# Correction Interrogation Ecrite N° 2

## Exercice 1

1° Calculer la TZ des fonctions suivants.

a $X_1(P) = \frac{1}{P+2} \Rightarrow Z\left[X_1(P)\right] = Z\left[e^{-2t}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kT} Z^{-k}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-2T} Z^{-1}\right)^k$ soit $a = e^{-2T} Z^{-1} \Rightarrow$

$$X_1(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-e^{-2T}Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-e^{-2T}}$$

b $X_2(P) = \frac{3}{(P+2)(P+5)} = \frac{\alpha_1}{P+2} + \frac{\alpha_2}{P+5} = \frac{1}{P+2} - \frac{1}{P+5}$

$$X_2(Z) = Z\left[\frac{1}{P+2} - \frac{1}{P+5}\right] = Z\left[\frac{1}{P+2}\right] - Z\left[\frac{1}{P+5}\right]$$

$$= \frac{Z}{Z-e^{-2T}} - \frac{Z}{Z-e^{-5T}} = \frac{Z\left(e^{-2T} - e^{-5T}\right)}{\left(Z-e^{-2T}\right)\left(Z-e^{-5T}\right)}$$

c $X_3(t) = 2t + 3 + e^{-8t}$

$$Z\left[X_3(t)\right] = Z\left[2t\right] + Z\left[3\right] + Z\left[e^{-8t}\right]$$

$$X_3(Z) = \frac{2TZ}{(Z-1)^2} + \frac{3Z}{Z-1} + \frac{Z}{Z-e^{-8T}}$$

2° Calculer la TZI des fonctions suivants.

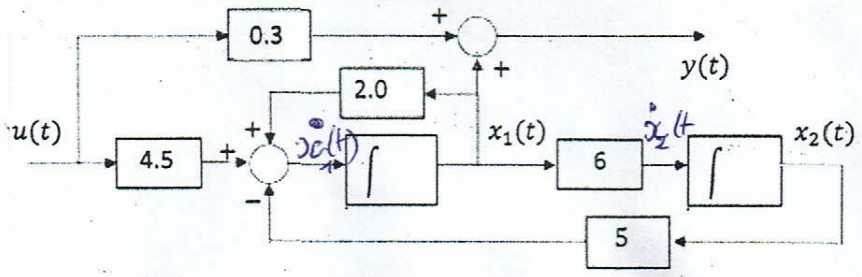
$G_1(Z) = \frac{5Z}{Z-2} \Rightarrow g_1(kT) = 5\,(2)^k\, u(k)$

$$G_2(z) = \frac{3z}{(z+2)(z+5)} \Rightarrow \frac{G_2(z)}{z} = \frac{3}{(z+2)(z+5)} = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+5}$$

$$\Rightarrow G_2(z) = \frac{z}{z+2} - \frac{z}{z+5} \Rightarrow g_2(kT) = \left[(-2)^k - (-5)^k\right] u(k)$$

**Exercice 2 /3.5 pts**

Considérons le schéma fonctionnel du système discret suivant :




Trouver les matrices (*A, B, C, et D*) du modèle d'état,

D'après le schéma fonctionnel, nous avons

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + 4{,}5\,u(t) - 5x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 6x_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + 0{,}3\,u(t)$$

Aussi les matrices A, B, C et D sont

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}; \quad B \begin{bmatrix} 4{,}5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1, 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0{,}3$$

% Exercice 3

---

1)

A =

-3.0000 2

1 4.5000

B =

-2

4

C =

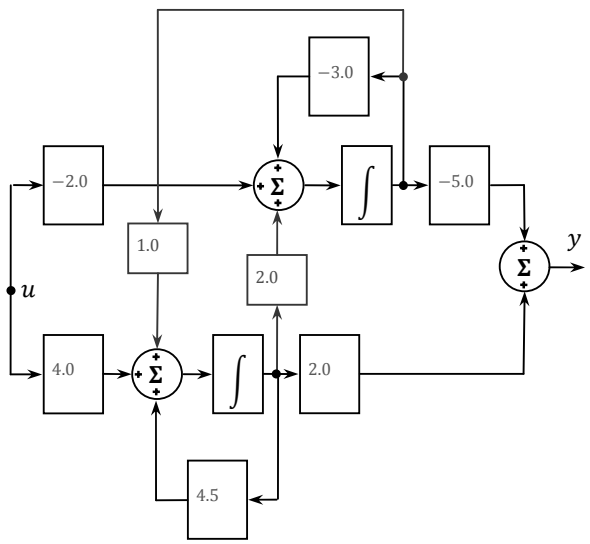
-5 2

D =

0

---

2) Schéma fonctionnel




---

3) Stabilité ?

Les valeurs propres sont les solutions de l'équation $|\lambda I-A|=0$)

$\Rightarrow$... $\Rightarrow$ $\lambda \in \{-3.258,\ 4.758\}$

Il existe un pôle (une valeur propre) à partie réelle positive: $\lambda=4.75$

$\Rightarrow$ Système instable

---

4-a) tous les pôles nouveaux deviennent (imposés) a partie réelle négative: -3

4-b) par identification du polynôme caractéristique:

$\alpha_c(p) = (p-p1)(p-p2)$

$= p^2+6p+15.25$

$= p^2+2\zeta\omega_n p+\omega_n^2$

$\Rightarrow$... $\Rightarrow$ ($\omega_n$=3.91), ($\zeta$=0.768)

4-c) contrôlabilité

Mc = [B | AB]

-2.0000 14.0000

4.0000 16.5000

det(Mc) = -88

det(Mc)$\neq$ 0 $\Rightarrow$ Système contrôlable

---

4-d) Le système contrôlable, il est donc possible de calculer K tel que:

$|pI-A+BK| = (p+3+2.5i)(p+3-2.5i)$

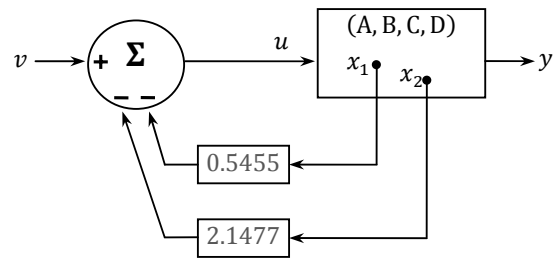
Soit ...

...

K = [0.5455 2.1477]

---

4-e) Schéma




---

4-f) modèle d'état

A1 = A-BK =

-1.909 6.295

-1.182 -4.091

B1 = B =

-2

4

C1 = C-DK =

-5 2

D1 = D =

0

---

4-g) y(∞) ?

Dans le modèle d'état du système sous-contrôle (question 4-f) mettre $\dot{x}(\infty) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $u(\infty) = 1$, d'où ...

$x(\infty) = \begin{bmatrix} 1.1148 \\ 0.6557 \end{bmatrix}$, d'où $y(\infty) = -4.2623$

---