Analyse 02

Université de Batna 02
Faculté des mathématiques et d'informatique
Département Socle Commun MI
1re Année MI

Chapitre02

Intégrales indéfinies-Partie02

Année Universitaire 2021/2022

2. Concernant l'intégral $J = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ on suit la méthode suivante:
   On a:

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] \\ &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

   On effectue un changement de variable avec la manière suivante:

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt \end{cases}$$

   On obtient:

$$J = \int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(t) + c_3$$

   Donc, on remplace t par $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et on obtient:

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c_3$$

$$\implies \int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c/c \in \mathbb{R}$$

6.6 Intégration des fonctions irrationnelles

L'intégration de certaines fonctions irrationnelles peut se transformer à l'aide d'un changement de variable convenable en une intégration d'une fraction rationnelle. Pour un plus de détail sur cette méthode d'intégration nous avons besoin des définitions suivantes.

6.6.1 Polynôme et fraction de deux variables

Définition 6.4

Un pôlynome de deux variables x, y de degré n est défini par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} P(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + ... + a_{n,0}x^n \\ + a_{n-1,1}x^{n-1}y + ... + a_{1,n-1}xy^{n-1} + a_{0,n}y^n \end{aligned}$$

Exemple 6.11

1. Un polynôme de deux variables x, y de degré 1 est défini par:

$$P(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y$$

2. Un polynôme de deux variables x, y de degré 3 est défini par:

$$\begin{aligned} P(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{3,0}x^3 \\ + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3 \end{aligned}$$

Définition 6.5

Le rapport de deux polynômes de variables x, y est appelé fraction rationnelle de deux variables x, y. C-à-d une fraction rationnelle $\mathfrak{R}(x, y)$ de deux variable est définie par:

$$\mathfrak{R}(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Avec $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont deux polynômes de deux variables x, y.

Exemple 6.12

1. $\mathfrak{R}(x, y) = \dfrac{x + xy^2 + y + 5}{x^3y + y^2 + 1}$
2. Si on a: $\mathfrak{R}(x, y) = \dfrac{x + xy + 1}{x + 4xy + 1}$, alors $\mathfrak{R}(x, \sqrt{x^2 + 1}) = \dfrac{x + x\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x + 4x\sqrt{x^2 + 1} + 1}$
3. Si on a: $\mathfrak{R}(x, y) = \dfrac{x^2 + xy + 1}{x + 4xy + 1}$, alors:

$$\mathfrak{R}(\cos(x), \sin(x)) = \frac{\cos^2(x) + \cos(x)\sin(x) + 1}{\cos(x) + 4\cos(x)\sin(x) + 1}$$

Remarque 6.7 *La fraction $\mathfrak{R}(x, \sqrt{x^2 + 1})$ est une fonction irrationnelle de la variable x.*

6.6.2 Calcul des intégrales de type: $\displaystyle\int \mathfrak{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}}\right) \mathrm{d}x / \; a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

Dans ce cas on suit les étapes suivantes:

1. Posons $t = \sqrt[n]{\dfrac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}} \implies t^n = \dfrac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}$

   Après calcul, on obtient: $x = \dfrac{b_2t^n - b_1}{a_1 - a_2t^n}$
2. Donc

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{b_2t^n - b_1}{a_1 - a_2t^n}\right)' \mathrm{dt} = \frac{nb_2(a_1 - a_2t^n)t^{n-1} + na_2(b_2t^n - b_1)t^{n-1}}{(a_1 - a_2t^n)^2}\mathrm{dt}$$

$$\implies \mathrm{d}x = \frac{n(a_1b_2 - a_2b_1)t^{n-1}}{(a_1 - a_2t^n)^2}\mathrm{dt}$$

3. En remplaçant x par $\dfrac{b_2t^n - b_1}{a_1 - a_2t^n}$ et $\mathrm{d}x$ par $\dfrac{n(a_1b_2 - a_2b_1)t^{n-1}}{(a_1 - a_2t^n)^2}\mathrm{dt}$ dans l'intégrale et on obtient:

$$\int \mathfrak{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}}\right) \mathrm{d}x = \int R(t)\,\mathrm{dt}$$

   Avec $R(t)$ est une fraction rationnelle en t.
4. Enfin, on calcule l'intégrale $\displaystyle\int R(t)\,\mathrm{dt}$ puis on remplace dans le résultat t par $\sqrt[n]{\dfrac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}}$.

Exemple 6.13

Calculer $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,\mathrm{d}x$.

Solution:

On remarque que cette intégrale est de type: $\displaystyle\int \mathfrak{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}}\right)\mathrm{d}x$ avec:

$n = 2,\ a_1 = 1,\ b_1 = 4,\ a_2 = 0,\ b_2 = 1$ et $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

Donc on va suivre les étapes suivantes:

1. Posons $t = \sqrt{x+4} \implies t^2 = x+4 \implies x = t^2 - 4$
2. D'après l'étape précédente dx=2tdt
3. En remplaçant dans l'intégrale et on obtient:

$$I = \int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,\mathrm{d}t \tag{6.2}$$

4. On calcule l'intégrale $\displaystyle\int \frac{t^2}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$ en utilisant la méthode de décomposition des fractions rationnelles. On a:

$$\begin{aligned}\frac{t^2}{t^2-4} &= \frac{t^2 - 4 + 4}{t^2-4} = 1 + \frac{4}{t^2-4}\\ &= 1 + \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\end{aligned}$$

$$\implies \int \frac{t^2}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t + \int \frac{1}{t-2}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t+2}\,\mathrm{d}t$$

$$(6.2) \implies I = 2\int \frac{t^2}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = 2t + 2\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + c/c \in \mathbb{R}.$$

5. Enfin, on remplace dans le résultat t par $\sqrt{x+4}$ et on obtient:

$$I = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + c/c \in \mathbb{R}$$

Remarque 6.8 *On peut généraliser la méthode précédente pour calculer des intégrales de type:*

$$\int \mathfrak{R}(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{m_2}}, ..., \sqrt[n_k]{\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{m_k}})\,\mathrm{d}x\ /a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$

Si en posant: $t^\alpha = \dfrac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}$ *tq:* $\alpha = PPCM(n_1, n_2, ..., n_k)$
($PPCM(n_1, n_2, ..., n_k)$ *est le plus petit commun multiple de* $n_1, n_2, ..., n_k$*)*

Exemple 6.14

Caculer $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,\mathrm{d}x$

Solution:

On remarque que cette intégrale est de type:

$$\int \mathfrak{R}\left(x,\ \sqrt[n_1]{\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{m_1}},\ \sqrt[n_2]{\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{m_2}}\right)\mathrm{d}x$$

Avec: $n_1 = 2, n_2 = 4, m_1 = 1, m_2 = 3$ et $a_1 = 1, b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 0$ tq: $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

On a: α =PPCM$(2,4) = 4$, donc on effectue un changement de variable avec la manière suivante:

$$t^4 = x \implies \mathrm{d}x = 4t^3\mathrm{d}t$$

En remplaçant dans l'intégrale I on obtient:

$$I = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$$

Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int \frac{t^5}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$ par la méthode de décomposition

On a:

$$\frac{t^5}{t^3+1} = t^2 - \frac{t^2}{t^3+1}$$

$$\implies \int \frac{t^5}{t^3+1}\,\mathrm{d}t = \int t^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int \frac{3t^2}{t^3+1}\,\mathrm{d}t$$

$$\implies I = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + c/c \in \mathbb{R}$$

Enfin, on remplace t par $\sqrt[4]{x}$ et on obtient:

$$I = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\ln|x^{\frac{3}{4}}+1| + c/c \in \mathbb{R}$$

6.6.3 Calcul des intégrales de type: $\displaystyle\int \mathfrak{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x / a \neq 0$

Pour calculer ce genre d'intégrales il y a une méthode générale qui s'appelle méthode de substitution d'Euler. Le principe de cette méthode est basé sur la transformation de l'intégrale $\displaystyle\int \mathfrak{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ en une intégrale d'une fraction rationnelle à l'aide des trois types de changements de variable suivants:

1. **1er cas si** $a > 0$
   On effectue un changement de variable suivant:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x \quad \text{ou} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$$

   Étudions la cas $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$

$$\implies ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}tx + ax^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = \frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}}$$

$$\text{donc,} \quad \mathrm{d}x = \left(\frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}\right)' \mathrm{d}t = \frac{2t^2\sqrt{a} + 2bt + 2\sqrt{a}c}{(b + 2t\sqrt{a})^2}\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{d}x = 2\left(\frac{t^2\sqrt{a} + bt + \sqrt{a}c}{(b + 2t\sqrt{a})^2}\right)\mathrm{d}t}$$

$$\text{Enfin;} \ \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x = t - \sqrt{a}\left(\frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + \sqrt{a}c}{2t\sqrt{a} + b}}$$

En remplaçant les expressions de $x, \mathrm{d}x$ et $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ dans l'intégrale et on obtient une intégrale de type: $\displaystyle\int R(t)\,\mathrm{d}t$ où $R(t)$ est une fraction rationnelle. Pour revenir à x dans le résultat obtenu, on remplace t par $\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x$

Exemple 6.15

Calculer $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}\,\mathrm{d}x$

Solution:

Posons:

$$\sqrt{x^2 + 9} = t - x \Longrightarrow x^2 + 9 = t^2 - 2tx + x^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = \frac{t^2 - 9}{2t}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{d}x = \left(\frac{t^2 + 9}{2t^2}\right)\mathrm{d}t}$$

On a: $\sqrt{x^2 + 9} = t - x$ alors:

$$\sqrt{x^2 + 9} = t - \frac{t^2 - 9}{2t} \Longrightarrow \boxed{\sqrt{x^2 + 9} = \frac{t^2 + 9}{2t}}$$

En remplaçant dans l'intégrale on obtient:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{(t^2 - 9)^2}{t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int t\,\mathrm{d}t - \frac{18}{4}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \frac{81}{4}\int \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{8}t^2 - \frac{18}{4}\ln|t| - \frac{81}{8t^2} + c/c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On remplace t par $\sqrt{x^2 + 9} + x$ et on obtient:

$$I = \frac{1}{8}(\sqrt{x^2 + 9} + x)^2 - \frac{18}{4}\ln|\sqrt{x^2 + 9} + x| - \frac{81}{8(\sqrt{x^2 + 9} + x)^2} + c/c \in \mathbb{R}$$

2. **2ème cas si** $c > 0$
On effectue un changement de variable suivant:

Posons $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$ ou $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt-\sqrt{c}$

On va étudier le cas: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$
En suivant la même procédure précédente on obtient:

$$\boxed{x = \frac{2\sqrt{c}-b}{a-t^2}}, \quad \boxed{\mathrm{d}x = 2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}\mathrm{dt}}, \quad \text{et} \quad \boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2-bt+\sqrt{c}}{a-t^2}}$$

En remplaçant les expressions de $x, \mathrm{d}x$ et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ dans l'intégrale et on obtient une intégrale de type: $\displaystyle\int R(t)\,\mathrm{dt}$ où $R(t)$ est une fraction rationnelle. Pour revenir à x dans le résultat obtenu, on remplace t par $\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$ (supposons que $x \neq 0$).

Exemple 6.16

Calculer $I = \displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{d}x$

Solution:

On a: I est de type $\displaystyle\int \mathfrak{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ avec $c > 0$.

Posons:

$$\sqrt{x^2-x+1} = xt+1$$

$$\Longrightarrow x = \frac{2t+1}{1-t^2}, \ \mathrm{d}x = \frac{2(t^2+t+1)}{(1-t^2)^2}\mathrm{dt}, \ \text{et } \sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2+t+1}{1-t^2}$$

En remplaçant dans I, on obtient:

$$I = \int \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\ln|2t+1| + c/c \in \mathbb{R}$$

On remplace dans le résultat t par $\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{x}/x \neq 0$ et on obtient:

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sqrt{x^2-x+1}-2+x}{x}\right| + c/c \in \mathbb{R}$$

3. **3ème cas si $\Delta = b^2-4ac > 0$**
Dans ce cas le trinôme ax^2+bx+c admet deux racines $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et $x_1 \neq x_2$, donc on peut écrire: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. Alors on pose:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-x_1) \quad \text{ou} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x-x_2)$$

On va étudier le cas: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$

$$\Longrightarrow ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) = t^2(x-x_1)^2$$

$$\Longrightarrow a(x-x_2) = t^2(x-x_1)$$

$$\Longrightarrow x = \frac{ax_2-x_1t^2}{a-t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2a(x_1-x_2)t}{(a-t^2)^2}\mathrm{dt}, \quad \text{et} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(x_2-x_1)t}{a-t^2}$$

En remplaçant les expressions de $x, \mathrm{d}x$ et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ dans l'intégrale et on obtient une intégrale de type: $\displaystyle\int R(t)\,\mathrm{dt}$ où $R(t)$ est une fraction rationnelle. Pour revenir à x dans le résultat obtenu, on remplace t par $\dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}$

Exemple 6.17

Calculer $I = \int \sqrt{2x - x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution:

On a: $2x - x^2 = x(2-x)$ c-à-d le polynôme $2x - x^2$ admet deux racines $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$

Posons:

$$\sqrt{2x - x^2} = xt$$

$$\Longrightarrow\ 2x - x^2 = x^2t^2 \ \Longrightarrow\ x = \frac{2}{t^2+1},\ \mathrm{d}x = -\frac{4t}{(t^2+1)^2}\mathrm{dt};\ \text{et } \sqrt{2x-x^2} = \frac{2t}{t^2+1}$$

On remplaçant dans I on obtient:

$$I = -8\int \frac{t^2}{(t^2+1)^3}\,\mathrm{dt}$$

D'un autre côté on a :

$$\frac{t^2}{(t^2+1)^3} = \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{(t^2+1)^2} - \frac{1}{(t^2+1)^3}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{t^2}{(t^2+1)^3}\mathrm{dt} = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}\mathrm{dt} - \int \frac{1}{(t^2+1)^3}\mathrm{dt}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{t^2}{(t^2+1)^3}\mathrm{dt} = J_2 - J_3$$

D'après la formule de récurrence précédente on a:

$$\begin{cases} J_1 = \arctan(t) + c/c \in \mathbb{R} \\ J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}J_n + \frac{t}{2n(t^2+1)^n} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} J_2 = \frac{1}{2}J_1 + \frac{t}{2(t^2+1)} \\ J_3 = \frac{3}{4}J_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow J_2 - J_3 = \frac{1}{4}J_2 - \frac{t}{4(t^2+1)^2}$$

$$\Longrightarrow J_2 - J_3 = \frac{1}{8}\arctan(t) + \frac{t}{8(t^2+1)} - \frac{t}{4(t^2+1)^2} + c/c \in \mathbb{R}$$

Enfin on obtient:

$$I = -8(J_2 - J_3) = -\arctan(t) - \frac{t}{t^2+1} + \frac{2t}{(t^2+1)^2} + k/k \in \mathbb{R}$$

6.7 Intégration des fonctions trigonométriques

Dans le calcul des intégrales des fonctions trigonométriques on distingues les cas suivants:

6.7.1 Intégrales de type $\int R(\cos(x))\sin(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int R(\sin(x))\cos(x)\,\mathrm{d}x$ avec $R(x)$ est une fraction rationnelle

- Si on a: $I = \int R(\cos(x))\sin(x)\,\mathrm{d}x$ on effectue un changement de variable de la forme:

$$t = \cos(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}t = -\sin(x)\mathrm{d}x$$

- Si on a: $I = \int R(\sin(x))\cos(x)\,\mathrm{d}x$ on effectue un changement de variable de la forme:

$$t = \sin(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}t = \cos(x)\mathrm{d}x$$

Exemple 6.18

Calculer $I = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$

Solution:

On a: $\frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1-\sin^2(x)}{\sin^2(x)}\cos(x) \implies I$ est de type $\int R(\sin(x))\cos(x)\,\mathrm{d}x$

Donc on effectue un changement de variable suivant:

$$t = \sin(x) \implies \mathrm{d}t = \cos(x)\mathrm{d}x$$

$$\implies I = \int \frac{1-t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t - \int \mathrm{d}t$$

$$\implies I = -\frac{1}{t} - t + c / c \in \mathbb{R}$$

Enfin, si on remplace t par $\sin(x)$ on obtient:

$$I = -\frac{1}{\sin(x)} - \sin(x) + c / c \in \mathbb{R}$$

6.7.2 Intégrales de type $\int \mathfrak{R}(\cos(x), \sin(x))\,\mathrm{d}x$

Dans ce genre d'intégrales on peut faire le changement de variable suivant:
Posons

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \sin(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ \text{et} \quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

En remplaçant les expressions $\mathrm{d}x$, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ dans l'intégrale et on obtient une intégrale de type: $\int R(t)\,\mathrm{d}t$ où $R(t)$ est une fraction rationnelle. Pour revenir à x dans le résultat obtenu, on remplace t par $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Preuve

1. Si on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ alors $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1 + t^2\right)\mathrm{d}x$
$$\implies \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$
2. On a: $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \implies \sin(x) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$
D'un autre côté $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \implies \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{t^2+1}$
$\implies \sin(x) = \dfrac{2t}{t^2+1}$
3. On a: $\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$
$\implies \cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Exemple 6.19

Calculer $I = \displaystyle\int \frac{1}{1-\cos(x)}\,\mathrm{d}x$
Posons: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t}$ et $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$
En remplaçant dans I on obtient:
$$I = \int \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} + c/c \in \mathbb{R}$$
. Enfin on remplace t par $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on obtient:
$$I = -\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + c/c \in \mathbb{R}$$