol{\zeta}$, et la pulsation naturelle $\boldsymbol{\omega_n}$,

Expliquer l'intérêt de l'asservissement de vitesse.

2) Déterminer $\boldsymbol{F_o(p)}$, la fonction de transfert en boucle ouverte.

Quel est le type du système ?

Déduire l'expression de l'erreur statique de position $\boldsymbol{e_{ssp}}$; et de vitesse $\boldsymbol{e_{ssv}}$.

3) **Synthèse 1**: Soit $k = 5.4$

a) Ajuster $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ pour avoir le dépassement $M_p = 0.08$, à l'instant $t_p = 0.9\ s$,

b) Quels seront les valeurs de, $\boldsymbol{t_{s2}}$ temps d'établissement à 2% ; et $\boldsymbol{e_{ssv}}$ erreur statique de vitesse ?

c) Trouver l'expression de la **réponse indicielle**. Tracer, avec précision, le graphe correspondant.

4) **Synthèse 2**: k est toujours maintenu à 5.4,

a) Formuler la condition d'ajustement des gains $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ pour maintenir stable, le système en boucle fermée,

b) On désire avoir le dépassement $M_p = 0.08$; et l'erreur de vitesse $e_{ssv} = 0.05$. Réajuster $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$,

c) Quel seront les valeurs de $\boldsymbol{t_p}$ et $\boldsymbol{t_{s2}}$?

d) Trouver l'expression de la **réponse face à une entrée rampe-unitaire**. Tracer, avec précision, le graphe correspondant.

1-a) (*plusieurs méthodes*)

…

1-b)

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega_n}^{\mathbf{2}} = 6k\alpha & \Longrightarrow \boldsymbol{\omega_n} = \sqrt{6k\alpha} \\ 2\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{\omega_n} = 2.5 + 6\alpha\beta & \Longrightarrow \boldsymbol{\zeta} = \dfrac{2.5 + 6\alpha\beta}{2\boldsymbol{\omega_n}} \quad = \dfrac{2.5 + 6\alpha\beta}{2\sqrt{6k\alpha}} \end{cases}$$

1-c) …

…(*c.-à.-d. expliquer l'influence de* β)

…

2-a)

$$F_0(p) \quad = \cdots \quad = \frac{6k\alpha}{p(p + 2.5 + 6\alpha\beta)}$$

2-b) Type 1

2-c) Avec la stabilité vérifiée,

$e_{ssp} = 0 \quad \forall(k, \alpha, \beta)$, *car le système est de type 1* (*le calcul direct donne ce résultat*)

$$e_{ssv} \quad = \frac{1}{K_v} \quad = \frac{1}{\lim\limits_{p \to 0} pF_0(p)} \quad = \cdots \quad = \frac{2.5 + 6\alpha\beta}{6k\alpha}$$

3-a)

Avec $\qquad k = 5.4 \qquad \zeta = \dfrac{-\ln M_p}{\sqrt{\left(\ln M_p\right)^2 + \pi^2}} \qquad \omega_n = \dfrac{\pi}{t_p\sqrt{1 - \zeta^2}}$

$$\begin{cases} M_p = 0.08 \\ t_p = 0.9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \zeta = 0.6266 \\ \omega_n = 4.4789 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \cdots = 0.6191 \\ \beta = \cdots = 0.8379 \end{cases}$$

3-b)

$$t_{s2} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad = 1.4253$$

$$e_{ssv} = \frac{2.5 + 6\alpha\beta}{6k\alpha} \quad = 0.2798$$

3-c)

$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{20.06}{p^2 + 5.613p + 20.06}$$

$$\Rightarrow C(p) = R(p)\left(\frac{20.06}{p^2 + 5.613p + 20.06}\right) = \left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{20.06}{p^2 + 5.613p + 20.06}\right) = \frac{20.06}{p(p^2 + 5.613p + 20.06)}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(p)\}$$

…

… (*méthode de calcul*)

…

$$c(t) \quad = 1 + 1.2832e^{-2.8064t}\cos(3.4907t + 2.4644) \quad (t \geq 0)$$

Une autre expression équivalente:

$$c(t) \quad = 1 - e^{-2.8064t}\cos(3.4907t) - 0.8e^{-2.8064t}\sin(3.4907t) \quad (t \geq 0)$$

(*Le tracé du graphe, allure oscillatoire amortie autour d'une constante, doit montrer les informations essentielles:* $c(\infty)$, M_p, …)

4-a) en utilisant le critère de Routh par exemple,

…

…

$$(stability) \quad \Rightarrow \cdots \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha & > 0 \\ \beta & > \dfrac{-2.5}{6\alpha} \end{cases}$$

4-b)

Avec $\quad k = 5.4 \qquad \zeta = \dfrac{-\ln M_p}{\sqrt{(\ln M_p)^2 + \pi^2}} = \dfrac{2.5 + 6\alpha\beta}{2\sqrt{6k\alpha}} \qquad e_{ssv} = \dfrac{2.5 + 6\alpha\beta}{6k\alpha}$

$$\begin{cases} M_p = 0.08 \\ e_{ssv} = 0.05 \end{cases} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \cdots = 19.3876 \\ \beta = \cdots = 0.2485 \end{cases}$$

4-c)

$$t_{s2} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad = 0.2547$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}} \qquad = 0.1608$$

4-d)

$$\frac{C(p)}{R(p)} = \frac{628.2}{p^2 + 31.41p + 628.2}$$

$$\Rightarrow C(p) = R(p)\left(\frac{628.2}{p^2 + 31.41p + 628.2}\right) = \left(\frac{1}{p^2}\right)\left(\frac{628.2}{p^2 + 31.41p + 628.2}\right) = \frac{628.2}{p^2(p^2 + 31.41p + 628.2)}$$

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(p)\}$$

…

… (*méthode de calcul*)

…

$$c(t) \quad = -0.05 + t + 0.0512e^{-15.7040t}\cos(19.5332t + 0.2165) \quad (t \geq 0)$$

Une autre expression équivalente:

$$c(t) \quad = -0.05 + t + 0.05e^{-15.7040t}\cos(19.5332t) - 0.011e^{-15.7040t}\sin(19.5332t) \quad (t \geq 0)$$

(*Le tracé du graphe, allure oscillatoire amortie autour d'une asymptote linéaire, doit montrer les informations essentielles:* e_{ssv}, …)