Analyse 02

Université de Batna 02

Faculté des mathématiques et d'informatique

Département Socle Commun MI

1^{re}Année MI

Chapitre03

Intégrales définies

Année Universitaire 2021/2022

Chapitre 7

Intégrales définies

Sommaire

7.1 Introduction 1
7.2 Subdivisions et sommes de Darboux 2
7.3 Fonctions intégrables 5
7.4 Propriétés des intégrales définies 12
7.5 Primitive et intégrale définie en fonction de sa borne supérieure 14
7.6 Procédés généraux d'intégration 15

7.1 Introduction

Ce chapitre contient la méthode de construction de l'intégrale définie (ou de Riemann) d'une fonction f définie et bornée dans un intervalle de type $[a, b]$ et ses propriétés fondamentales. Géométriquement, la notion de l'intégrale définie d'une fonction f continue et positive sur $[a, b]$ est interprété comme une mesure de la portion de plan comprise entre (Γ_f) la courbe de la fonction f, l'axe des x et les droites $x = a$, $x = b$.

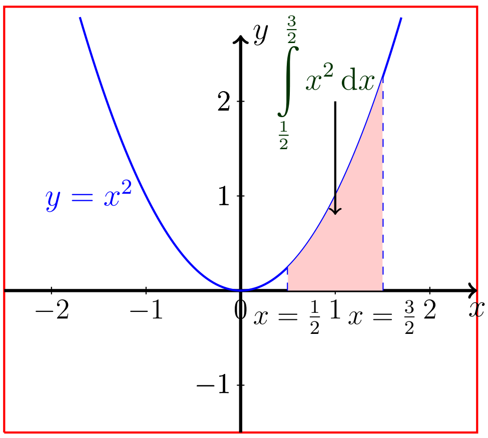


Figure 7.1 – *Interprétation géométrique de l'intégrale définie de $f(x) = x^2$ sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$*

7.2 Subdivisions et sommes de Darboux

7.2.1 Subdivision d'un intervalle

Définition 7.1

On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$, toute suite finie $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de réels vérifiant les conditions suivantes:

1. $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$; $x_i \in [a, b]$
2. $x_0 = a$ et $x_n = b$
3. $a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b$

Remarques:

1. Soit $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ alors, P contient $n+1$ points (appelés noeuds de la subdivision P) et détermine n intervalle $[x_{i-1}, x_i]/i \in \{1...., n\}$
2. Le réel $h = \max\limits_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1})$ est appelé le pas de la subdivision P
3. Soient $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ et $P' = \{x'_0, x'_1, ..., x'_m\}$ deux subdivisions de l'intervalle $[a, b]$. On dit que P' est plus fine que P si:
$$\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset \{x'_0, x'_1, ..., x'_m\}$$

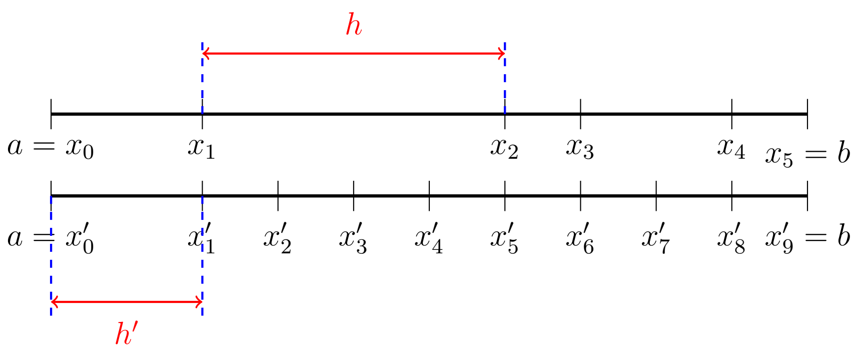


Figure 7.2 – $P = \{x_0, x_1, ..., x_5\}$ *et* $P' = \{x'_0, x'_1, ..., x'_9\}$ *deux subdivision de* $[a, b]$

Remarque 7.1 *Dans la figure ci-dessus on a:*

- P *est une subdivision de l'intervalle* $[a, b]$ *avec un pas* h
- P' *est aussi une subdivision de l'intervalle* $[a, b]$ *avec un pas* h'

On remarque que: $P \subset P'$ *et* $h' < h$ *donc dans ce cas* P' *est plus fine que* P

Exemple 7.1

Soit $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ définie par:
$$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)/k = 0, ..., n$$

Dans ce cas P est appelées subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ avec un pas $h = \frac{b-a}{n}$

7.2.2 Sommes de Darboux

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a, b]$ (c-à-d $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$) et $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$.
Posons:

$$\begin{cases} m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \\ M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \end{cases} \quad \text{avec} \quad k = 1, ..., n$$

Définition 7.2

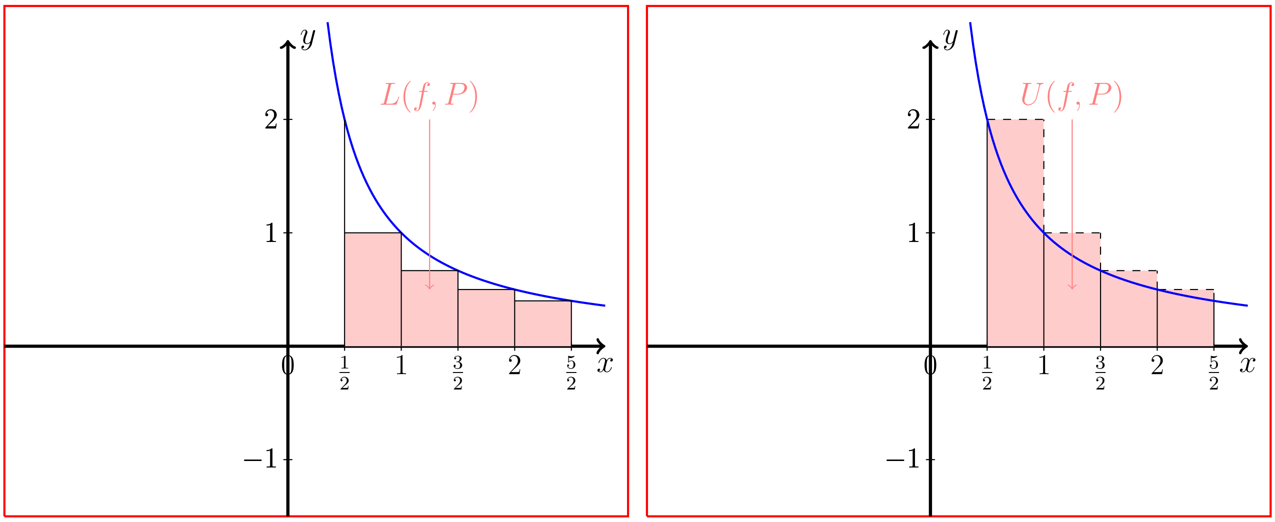
On appelle

1. Somme de Darboux inférieure associée à f et P le nombre

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^{k=n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

2. Somme de Darboux supérieure associée à f et P le nombre

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{k=n} M_k(x_k - x_{k-1})$$



(a) $L(f, P)$ *avec* $f(x) = \frac{1}{x}$ *et* $P = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\}$ (b) $U(f, P)$ *avec* $f(x) = \frac{1}{x}$ *et* $P = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\}$

Figure 7.3 – *Sommes de Darboux*

7.2.3 Propriétés des sommes de Darboux

Proposition 7.1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, les sommes de Darboux vérifient les propriétés suivantes:

1. Pour toute subdivision P de l'intervalle $[a, b]$ on a: $L(f, P) \leq U(f, P)$.
2. soient P et P' deux subdivisions de $[a, b]$ tq: $P \subset P'$, alors

$$\begin{cases} U(f, P) \geq U(f, P') \\ L(f, P) \leq L(f, P') \end{cases}$$

3. Si P et P' sont deux subdivisions quelconques de $[a, b]$, alors

$$L(f, P) \leq U(f, P')$$

4. Soit P une subdivision de $[a, b]$, Posons: $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, alors:

$$m(b - a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b - a)$$

Preuve

1. On va démontrer (3).
   On a P et P' sont deux subdivisions de $[a, b]$ alors, $P \cup P'$ est une subdivision de $[a, b]$ plus fine que P et P'. D'après (1) et (2) on obtient:

$$L(f, P) \leq L(f, P \cup P') \leq U(f, P \cup P') \leq U(f, P')$$

$$\Longrightarrow L(f, P) \leq U(f, P')$$

2. Démonstration de (4).

   (a) Soit $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ on a:

$$\forall k \in \{1, ..., n\};\ [x_k, x_{k-1}] \subset [a, b] \Longrightarrow m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \inf_{x \in [x_k, x_{k-1}]} f(x) = m_k$$

$$\Longrightarrow \forall k \in \{1, ..., n\};\ m(x_k - x_{k-1}) \leq m_k(x_k - x_{k-1})$$

   Donc,

$$\sum_{k=1}^{k=n} m(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{k=n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

$$\Longrightarrow m \sum_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) \leq L(f, P) \Longrightarrow m(b - a) \leq L(f, P)$$

   (Puisque $\sum\limits_{k=1}^{k=n} (x_k - x_{k-1}) = b - a$)

   (b) D'après (1) on a: $L(f, P) \leq U(f, P)$

   (c) On a: $U(f, P) \leq M(b - a)$ la démonstration est similaire à (a).

Notations: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée

1. On note par $S_{[a,b]}$ l'ensemble de toutes les subdivision de l'intervalle $[a, b]$
2. On note par $U_{[a,b]}(f)$ l'ensemble constitué de toutes les sommes de Darboux supérieures associées à f obtenues avec toutes les subdivisions possibles de $[a, b]$ c-à-d:

$$U_{[a,b]}(f) = \{U(f, P)/P \in S_{[a,b]}\}$$

3. On note par $L_{[a,b]}(f)$ l'ensemble constitué de toutes les sommes de Darboux inférieures associées à f obtenues avec toutes les subdivisions possibles de $[a, b]$ c-à-d:

$$L_{[a,b]}(f) = \{L(f, P)/P \in S_{[a,b]}\}$$

Proposition 7.2

Si f est une fonction bornée sur $[a, b]$ alors:

$$\sup\left(L_{[a,b]}(f)\right) \leq \inf\left(U_{[a,b]}(f)\right)$$

Preuve

1. Les ensembles $L_{[a,b]}(f)$ et $U_{[a,b]}(f)$ sont non vides.
2. On a:

$$\forall P, P' \in S_{[a,b]};\ L(f, P) \leq U(f, P')$$

$\Longrightarrow$ Les éléments de $U_{[a,b]}(f)$ sont des majorants de $L_{[a,b]}(f)$

$$\Longrightarrow \forall U(f, P') \in U_{[a,b]}(f);\ \sup\left(L_{[a,b]}(f)\right) \leq U(f, P')$$

Donc $\sup\left(L_{[a,b]}(f)\right)$ est un minorant de $U_{[a,b]}(f)$

$$\Longrightarrow \sup\left(L_{[a,b]}(f)\right) \leq \inf\left(U_{[a,b]}(f)\right)$$

7.3 Fonctions intégrables

7.3.1 Intégrale inférieure et supérieure de f sur $[a, b]$

Définition 7.3

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée

- On note par $U_a^b(f)$ l'intégrale supérieure de f sur $[a, b]$ définie par:

$$U_a^b(f) := \inf\left(U_{[a,b]}(f)\right)$$

- On note par $L_a^b(f)$ l'intégrale inférieure de f sur $[a, b]$ définie par:

$$L_a^b(f) := \sup\left(L_{[a,b]}(f)\right)$$

7.3.2 Fonctions intégrables au sens de Riemann

Définition 7.4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si:

$$U_a^b(f) = L_a^b(f)$$

dans ce cas la valeur commune de $U_a^b(f)$ et $L_a^b(f)$ est appelée intégrale définie (de Riemann) de f sur $[a, b]$ et notée

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

On note par $\mathcal{R}([a, b])$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a, b]$.

Remarques:

1. a et b sont appelés les bornes de l'intégrale.
2. Le nombre $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend pas de x (x est dite variable muette), il dépend de a et b c-à-d on peut remplacer x par n'importe quelle autre lettre y, t, u....

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 7.2

Soit f la fonction définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R};\; f(x) = c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ tq: $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Solution:

1. Soit $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in S_{[a,b]}$ (une subdivision de $[a, b]$), on a:

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n\};\; \begin{cases} m_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = c \\ \quad\text{et} \\ M_k = \sup\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = c \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U(f, P) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} M_k(x_k - x_{k-1}) = c\sum\limits_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1}) = c(b-a) \\ \quad\text{et} \\ L(f, P) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k(x_k - x_{k-1}) = c\sum\limits_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1}) = c(b-a) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \forall U(f,P) \in U_{[a,b]}(f);\ U(f,b) = c(b-a) \\ \quad \text{et} \\ \forall L(f,P) \in L_{[a,b]}(f);\ L(f,b) = c(b-a) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U_a^b(f) = \inf\left(U_{[a,b]}(f)\right) = c(b-a) \\ \quad \text{et} \\ L_a^b(f) = \sup\left(L_{[a,b]}(f)\right) = c(b-a) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow U_a^b(f) = L_a^b(f)$$

donc f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

2. On a f est intégrable sur $[a,b]$ donc

$$U_a^b(f) = L_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$$

Exemple 7.3

Soit f une fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.
($[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$).

Solution:

Soit $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \in S_{[a,b]}$ (une subdivision de $[a,b]$), on a:

$$\forall k \in \{1,2,...,n\};\ \begin{cases} m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = 0 \\ \quad \text{et} \\ M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U(f,P) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum\limits_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1}) = (b-a) \\ \quad \text{et} \\ L(f,P) = \sum\limits_{k=1}^{k=n} m_k(x_k - x_{k-1}) = 0\sum\limits_{k=1}^{k=n}(x_k - x_{k-1}) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \forall U(f,P) \in U_{[a,b]}(f);\ U(f,b) = (b-a) \\ \quad \text{et} \\ \forall L(f,P) \in L_{[a,b]}(f);\ L(f,b) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} U_a^b(f) = \inf\left(U_{[a,b]}(f)\right) = (b-a) \\ \quad \text{et} \\ L_a^b(f) = \sup\left(L_{[a,b]}(f)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow U_a^b(f) \neq L_a^b(f)$$

donc f n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

Théorème 7.1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour que f soit intégrable sur $[a,b]$ il faut, et il suffit, que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in S_{[a,b]};\ U(f,d) - L(f,d) < \varepsilon$$

Preuve

1. Supposons que f est intégrable sur $[a,b]$ donc

$$U_a^b(f) = L_a^b(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{tq: } \begin{cases} U_a^b(f) = \inf\{U(f,P)/P \in S_{[a,b]}\} \\ L_a^b(f) = \sup\{L(f,P)/P \in S_{[a,b]}\} \end{cases}$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0;\ \begin{cases} \exists P_1 \in S_{[a,b]};\ U(f,P_1) < U_a^b(f) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists P_2 \in S_{[a,b]};\ L_a^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_2) \end{cases}$$

Posons $P = P_1 \cup P_2$, alors $P_1 \subset d$ et $P_2 \subset d$, d'après les propriétés des sommes de Darboux on a:

$$\begin{cases} U(f,P) \leq U(f,P_1) \\ \qquad \wedge \\ L(f,P_2) \leq L(f,P) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists d \in S_{[a,b]};\ \begin{cases} U(f,P) < U_a^b(f) + \frac{\varepsilon}{2} \\ L_a^b(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P) \end{cases}$$

En sommant et on obtient:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in S_{[a,b]};\ U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

Donc, $(f \in \mathcal{R}([a,b]) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P \in S_{[a,b]};\ U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon)$ est vraie.

2. D'après la proposition (7.2) on a: $L_a^b(f) \leq U_a^b(f)$.
Supposons que $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in S_{[a,b]};\ U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$

$$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists P \in S_{[a,b]};\ U(f,P) - \varepsilon < L(f,P) \leq U(f,P)$$

Donc $U(f,P) = \sup\left(L_{[a,b]}(f)\right) = L_a^b(f)$.
D'un autre côté on a aussi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in S_{[a,b]};\ L(f,p) \leq U(f,P) < L(f,P) + \varepsilon$$

Donc $L(f,P) = \inf\left(U_{[a,b]}(f)\right) = U_a^b(f) \Longrightarrow U_a^b \leq L_a^b$.
Finalement on obtient $(U_a^b \leq L_a^b) \wedge (L_a^b \leq U_a^b) \Longrightarrow U_a^b = L_a^b$, donc $f \in \mathcal{R}([a,b])$.
Donc l'implication inverse est vraie

7.3.3 Sommes de Riemann

Définition 7.5

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ avec un pas h et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ des nombres réels tq: $\forall i = \overline{1, n};\ \alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$
Posons:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1})$$

Le nombre $S(f, P)$ est appelé somme de Riemann correspond à la subdivision P et au système de points $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$

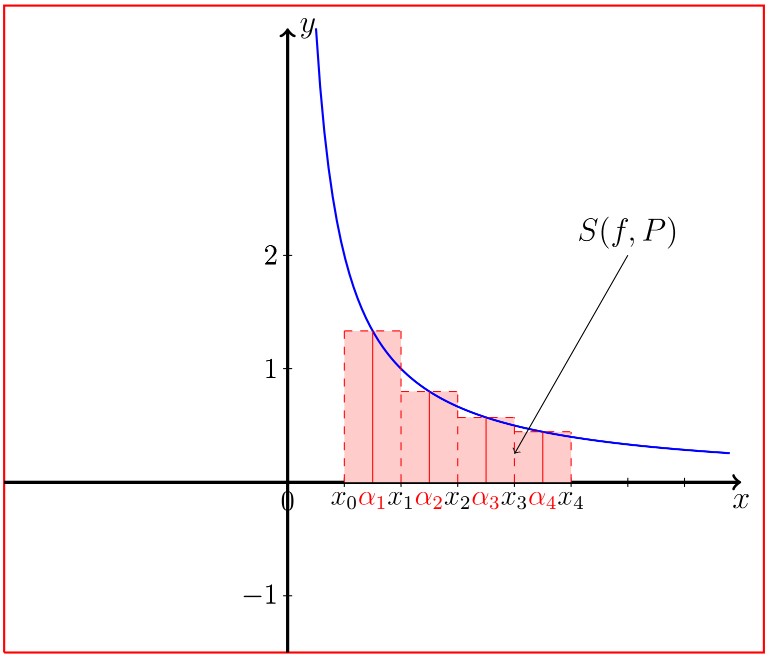


Figure 7.4 – *Somme de Riemann de* $f(x) = \frac{1}{x}$ *correspond à la subdivision* $P = \{x_0, x_1, x_3, x_4\}$ *et au système de points* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$

Théorème 7.2

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ alors:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h \to 0} S(f, P)$$

Remarque 7.2 *$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ est une subdivision de $[a, b]$ avec un pas h.*

Exemple 7.4

Si on suppose $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ la subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ définie par:

$$x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right) /k \in \{0, 1, ..., n\} \text{ et avec le pas } h = \frac{b-a}{n}$$

alors:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

7.3.4 Exemples des fonctions intégrables

Théorème 7.3

Toute fonction f monotone sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$

Preuve

Dans notre preuve on suppose que f est croissante (même technique de démonstration dans le cas f est décroissante). Soit $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ avec un pas h. On a f est croissante alors:

$$\forall k \in \{1, 2..., n\}; \begin{cases} m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = f(x_{k-1}) \\ M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) = f(x_k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow U(f, d) - L(f, d) = \sum_{k=1}^{n}(f(x_k - f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) &\leq h\sum_{k=1}^{n}(f(x_k - f(x_{k-1}) \\ &\leq h(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, si on choisit une subdivision avec un pas $h < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ on obtient:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists P \in S_{[a,b]} \implies U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$$

avec (P est une subdivision de $[a, b]$ avec un pas h, tq: $h < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$)

Donc f est intégrable sur $[a, b]$.

Théorème 7.4

Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

Exemple 7.5

1. Montrer que $f(x) = e^x$ est intégrable sur $[a, b]$.
2. En utilisant la somme de Riemann, montrer que:

$$\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = e - 1$$

Solution:

1. On a: $f(x) = e^x$ est continue sur $[0,1]$, donc f est intégrable sur $[0,1]$ (d'après le théorème précédent).
2. Si on choisit la subdivision uniforme suivante de $[0,1]$:

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\} \text{ tq: } x_k = \frac{k}{n} / k = \overline{1, n} \text{ et } h = \frac{1}{n}$$

d'après la somme de Riemann correspond à P on a:

$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \right)$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} \right) &= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + ... + e^{\frac{n}{n}} \right) \right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} \frac{e^{\frac{n}{n}} - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \right) \\
&= \lim_{n \to +\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} \frac{e^{\frac{n}{n}} - 1}{\frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} \right) = e - 1
\end{aligned}$$

7.4 Propriétés des intégrales définies

Proposition 7.3

Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$ alors on a:

1. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$
4. Si on a: $\forall x \in [a,b];\ f(x) \geq 0$ alors:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$
5. Si on a: $\forall x \in [a,b];\ f(x) \leq g(x)$ alors:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
6. Pour tout réel $c \in]a,b[$ la fonction f est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$, et de plus
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(relation de Chasles)}$$
7. Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur $[a,b]$ et
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$
8. $\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

7.4.1 Formules de la moyenne

Théorème 7.5: (Théorème de la moyenne)

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, avec g ayant un signe constant dans $[a,b]$ (c-à-d $g \geq 0$ ou $g \leq 0$ sur $[a,b]$), alors il existe un nombre $\mu \in [m,M]$ tq:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Avec $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.
Si de plus, si f est continue il existe $\xi \in [a,b]$ tq: $\mu = f(\xi)$.

Remarque 7.3 *Si g=1, alors on a:*

$$\exists \mu \in [m,M];\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a)$$

Avec: $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ *et* $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

Exemple 7.6

Soit l'intégrale $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer qu'il existe un nombre $\mu \in [0,1]$ tq:

$$I = \mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Solution:
Posons $f(x) = g(x) = \cos(x)$, on a:

$$\begin{cases} \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];\ \cos(x) \geq 0 \\ \qquad \text{et} \\ m = \inf_{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} f(x) = 0 \text{ et } M = \sup_{x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} f(x) = 1 \end{cases}$$

D'après le théorème de la moyenne

$$\exists \mu \in [m,M];\ I = \mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x \implies \exists \mu \in [0,1];\ I = \mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

7.5 Primitive et intégrale définie en fonction de sa borne supérieure

Définition 7.6

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, on pose:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

On appelle $\Phi(x)$ l'intégrale de f définie en fonction de sa borne supérieure.

Proposition 7.4

Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors:

1. Φ est continue dans $[a,b]$
2. Si f est continue sur $[a,b]$, alors Φ est dérivable sur $[a,b]$ et de plus:

$$\forall x \in [a,b];\ \Phi'(x) = f(x)$$

7.5.1 Théorème de Newton-Leibnitz

Théorème 7.6

Soit Φ une primitive quelconque de la fonction f continue sur $[a,b]$. Alors:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Convention: On notera $[\Phi(x)]_a^b$ ou $\Phi(x)|_a^b$ pour $\Phi(b) - \Phi(a)$. Donc on obtient:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\Phi(x)]_a^b$$

Exemple 7.7

Calculer $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

D'après le théorème précédent on a:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

7.6 Procédés généraux d'intégration

7.6.1 Méthode de changement de variable dans une intégrale définie

Théorème 7.7

Soient f une fonction continue dans $[a, b]$ et $\Phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ une fonction de type $C^1([\alpha, \beta])$ tq: $\Phi(\alpha) = a$ et $\Phi(\beta) = b$, alors:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\Phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve

Si on pose:

$$x = \Phi(t) \implies \mathrm{d}x = \Phi'(t)\mathrm{d}t$$

Concernant les bornes de l'intégrale on a:

$$\begin{cases} x = a \Leftrightarrow \Phi(t) = a \implies t = \alpha \\ x = b \Leftrightarrow \Phi(t) = b \implies t = \beta \end{cases}$$

En remplaçant dans l'intégrale on obtient:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\Phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 7.8

Calculer $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution: Posons:

$$x = \sin(t) \implies \mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t$$

Alors:

$$\begin{cases} x = -1 \implies t = -\frac{\pi}{2} \\ x = 1 \implies t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'intégrale on obtient:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t$$

D'un autre côté on a: $\cos^2(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$

$$\implies I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t) + t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

7.6.2 Méthode d'intégration par partie dans une intégrale définie

Théorème 7.8

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 7.9

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$

Solution: Posons

$$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \cos(x) \longrightarrow g(x) = \sin(x)$$

On applique la formule d'intégration par partie et on obtient:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(x)\,\mathrm{d}x = [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow I = [x\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}$$