Analyse 02

Université de Batna 02
Faculté des mathématiques et d’informatique
Département Socle Commun MI
1^{re}Année MI

Chapitre01

Fonctions usuelles

Année Universitaire 2021/2022

Chapitre 5

Fonctions usuelles

Sommaire

5.1 Rappel sur la fonction réciproque

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et $J = f(I)$. On s'intéresse aux conditions d'existence d'une bijection réciproque pour f, c'est-à- dire à l'existence d'une fonction f^{-1} de J dans I telle que:

$$\forall x \in I,\ f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in J,\ f(f^{-1}(y)) = y$$

Proposition 5.1

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. Si f est continue et strictement monotone sur I alors f est une bijection de I dans $J = f(I)$ et admet une fonction réciproque f^{-1} de J dans I qui possède les propriétés suivantes:

1. f^{-1} est continue sur J.
2. f^{-1} est strictement monotone sur J et de même sens de monotonie que f.
3. f^{-1} est bijective.

Remarque 5.1 *Dans un repère orthonormé les représentations graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

Exemple 5.1

Soit f la fonction défine par:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \ln(x) \end{array}$$

On a:

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Posons $I = \mathbb{R}_+^*$, alors $J = f(I) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
D'après le tableau de variations de f on a:

1. f est continue sur I
2. f est strictement croissante sur I

alors f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on note par e^x ou $\exp(x)$ définie par:

$$\begin{array}{rl} f^{-1}: & \mathbb{R} \to]0, +\infty[\\ & x \mapsto f^{-1}(x) = e^x \end{array}$$

Proposition 5.2: (Dérivabilité en un point)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective dérivable en $x_0 \in I$.
Si on a $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et de plus:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Proposition 5.3: (Dérivabilité sur un intervalle)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective dérivable sur I (avec I est un intervalle ouvert).
Si on a: $\forall x \in I;\ f'(x) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable sur J et de plus:

$$\forall y \in J;\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Exemple 5.2

Posons $f(x) = \ln(x)$ et $I = \mathbb{R}_+^*$, alors $J = f(I) = \mathbb{R}$. D'après l'exemple précédent, f est bijective de I dans J et admet une fonction récoproque $f^{-1}(x) = e^x$.
On a: pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ est dérivable et de plus $f'(x) = \dfrac{1}{x} \neq 0$. D'après la propositions (5.3) f^{-1} est dérivable sur $J = \mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R};\ (f^{-1})'(y) = (e^y)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\frac{1}{e^y}} = e^y$$

Remarque 5.2 *On peut remplacer dans la formule précédente y par x et on écrit:*

$$\forall x \in \mathbb{R};\ (e^x)' = e^x$$

5.2 Fonctions logarithmes

5.2.1 La fonction logarithme népérien

Définition 5.1

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln, la fonction qui vérifie les deux condition suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ (\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$
2. $\ln(1) = 0$

Remarque 5.3 *(Propriétés des dérivées)*

1. *D'après la définition précédente la fonction* $\ln(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$*;* $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$.
2. *La fonction* $\ln(|x|)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et de plus* $\forall x \in \mathbb{R}^*;\ (\ln(|x|))' = \dfrac{1}{x}$
3. *Soit g une fonction dérivable et non nule sur I , alors la fonction* $\ln(|g(x)|$ *est dérivable sur I et sa dérivée:* $(\ln(|g(x)|)' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

Proposition 5.4: (Limites et inégalités classiques)

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$).
5. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$
7. $\forall x \in]-1, +\infty[;\ \ln(x+1) \le x$

‘

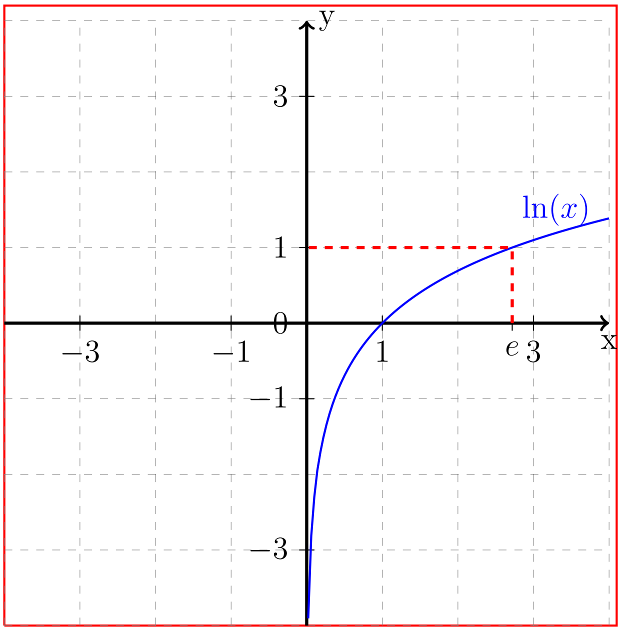

Figure 5.1 – Représentation graphique de la fonction $\ln(x)$

Proposition 5.5: (Propriétés algébriques de la fonction $\ln(x)$)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a les propriétés suivantes:

1. $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
4. $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$

5.2.2 La fonction logarithme de base a

Définition 5.2

Soit $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
On appelle fonction logarithme de base a et on note $\log_a$, la fonction définie par:

$$\forall x \in]0, +\infty[;\ \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Remarque 5.4 *(Propriétés de la fonction $\log_a$)*

1. *On a: $\ln(x) = \log_e(x)$ c-à-d, la fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e.*
2. *La fonction logarithme de base a vérifie des relations analogues à celles énoncées pour la fonction logarithme népérien.*

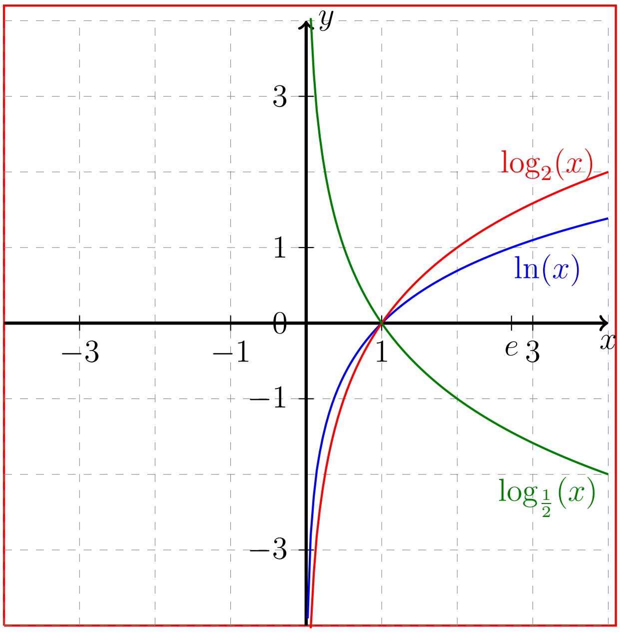

Figure 5.2 – Représentation graphique des fonctions logarithme népérien et logarithmes de base a pour $a = \frac{1}{2}$, $a = 2$

5.3 Fonctions exponentielles

5.3.1 La fonction exponentielle

Définition 5.3

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction $\ln(x)$ et on la note par: $\exp(x)$ ou e^x, elle satisfait les propriétés suivantes:

1. $\forall x \in]0, +\infty[;\ x = e^{\ln(x)}$
2. $\forall y \in \mathbb{R};\ y = \ln(e^y)$

Proposition 5.6

1. La fonction e^x est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. La fonction e^x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R};\ (e^x)' = e^x$
3. Si u est une fonction dérivable sur I alors: la fonction $e^{u(x)}$ est dérivale sur I et sa dérivée définie par: $\forall x \in I;\ (e^{u(x)})' = u'(x).e^{u(x)}$

Proposition 5.7: (Limites et inégalités)

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$)
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
5. $\forall x \in \mathbb{R};\ e^x \geq 1 + x$

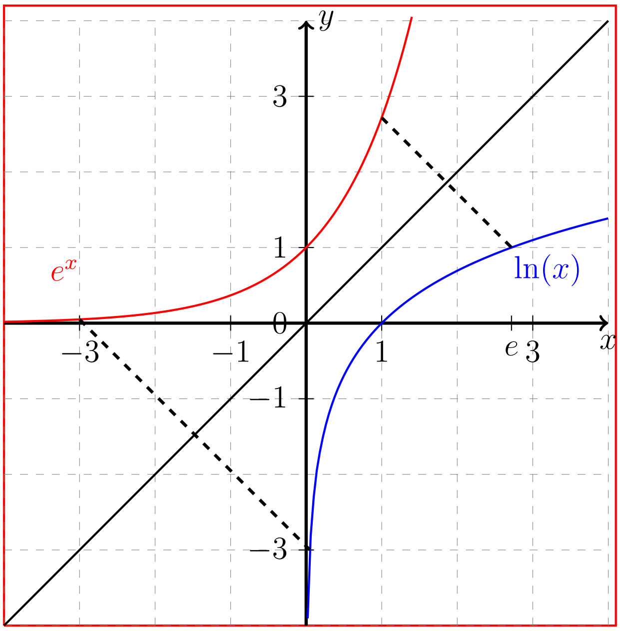

Figure 5.3 – Représentation graphique de la fonction e^x

Proposition 5.8: (Propriétés algébriques de la fonction e^x)

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, on a:

1. $e^{x+y} = e^x \times e^y$
2. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
3. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
4. $e^{\alpha x} = (e^x)^\alpha$

5.3.2 La fonction exponentielle de base a

Définition 5.4

Soit $a \in]0, 1[\cup]1, \infty[$.
On appelle fonction exponentielle de base a la fonction réciproque de la fonction $\log_a(x)$ et on la note a^x, elle satisfait:

1. $\forall x \in \mathbb{R};\ a^x = e^{x \ln(a)}$
2. $\forall x \in \mathbb{R};\ \log_a(a^x) = \log_a(e^{x \ln(a)}) = \dfrac{\ln(e^{x \ln(a)})}{\ln(a)} = x$

Remarque 5.5 *La fonction a^x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:*

$$\forall x \in \mathbb{R};\ (a^x)' = \ln(a)a^x$$

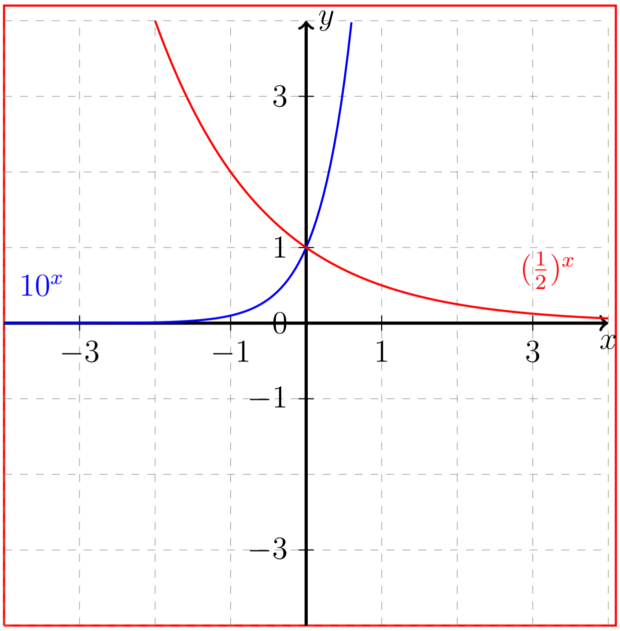

Figure 5.4 – Représentation graphique des fonctions 10^x et $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

Remarque 5.6 *La fonction exponentielle de base a vérifie des propriétés analogues à celles énoncées pour la fonction exponentielle.*

5.4 Fonctions puissances

Définition 5.5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on appelle fonction puissance d'exposant α, la fonction défine par:

$$\forall x \in]0, +\infty[;\ x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Remarque 5.7 *Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$e^{n\ln(x)} = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x)} = \prod_{k=1}^{k=n} e^{\ln(x)} = \prod_{k=1}^{k=n} x = \underbrace{x \times x \times .... \times x}_{n fois} = x^n$$

Proposition 5.9

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction puissance d 'exposant α est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ et strictement monotne (strictement croissante si $\alpha > 0$ et strictement décroissante si $\alpha < 0$).
2. Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée : $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\forall x \in]0, +\infty[$
3. On a:

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = \begin{cases} 0, & si\ \alpha < 0 \\ 1, & si\ \alpha = 0 \\ +\infty, & si\ \alpha > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} +\infty, & si\ \alpha < 0 \\ 1, & si\ \alpha = 0 \\ 0, & si\ \alpha > 0 \end{cases}$$

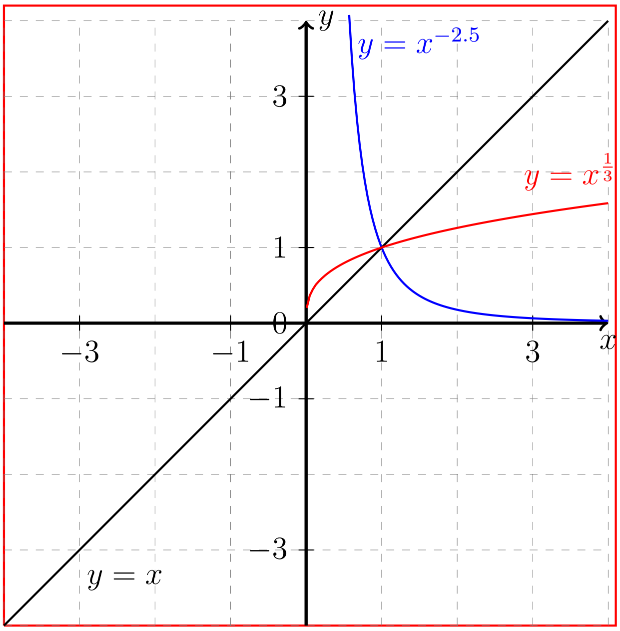

Figure 5.5 – Représentation graphique des fonctions x^α, avec $\alpha = -2.5, 1, \dfrac{1}{3}$

Proposition 5.10

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a les relations suivantes:

1. $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$.
2. $x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$.
3. $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$.
4. $x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta = (x^\beta)^\alpha$.

5.5 Fonctions circulaires (ou trigonométriques)

5.5.1 Rappels sur les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$

Proposition 5.11

Les fonctions $\begin{cases} x \longmapsto \cos(x) \\ \quad\text{et} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et vérifient les propriétés suivantes:

1. $\forall x \in \mathbb{R};\ |\cos(x)| \leq 1 \wedge |\sin(x)| \leq 1$
2. $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont 2π-périodiques c-à-d:
$$\forall x \in \mathbb{R};\ \begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos(x) \\ \quad\text{et} \\ \sin(x+2\pi) = sin(x) \end{cases}$$
3. La fonction $\cos(x)$ est paire et la fonction $\sin(x)$ est impaire c-à-d:
$$\forall x \in \mathbb{R};\ \begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \quad\text{et} \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$$
4. Les fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a:

   a $\forall x \in \mathbb{R};\ \begin{cases} (\cos(x))' = -\sin(x) \\ \quad\text{et} \\ (\sin(x))' = \cos(x) \end{cases}$

   b $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N};\ \begin{cases} \cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \\ \quad\text{et} \\ \sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \end{cases}$

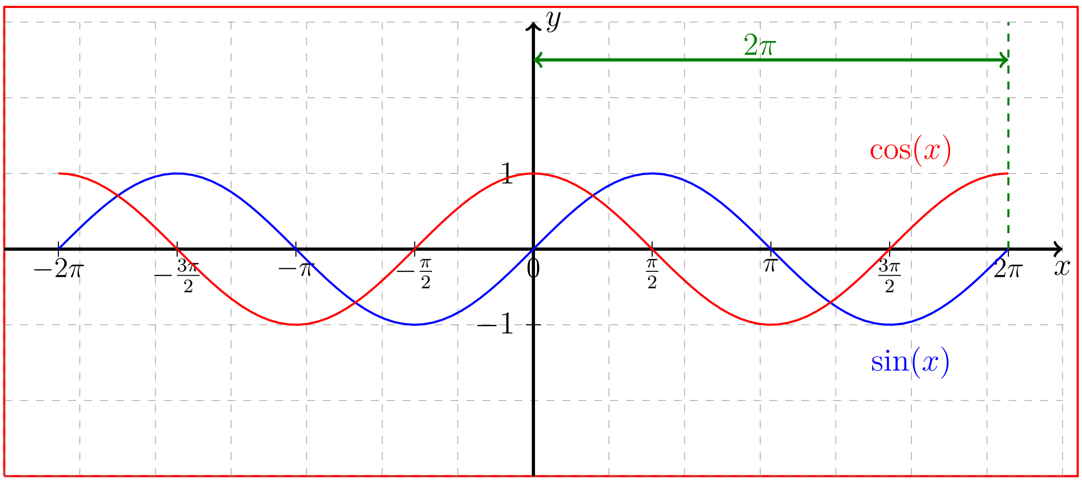

Figure 5.6 – Représentation graphique des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$

Proposition 5.12: (Formules d'addition)

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a les formules suivantes:

- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
- $\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

5.5.2 Rappel sur la fonction $\tan(x)$

Définition 5.6

On appelle fonction tangente la fonction définie par:

$$\begin{array}{rccl} \tan: & \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}$$

Proposition 5.13

La fonction $\tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ et on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\};\ (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

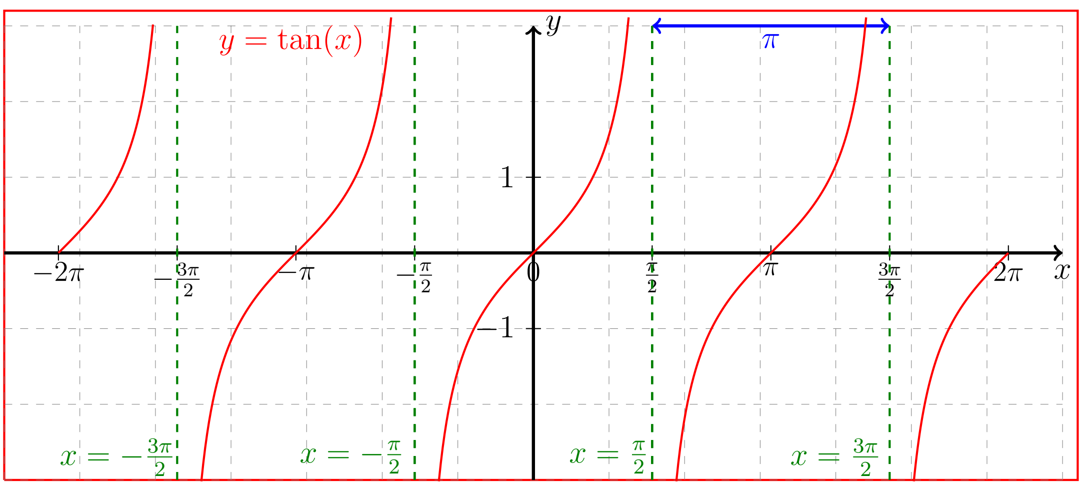

Figure 5.7 – Représentation graphique de la fonction $\tan(x)$

Proposition 5.14

La fonction $\tan(x)$ vérifie les propriétés suivantes:

1. La fonction $\tan(x)$ est π-périodique c-à-d:

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\};\ \tan(x+\pi) = \tan(x)$$

2. Pour tous $x, y \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ on a:

$$\begin{cases} \tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} \\ \qquad \text{et} \\ \tan(x-y) = \dfrac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)} \end{cases}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\};\ \tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

Proposition 5.15: (Quelques limites usuelles)

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$
5. $\lim\limits_{x \to +\frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$

5.6 Fonctions hyperboliques

5.6.1 Les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ peut être décomposée de manière unique en une somme de deux fonctions f_p et f_i où f_p est une fonction paire et f_i est une fonction impaire. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Donc on peut choisir

$$\begin{cases} f_p(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2} \\ \quad\quad \text{et} \\ f_i(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}$$

Remarque 5.8 *On peut vérifier sans difficulté que cette décomposition est unique, et f_p est une fonction paire et f_i est une fonction impaire.*

Définition 5.7: (cosinus hyperbolique)

On appelle fonction cosinus hyperbolique notée par (ch ou cosh), la partie paire de la fonction exponentielle définie par:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Définition 5.8: (sinus hyperbolique)

On appelle fonction sinus hyperbolique notée par (sh ou sinh), la partie impaire de la fonction exponentielle définie par:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Définition 5.9: (tangente hyperbolique)

On appelle fonction tangente hyperbolique notée par (th ou tanh), le quotient de la fonction sinus hyperbolique par la fonction cosinus hyperbolique définie par:

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array}$$

Proposition 5.16

- La fonction $\text{ch}(x)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et paire.
- La fonction $\text{sh}(x)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et impaire.
- La fonction $\text{th}(x)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue et impaire.
- Les fonctions $\text{ch}(x)$, $\text{sh}(x)$ et $\text{th}(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont définies par:
$$\forall x \in \mathbb{R};\ \begin{cases} (\text{ch}(x))' = \text{sh}(x) \\ \\ (\text{sh}(x))' = \text{ch}(x) \\ \\ (\text{th}(x))' = \dfrac{1}{\text{ch}(x)^2} = 1 - \text{th}(x)^2 \end{cases}$$

Preuve

Ces propriétés se démontrent en utilisant les propriétés de la fonction e^x. Dans notre preuve nous intéressons à la fonction $\text{th}(x)$.
On a:
$$\forall x \in \mathbb{R};\ \text{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- La continuité: Les fonctions $(e^x - e^{-x})$ et $(e^x + e^{-x})$ sont continues sur $\mathbb{R}$, et de plus $e^x + e^{-x} \neq 0$ alors la fonction quotient $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est continue sur $\mathbb{R} \implies \text{th}(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- La parité: On a:
$$\forall x \in \mathbb{R};\ \text{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} = -\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\text{th}(x)$$
Donc $\text{th}(x)$ est impaire.
- La dérivabilité: Les fonctions $(e^x - e^{-x})$ et $(e^x + e^{-x})$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et de plus $e^x + e^{-x} \neq 0$ alors la fonction quotient $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \implies \text{th}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:
$$\forall x \in \mathbb{R};\ (\text{th}(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$
$$\iff \text{th}(x)' = 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = 1 - \text{th}(x)^2$$
ou encore $\text{th}(x)' = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{1}{\text{ch}(x)^2}$.

Remarque 5.9 *Les fonctions ch(x),sh(x) et th(x) vérifient les propriétés suivantes:*

1. *ch(0)=1, sh(0)=0 et th(0)=0.*
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} ch(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} th(x) = -1$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x) = 1$

Donc on peut regrouper les résultats précédents sous forme de tableaux.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)' = \mathrm{ch}(x)$		$+$	
$\mathrm{sh}(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

(a) Fonction $\mathrm{sh}(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)' = \mathrm{sh}(x)$	$-$	0	$+$
$\mathrm{ch}(x)$	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

(b) Fonction $\mathrm{ch}(x)$

Figure 5.8 – Fonctions $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\mathrm{th}(x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$		$+$	
$\mathrm{th}(x)$	-1 $\nearrow$	0	$\nearrow$ 1

Figure 5.9 – Fonction $\mathrm{th}(x)$

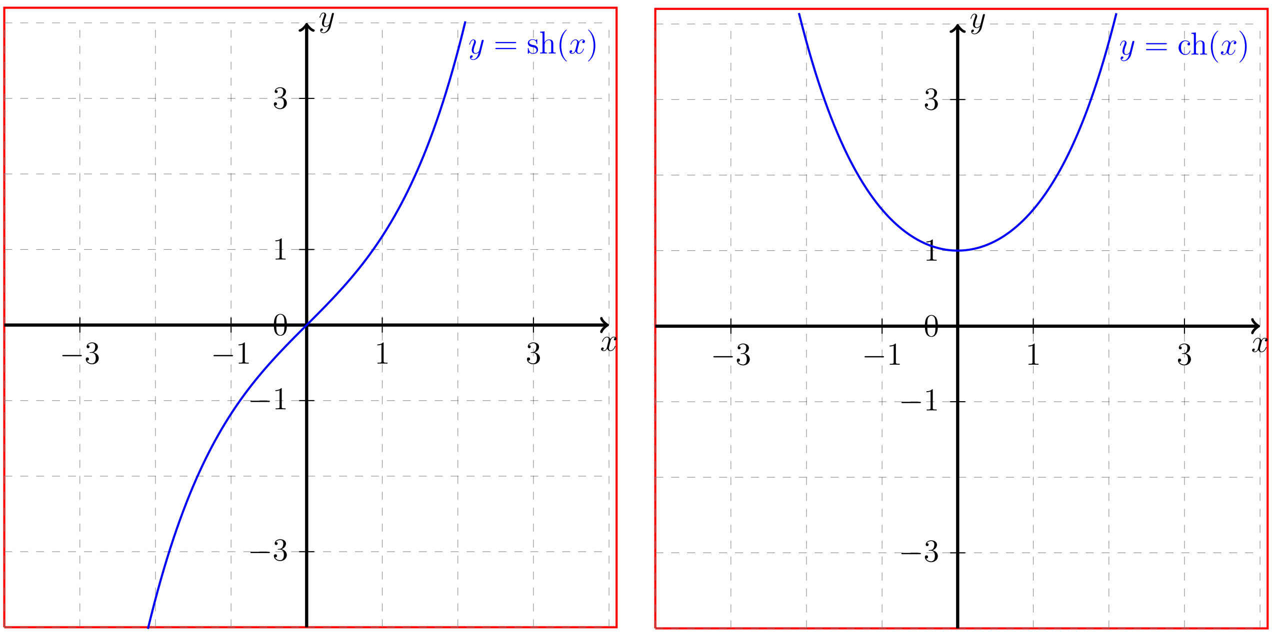

Figure 5.10 – Représentation graphique des fonctions $\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x)$

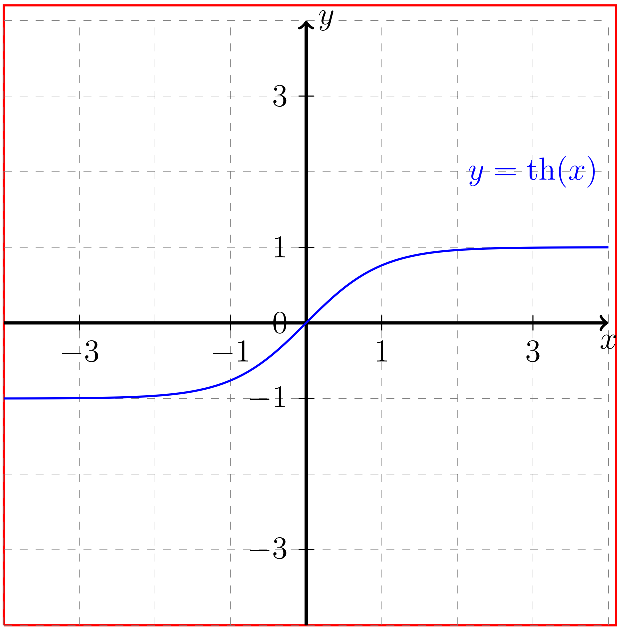

Figure 5.11 – Représentation graphique de la fonction $\mathrm{th}(x)$

Proposition 5.17

Pour tout réel x, on a:

- $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$
- $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$
- $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$

Proposition 5.18: (Formules d'addition)

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a les formules suivantes:

- $\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$
- $\mathrm{ch}(x - y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$
- $\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$
- $\mathrm{sh}(x - y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) - \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$
- $\mathrm{th}(x + y) = \dfrac{\mathrm{th}(x) + \mathrm{th}(y)}{1 + \mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}$
- $\mathrm{th}(x - y) = \dfrac{\mathrm{th}(x) - \mathrm{th}(y)}{1 - \mathrm{th}(x)\mathrm{th}(y)}$

Preuve

On démontre ces formules en utilisant les expressions des fonctions hyperboliques à l'aide de la fonction exponentielle.
On a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y) &= \frac{1}{4}\Big((e^x+e^{-x})(e^y+e^{-y})+(e^x-e^{-x})(e^y-e^{-y})\Big)\\
&= \frac{1}{4}\left(2e^xe^y+2e^{-x}e^{-y}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{(x+y)}+e^{-(x+y)}\right)\\
&= \mathrm{ch}(x+y).
\end{aligned}$$

On démontre les autres relations avec la même méthode.

Proposition 5.19: (Quelques limites usuelles des fonctions hyperboliques)

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{ch}(x)}{e^x}=\frac{1}{2}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}(x)}{e^x}=\frac{1}{2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}=1$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2}=\frac{1}{2}$

5.7 Fonctions circulaires réciproques

5.7.1 La fonction arc-sinus

D'après le tableau de variation ci-dessous on a:
La fonction $\sin(x)$ est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, alors la fonction $\sin(x)$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,1]$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$+\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)'=\cos(x)$		$+$	
$\sin(x)$	-1 ↗	0 ↗	1

Figure 5.12 – Fonction $\sin(x)$

Définition 5.10

On appelle fonction arc-sinus et on note $\arcsin(x)$ ou $\sin^{-1}(x)$, la fonction réciproque de la restriction de $\sin(x)$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définie par:

$$\begin{array}{rrcl} \arcsin: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & \arcsin(x) \end{array}$$

Proposition 5.20

La fonction $\arcsin(x)$ vérifie les propriétés suivantes:

1. La fonction $\arcsin(x)$ est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$. (D'après le théorème des fonctions inverses)
2. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $\arcsin(\sin(x) = x$.
3. $\forall y \in [-1, 1]$; $\sin(\arcsin(y) = y$.
4. $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \forall y \in [-1, 1]$; $(\sin(x) = y \iff x = \arcsin(y))$.
5. La fonction $\arcsin(x)$ est impaire.

Preuve

On va démontrer la propriété (5).

1. La fonction $\arcsin(x)$ est définie sur $[-1, 1]$, donc dans ce cas le domaine de définition est symétrique par rapport à 0.
2. Soit $x \in [-1, 1]$, posons:

$$\arcsin(-x) = y \tag{5.1}$$

$$\Leftrightarrow -x = \sin(y) \Leftrightarrow x = -\sin(y) \Leftrightarrow x = \sin(-y) \text{ (Puisque } \sin(x) \text{ est impaire)}$$

On a: $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \implies -y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
Donc on obtient: $\arcsin(x) = -y \Leftrightarrow -\arcsin(x) = y$
D'après l'équation (5.1) on obtient: $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

$\implies$ La fonction $\arcsin(x)$ est impaire.

Remarque 5.10 *Le tableau ci-dessous contient quelques valeurs usuelles concernant la fonction* $\arcsin(x)$

$\sin(0) = 0$	$\arcsin(0) = 0$
$\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$	$\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$
$\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$
$\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$
$\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$	$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

Proposition 5.21

La fonction arc-sinus est dérivable sur $]-1,1[$ et vérifie:

$$\forall x \in]-1,1[;\ (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Preuve

On a la fonction $\sin(x)$ vérifie les deux propriétés suivantes:

1. $\sin(x)$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
2. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[;\ (\sin(x))' = \cos(x) \neq 0$

$\Longrightarrow$ (d'après la proposition (5.3)), la fonction $\arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et on a:

$$\forall x \in]-1,1[;\ (\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \tag{5.2}$$

Soit $x \in]-1,1[$, posons $y = \arcsin(x)$

$$\Longrightarrow\ y \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\wedge \cos(y) > 0$$

D'après la relation $\cos^2(y)+\sin^2(y) = 1$, on en déduit que: $\cos(y) = \sqrt{1-\sin^2(y)}$.
Puisque pour tout $x \in]-1,1[$ on a: $\sin(\arcsin(x)) = x$

$$\Longrightarrow\ \cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

D'après l'équation (5.2) on obtient:

$$\forall x \in]-1,1[;\ (arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

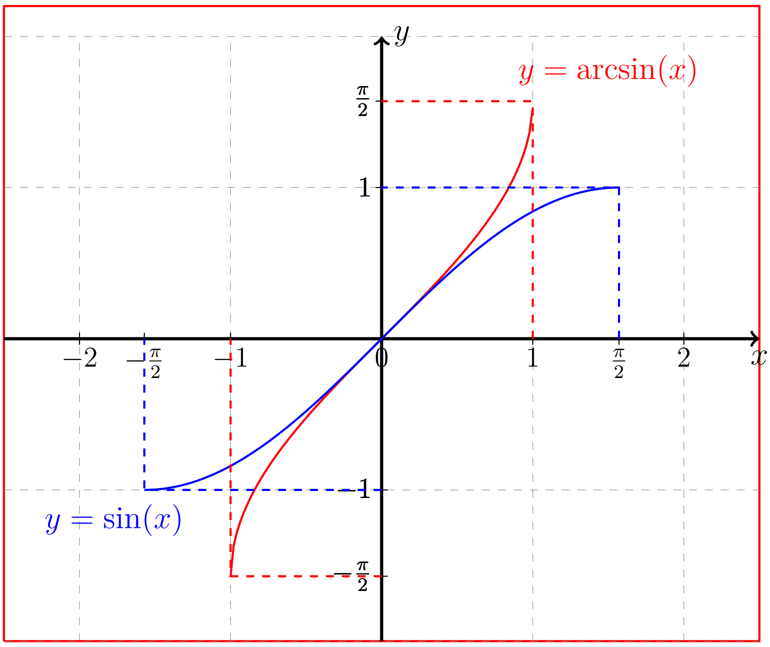

Figure 5.13 – Représentation graphique de la fonction $\arcsin(x)$

5.7.2 La fonction arc-cosinus

D'après le tableau de variation ci-dessous on a:
La fonction $\cos(x)$ est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, alors la fonction $\cos(x)$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

x	0	π
$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$-$	
$\cos(x)$	$1 \searrow$	-1

Figure 5.14 – La fonction $\cos(x)$

Définition 5.11

On appelle fonction arc-cosinus et on note $\arccos(x)$ ou $\cos^{-1}(x)$, la fonction réciproque de la restriction de $\cos(x)$ sur $[0, \pi]$ définie par:

$$\begin{array}{rccl} \arccos: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & x & \longmapsto & \arccos(x) \end{array}$$

Proposition 5.22

La fonction $\arccos(x)$ vérifie les propriétés suivantes:

1. La fonction $\arccos(x)$ est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$. (D'après le théorème des fonctions inverses)
2. $\forall x \in [0, \pi]$; $\arccos(\cos(x) = x$.
3. $\forall y \in [-1, 1]$; $\cos(\arccos(y)) = y$.
4. $\forall x \in [0, \pi], \forall y \in [-1, 1]$; $(\cos(x) = y \iff x = \arccos(y))$.
5. La fonction $\arccos(x)$ n'est pas paire et aussi n'est pas impaire.

Remarque 5.11 *Le tableau ci-dessous contient quelques valeurs usuelles concernant la fonction* $\arccos(x)$

$\cos(0) = 1$	$\arccos(1) = 0$
$\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$
$\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$
$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$	$\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$
$\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$	$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$

Proposition 5.23

La fonction arc-cosinus est dérivable sur $]-1,1[$ et vérifie:

$$\forall x \in]-1,1[;\ (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Preuve

On a la fonction $\cos(x)$ vérifie les deux propriétés suivantes:

1. $\cos(x)$ est dérivable sur $]0,\pi[$.
2. $\forall x \in]0,\pi[;\ (\cos(x))' = -\sin(x) \neq 0$

$\Longrightarrow$ (d'après la proposition (5.3)), la fonction $\arccos(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$ et on a:

$$\forall x \in]-1,1[;\ (\arccos(x))' = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} \tag{5.3}$$

Soit $x \in]-1,1[$, posons $y = \arccos(x)$

$$\Longrightarrow\ y \in]0,\pi[\wedge \sin(y) > 0$$

D'après la relation $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$, on en déduit que: $\sin(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}$.
Puisque pour tout $x \in]-1,1[$ on a: $\cos(\arccos(x)) = x$, alors on obtient:

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

D'après l'équation (5.3) on obtient:

$$\forall x \in]-1,1[;\ (arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

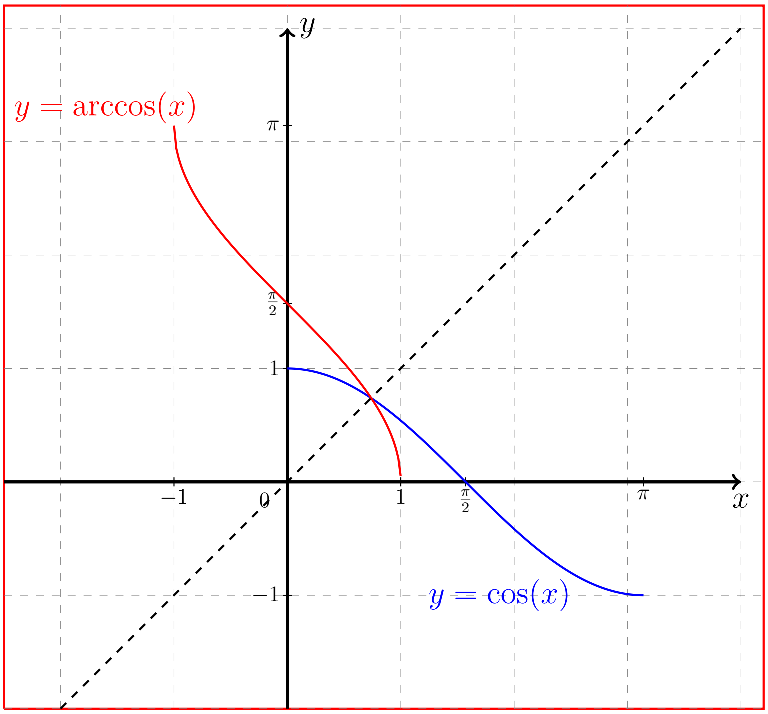

Figure 5.15 – Représentation graphique de la fonction $\arccos(x)$

5.7.3 La fonction arc-tangente

La fonction $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est définie sur $D = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition et pour tout $x \in D$ on a:

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Considérons la réstriction de la fonction $\tan(x)$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, d'après le tableau de variation ci-dessous on a: la fonction $\tan(x)$ est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors la fonction $\tan(x)$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2}$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
$\tan(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Figure 5.16 – La fonction $\tan(x)$

Définition 5.12

On appelle fonction arc-tangente et on note $\arctan(x)$ ou $\tan^{-1}(x)$ la fonction réciproque de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ définie par:

$$\begin{array}{rccl} \arctan : &]-\infty, +\infty[& \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \longmapsto & \arctan(x) \end{array}$$

Proposition 5.24

La fonction $\arctan(x)$ vérifie les propriétés suivantes:

1. La fonction $\arctan(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
2. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[;\ \arctan(\tan(x)) = x$
3. $\forall y \in \mathbb{R};\ \tan(\arctan(y)) = y$.
4. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \forall y \in \mathbb{R};\ \tan(x) = y \Longleftrightarrow x = \arctan(y)$
5. La fonction $\arctan(x)$ est impaire.

Remarque 5.12 *Le tableau ci-dessous contient quelques valeurs usuelles concernant la fonction* $\arctan(x)$

$\tan(0) = 0$	$\arctan(0) = 0$
$\tan(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$
$\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$	$\arctan(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$	$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

Proposition 5.25

La fonction $\arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R};\ (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

Preuve

On a la fonction $\tan(x)$ vérifie les deux propriétés suivantes:

1. La fonction $\tan(x)$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[;\ (\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \neq 0$

D'après la proposition (5.3), la fonction $\arctan(x)$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et on a:

$$\forall x \in \mathbb{R};\ (\arctan(x))' = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$

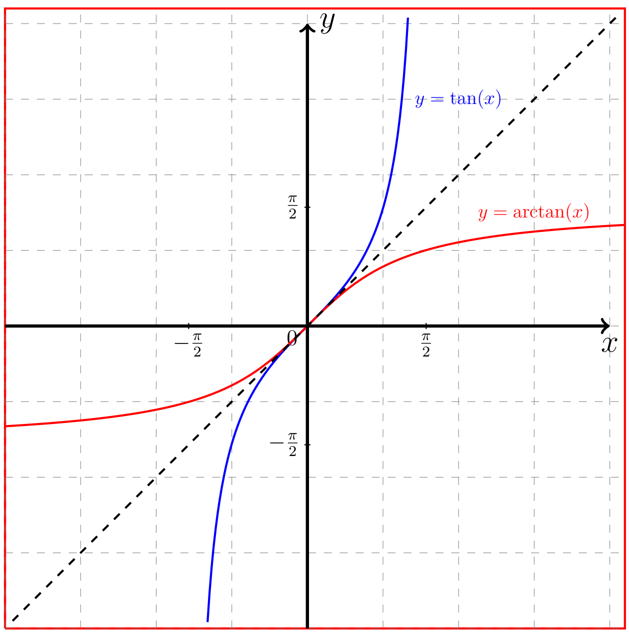

Figure 5.17 – Représentation graphique de la fonction $\arctan(x)$

Proposition 5.26: (Quelques propriétés des fonctions circulaires réciproques)

1. Pour tout $x \in [-1,1]$ on a:
$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$ on a:
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a:
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Preuve

On va démontrer les propriétés (2) et (3).
Posons $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (Puisque les fonctions $\frac{1}{x}$ et $\arctan(x)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$) et on a:
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = 0$$
On en déduit que f est une fonction constante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. D'un autre côté on a:
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$$
et
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$
donc f n'est pas prolongeable par continuité en 0. Donc on en déduit que:
$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ tq:} f(x) = \begin{cases} C_1 & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ C_2 & \text{si } x \in]-\infty,0[\end{cases}$$
Comme $f(1) = 2\arctan(1) = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} = C_1$
et $f(-1) = 2\arctan(-1) = 2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} = C_2$
$$\Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x \in]-\infty,0[\end{cases}$$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$; $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

5.8 Fonctions hyperboliques réciproques

5.8.1 La fonction argument sinus hyperbolique

D'après le tableau de variation de la fonction $\mathrm{sh}(x)$ ci-dessus on a:
$\mathrm{sh}(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.13

On appelle fonction argument sinus hyperbolique et on note $\mathrm{argsh}(x)$ ou $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ la fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique sur $\mathbb{R}$ définie par:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{argsh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{argsh}(x) \end{array}$$

Proposition 5.27

La fonction $\mathrm{argsh}(x)$ vérifie les propriétés suivantes:

1. La fonction $\mathrm{argsh}(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$; $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x))=x$.
3. $\forall y \in \mathbb{R}$; $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(y))=y$.
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $y = \mathrm{sh}(x) \iff x = \mathrm{argsh}(y)$.
5. La fonction $\mathrm{argsh}(x)$ est impaire.

Preuve

On va démontrer que $\mathrm{argsh}(x)$ est impaire.
Soit $x \in \mathbb{R}$, posons:

$$y = \mathrm{argsh}(-x) \tag{5.4}$$

(5.4)$\iff \mathrm{sh}(y) = -x \iff \mathrm{sh}(-y) = x$ (Puisque $\mathrm{sh}(x)$ est impaire)
$\implies -y = \mathrm{argsh}(x) \iff y = -\mathrm{argsh}(x)$.
D'après (5.4) on obtient: $\mathrm{argsh}(-x) = -\mathrm{argsh}(x)$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$; $\mathrm{argsh}(-x) = -\mathrm{argsh}(x) \implies \mathrm{argsh}(x)$ est impaire.

Proposition 5.28

La fonction $\mathrm{argsh}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie:

$$\forall x \in \mathbb{R};\ (\mathrm{argsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Preuve

La fonction $\mathrm{sh}(x)$ vérifie les deux propriétés suivantes:

1. $\mathrm{sh}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}; (\mathrm{sh}(x))' = \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \neq 0$

D'après la proposition (5.3), la fonction $\mathrm{argsh}(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:

$$\forall x \in \mathbb{R};\ (\mathrm{argsh}(x))' = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{argsh}(x))} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))}$$

D'un autre côté on a: $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1 \implies \mathrm{ch}(x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}$ car la fonction $\mathrm{ch}(x)$ est positive.

$$\implies \forall x \in \mathbb{R};\ \mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) = \sqrt{1 + (\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x))^2} = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\implies \forall x \in \mathbb{R};\ (\mathrm{argsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

.

Proposition 5.29

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

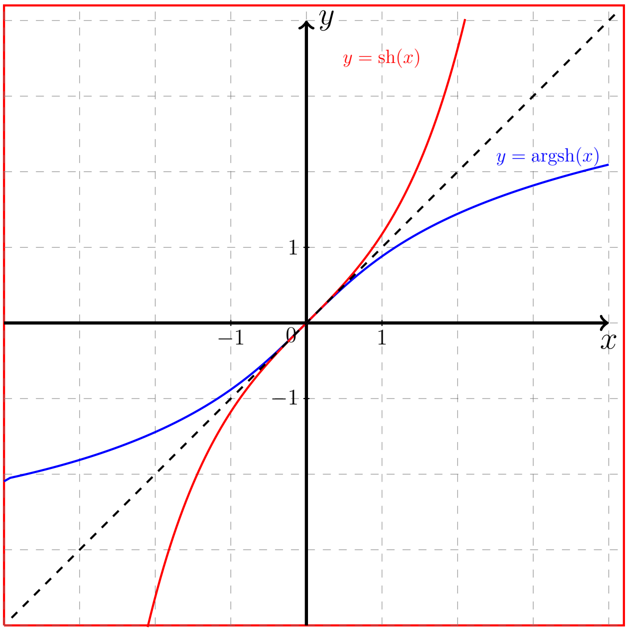

Figure 5.18 – Représentation graphique de la fonction $\mathrm{argsh}(x)$

5.8.2 La fonction argument cosinus hyperbolique

D'après le tableau de variation de la fonction $\text{ch}(x)$ ci-dessus on a:
$\text{ch}(x)$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[1, +\infty[$.

Définition 5.14

On appelle fonction argument cosinus hyperbolique et on note $\text{argch}(x)$ ou $\text{ch}^{-1}(x)$, la fonction réciproque de la restriction de $\text{ch}(x)$ sur $[0, +\infty[$ définie par:

$$\begin{array}{rccc} \text{argch}: & [1, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \text{argch}(x) \end{array}$$

Proposition 5.30

La fonction $\text{argch}(x)$ vérifie les propriétés suivantes:

1. La fonction $\text{argch}(x)$ est définie sur $[1, +\infty[$, elle est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
2. $\forall x \in [0, +\infty[$; $\text{argch}(\text{ch}(x))=x$.
3. $\forall y \in [1, +\infty[$; $\text{ch}(\text{argch}(y))=y$.
4. $\forall x \in [0, +\infty[, \forall y \in [1, +\infty[$; $y = \text{ch}(x) \Longleftrightarrow x = \text{argch}(y)$.

Proposition 5.31

La fonction argument cosinus hyperbolique est dérivable sur $]1, +\infty[$ et vérifie:

$$\forall x \in]1, +\infty[; \ (\text{argch}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Remarque 5.13 *La démonstration de la proposition (5.31) est similaire à celle de la proposition (5.28).*

Proposition 5.32

$$\forall x \in]1, +\infty[; \ \text{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

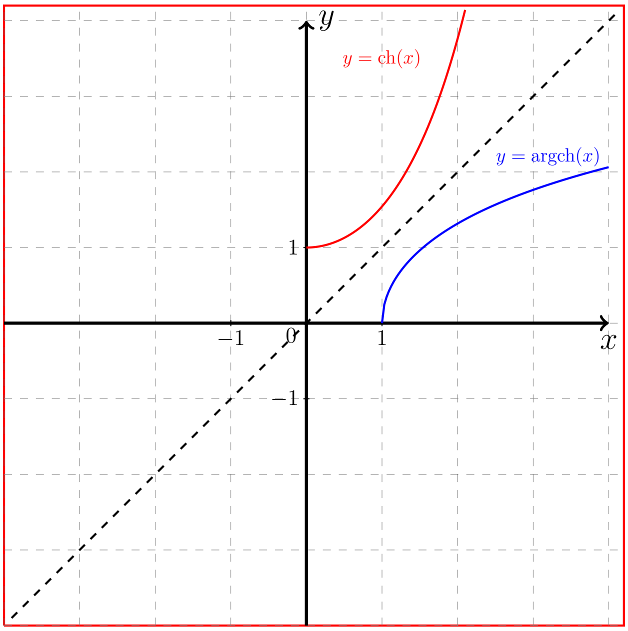

Figure 5.19 – Représentation graphique de la fonction $\mathrm{argch}(x)$

5.8.3 La fonction argument tangente hyperbolique

D'après le tableau de variation de la fonction $\mathrm{th}(x)$ ci-dessus on a:
$\mathrm{th}(x)$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

Définition 5.15

On appelle fonction argument tangente hyperbolique et on note $\mathrm{argth}(x)$ ou $\mathrm{th}^{-1}(x)$, la fonction réciproque de la fonction $\mathrm{th}(x)$ sur $\mathbb{R}$ définie par:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{argth}: &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{argth}(x) \end{array}$$

Proposition 5.33

La fonction $\mathrm{argth}(x)$ vérifie les propriétés suivantes:

1. La fonction $\mathrm{argth}(x)$ est définie sur $]-1,1[$, elle est continue et strictement croissante sur $]-1,1[$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$; $\mathrm{argth}(\mathrm{th}(x)){=}x$.
3. $\forall y \in]-1,1[$; $\mathrm{th}(\mathrm{argth}(y)){=}y$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-1,1[$; $y = \mathrm{th}(x) \Longleftrightarrow x = \mathrm{argth}(y)$.
5. La fonction $\mathrm{argth}(x)$ est impaire.

Proposition 5.34

La fonction argument tangente hyperbolique est dérivable sur $]-1,1[$ et vérifie:

$$\forall x \in]-1,1[; \ (\mathrm{argth}(x))' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Proposition 5.35

$$\forall x \in]-1;1[;\ \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Preuve

Soit $x \in]-1;1[$, posons $y = \operatorname{argth}(x)$.
On a:

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

$$\Longrightarrow\ e^{2y} = \frac{1+\operatorname{th}(y)}{1-\operatorname{th}(y)} = \frac{1+\operatorname{th}(\operatorname{argth}(x))}{1-\operatorname{th}(\operatorname{argth}(x))} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\Longleftrightarrow e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \Longleftrightarrow 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\Longrightarrow\ \forall x \in]-1,1[;\ \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

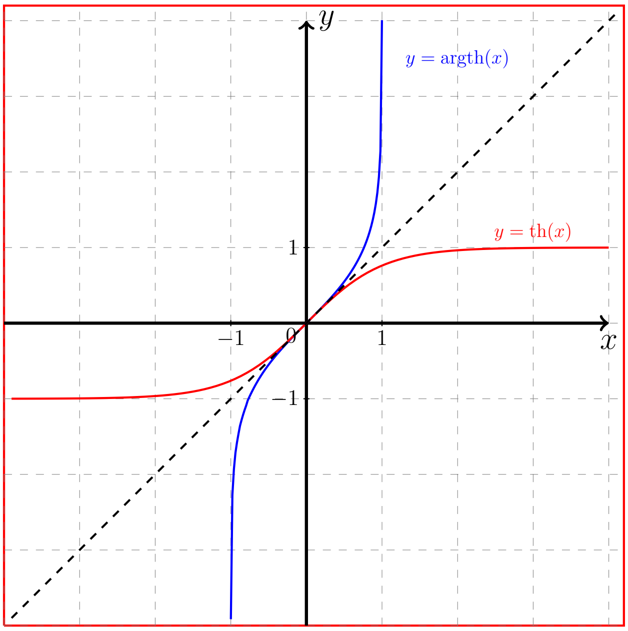

Figure 5.20 – Représentation graphique de la fonction $\operatorname{argth}(x)$