Analyse 02

Université de Batna 02
Faculté des mathématiques et d'informatique
Département Socle Commun MI
1re Année MI

Chapitre02

Intégrales indéfinies-Partie01

Année Universitaire 2021/2022

Chapitre 6

Intégrales indéfinies

Sommaire

6.1 Intégrales indéfinies et primitives

6.1.1 Notion de primitive d'une fonction

Définition 6.1

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I (avec I est un intervalle ouvert). On appelle primitive de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant la propriété suivante:

$$\forall x \in I;\ F'(x) = f(x)$$

Exemple 6.1

1. Posons $I = \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^4$, alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{1}{5}x^5$ est une primitive de f sur $I = \mathbb{R}$ puisque:

$$\forall x \in I;\ F'(x) = x^4 = f(x).$$

2. Posons $I =]0, +\infty[$ et $g : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x}$, alors la fonction $G : I \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de g sur $I =]0, +\infty[$ puisque:

$$\forall x \in I;\ G'(x) = \sqrt{x} = g(x).$$

Remarque 6.1 *Dans les exemples précédents on remarque que:*

1. *La fonction définie par:* $F_1(x) = \frac{1}{5}x^5 + 2$ *est aussi une primitive de la fonction* $f(x) = x^4$ *sur* $\mathbb{R}$.

2. *La fonction définie par:* $G_1(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 5$ *est aussi une primitive de la fonction* $g(x) = \sqrt{x}$ *sur* $]0, +\infty[$.

Proposition 6.1

Soit f une fonction définie et admet une primitive sur I alors:

1. f admet une infinité de primitives sur I.
2. Si F_1, F_2 sont deux primitives de f sur I, alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ tq:

$$\forall x \in I;\ F_1(x) = F_2(x) + c$$

Preuve

1. Supposons que f admet une primitive F sur I alors, les fonctions définies par: $G_k(x) = F(x) + k/k \in \mathbb{R}$ sont aussi des primitives de f sur I puisque:

$$\forall x \in I;\ G_k'(x) = F'(x) = f(x) \implies f \text{ admet une infinité de primitives sur } I$$

2. Soient F_1, F_2 sont deux primitives de f sur I (tq: I est un intervalle ouvert) alors;

$$\forall x \in I;\ (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\implies \text{la fonction } F_1(x) - F_2(x) \text{ est constante sur } I$$

$$\text{c-à-d } \exists c \in \mathbb{R};\ \forall x \in I;\ F_1(x) - F_2(x) = c \implies F_1(x) = F_2(x) + c$$

6.1.2 Intégrale indéfinie

Définition 6.2

Soit f une fonction définie et admet une primitive sur I (I est un intervalle ouvert). On appelle intégrale indéfinie de f sur I l'ensemble des primitives de f sur I, qu'on note par:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x,\ x \in I$$

Remarque 6.2 *Si on a: F est une primitive de f sur I, alors on écrit:*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c\,/c \in \mathbb{R}$$

Exemple 6.2

On a:

- L'intégrale indéfinie de la fonction $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty, 0[$ est définie par:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + c_1 / c_1 \in \mathbb{R}$$

- L'intégrale indéfinie de la fonction $\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ est définie par:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + c_2 / c_2 \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ l'intégrale indéfinie de la fonction $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ est définie par:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c / c \in \mathbb{R}$$

6.1.3 Existence de l'intégrale indéfinie

Théorème 6.1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur I (I est un intervalle ouvert), alors on a l'implication suivante:

$$f \text{ est continue sur } I \implies f \text{ admet une primitive sur } I$$

Remarque 6.3 *D'après la remarque (6.2), si f admet une primitive sur un intervalle I, alors on peut définir l'intégrale indéfinie de f sur cet intervalle.*

Exemple 6.3

On a: $\cos(x)$ est une primitive de $\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$, donc on peut définir l'intégrale indéfinie de la fonction $\sin(x)$ avec la façon suivante:

$$\int \sin(x)dx = \cos(x) + c / c \in \mathbb{R}$$

Remarque 6.4

1. *La procédure de calcul d'une intégrale indéfinie est appelée intégration et on dit, intégrer une fonction au lieu de dire calculer son intégrale indéfinie.*
2. *Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, l'écriture $\int f(x)dx$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$.*

6.1.4 Propriétés de l'intégrale indéfinie

Proposition 6.2

Soient f et g deux fonctions réelles, alors on a les propriétés suivantes:

1. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R};\ \displaystyle\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$
3. $\displaystyle\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
4. $\displaystyle\int f'(x)dx = f(x) + c\ /c \in \mathbb{R}$

6.1.5 Intégrales indéfinies de quelques fonctions usuelles

A partir des dérivées des fonctions usuelles, on établit la table suivantes des intégrales indéfinies de quelques fonction usuelles

$\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Domaine de définition
$\displaystyle\int 0\,\mathrm{d}x = c$	$\mathbb{R}$
$\displaystyle\int a\,\mathrm{d}x = ax + c/(a = const)$	$\mathbb{R}$
$\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c/(n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$
$\displaystyle\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c/(n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$\mathbb{R}^*$
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\|x\| + c$	$\mathbb{R}^*$
$\displaystyle\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c/(\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\})$	$\mathbb{R}_+^*$
$\displaystyle\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(a)}a^x + c\ /(a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$	$\mathbb{R}$
$\displaystyle\int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c$	$\mathbb{R}$

$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Domaine de définition
$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(x)} = \tan(x) + c$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + c$	$x \in]-1, 1[$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos(x) + c$	$x \in]-1, 1[$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\int \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\int \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2(x)} = \mathrm{th}(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{argsh}(x) + c = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$	$\mathbb{R}$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{argch}(x) + c = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$	$]1, +\infty[$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \mathrm{argth}(x) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + c$	$]-1, 1[$
$\int f'(x) f^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} f^{n+1}(x) + c / n \in \mathbb{N}$	$D_{f'}$
$\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)f^{n-1}(x)} + c / n \in \mathbb{N} - \{1\}$	//
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	//

6.2 Méthode directe d'intégration

Cette méthode est basée sur les propriétés des intégrales indéfinies et les formules de transformation des fonctions en utilisant les tables des primitives.

Exemple 6.4

- Calculer $\int (\cos^2(x) + \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

Solution:
D'après la propriété de l'intégrale indéfinie on a:

$$\int (\cos^2(x) + \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \qquad (6.1)$$

1. En utilisant la formule trigonométrique suivante:

$$\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$$

   On obtient: $\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int (\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + c_1$

2. En utilisant la table des primitives on obtient: $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x) + c_2$
3. En utilisant la table des primitives on obtient aussi: $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c_3 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c_3$

D'après les étapes 1, 2, 3 et l'équation (6.1) on obtient:

$$\int (\cos^2(x) + \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{2}x + \arctan(x) + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c/c \in \mathbb{R}$$

6.3 Intégration par la méthode du changement de variable

6.3.1 La première formule

Proposition 6.3

Soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to J$ deux fonctions tq:

- f est une fonction continue sur J.
- g est une fonction dérivable sur I.
- I, J sont deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ sur J, alors $F(g(x))$ est une primitive de la fonction $g'(x)f(g(x))$ sur I.

Preuve

On a:

$$\forall x \in I;\ [F(g(x))]' = g'(x)F'(g(x)) = g'(x)f(g(x))$$

.

Méthode pratique: Pour calculer l'intégrale de type $\int g'(x)f(g(x))\,\mathrm{d}x$ on suit les étapes suivantes:

1. On pose $t = g(x)$ et $dt = g'(x)dx$

2. On obtient l'intégrale $\int f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Si F est une primitive de f alors $\int f(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + c/c \in \mathbb{R}$

3. On remplace t par $g(x)$ et dt par $g'(x)dx$ et on obtient le résultat suivant:

$$\int g'(x)f(g(x))\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c/c \in \mathbb{R}$$

.

Exemple 6.5

1. Calculer $I = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

   On pose
$$t = 1 + x^2 \implies dt = 2xdx$$
   On remplace dans l'intégrale I et on obtient:
$$I = \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{t} + c/c \in \mathbb{R}$$
$$\implies I = \sqrt{1+x^2} + c/c \in \mathbb{R}$$

2. Calculer $J = \int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\,\mathrm{d}x$

   On a:
$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}$$
   $\implies J = \int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x.$

   Posons:
$$t = e^x \implies dt = e^x dx$$
$$\implies J = 2\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\arctan(t) + c/c \in \mathbb{R}$$
$$\implies J = 2\arctan(e^x) + c/c \in \mathbb{R}$$

6.3.2 La seconde formule

Proposition 6.4

Soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to J$ deux fonctions tq:

- f est une fonction continue sur J.
- g est une bijection de I dans J continue sur I.
- g est dérivable sur I et vérifie: $\forall x \in I;\ g'(x) \neq 0$

Si $H(x)$ est une primitive de $g'(x)f(g(x))$ sur I, alors $H(g^{-1}(x))$ est une primitive de $f(x)$ sur J.

Preuve

On a:

$$\forall x \in J;\ (H(g^{-1}(x)))' = (g^{-1}(x))'H'(g^{-1}(x)) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}g'(g^{-1}(x))f(g(g^{-1}(x))) = f(x)$$

Méthode pratique: Pour calculer l'intégrale $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ on suit les étapes suivantes:

1. On pose $x = g(t)$ et $dx = g'(t)dt$
2. On obtient l'intégrale $\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{dt}$

   Si $H(t)$ est une primitive de $f(g(t))g'(t)$ alors: $\int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{dt} = H(t) + c/c \in \mathbb{R}$
3. On remplce t par $g^{-1}(x)$ et $g'(t)dt$ par dx on obtient: $\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(g^{-1}(x)) + c/c \in \mathbb{R}$

Exemple 6.6

Calculer $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ sur $]-1,1[$
On effectue un changement de variable suivant:

$$x = \sin(t) \text{ avec } t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } dx = \cos(t)dt$$

On obtient: $I = \int \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int \frac{\sin^2(t)}{|\cos(t)|}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int \sin^2(t)\,\mathrm{dt}$
(puisque $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a: $\cos(t) > 0$)
D'un côté on a: $\sin^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t) \implies I = \int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t))\,\mathrm{dt}$
$\implies I = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin(2t) + c/c \in \mathbb{R}$. On a: $x = \sin(t) \implies t = \arcsin(x)$
On remplace t par $\arcsin(x)$ on obtient: $I = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin(x)) + c/c \in \mathbb{R}$
En utilisant la formule trigonométrique suivante on obtient:

$$\begin{aligned} &\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x)) \\ \Leftrightarrow\ &\sin(2\arcsin(x)) = 2\sin(\arcsin(x))\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))} \\ \Leftrightarrow\ &\sin(2\arcsin(x)) = 2x\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

$$\implies I = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c/c \in \mathbb{R}$$

6.4 Méthode d'intégration par parties

Proposition 6.5

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I ouvert, on a:

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur I on a:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Longrightarrow \int (f(x)g(x))'\,\mathrm{d}x = \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 6.7

1. Calculer $\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}$.
   Posons:

$$\begin{array}{rcl} f(x) = x & \longrightarrow & f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{-2x} & \longrightarrow & g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array}$$

   D'après la formule d'intégration par parties on obtient:

$$\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c/c \in \mathbb{R}$$

2. Calculer $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ sur $]-1,1[$.
   Posons:

$$\begin{array}{rcl} f(x) = \sqrt{1-x^2} & \longrightarrow & f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) = 1 & \longrightarrow & g(x) = x \end{array}$$

$$\Longrightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

   D'après l'exemple (6.6) on obtient:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x) + c/c \in \mathbb{R}$$

6.5 Intégration d'une fonction rationnelle

Définition 6.3

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes de degré n_1 et n_2 respectivement. On appelle fonction rationnelle toute fonction de type $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

- Si $n_1 \geq n_2$ on dit que f est une fraction rationnelle impropre.
- Si $n_1 < n_2$ on dit que f est une fraction rationnelle propre.

Proposition 6.6

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle impropre. (c-à-d $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes de degré n_1 et n_2 respectivement avec $n_1 \geq n_2$).
En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ on obtient:

$$f(x) = N(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

tq: $\begin{cases} N(x) \text{ est un polynôme de degré } n_1 - n_2. \\ R(x) \text{ est un polynôme de degré strictement inférieur à } n_2. \\ \dfrac{R(x)}{Q(x)} \text{ est une fraction rationnelle propre.} \end{cases}$

On déduit que:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int N(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

Exemple 6.8

Si on veut intégrer la fraction impropre suivante: $f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x - 5}{3x^2 - 5x - 2}$, on effectue la division euclidienne avec la manière suivante:

$$\begin{array}{c|l}
3x^3 + 2x - 5 & 3x^2 - 5x - 2 \\ \cline{2-2}
-3x^3 + 5x^2 + 2x & x + \frac{5}{3} \\ \cline{1-1}
5x^2 + 4x - 5 & \\
-5x^2 + \frac{25}{3} + \frac{10}{3} & \\ \cline{1-1}
\frac{37}{3}x - \frac{5}{3} &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) = x + \frac{5}{3} + \frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$\Longrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{3x^3 + 2x - 5}{2x^2 - 5x - 2}\,\mathrm{d}x = \int (x + \frac{5}{3})\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{37}{3}x - \frac{5}{3}}{3x^2 - 5x - 2}\,\mathrm{d}x$$

Remarque 6.5 *La difficulté de l'intégration d'une fraction rationnelle se restreint à l'intégration d'une fraction rationnelle propre.*

6.5.1 Décomposition d'une fraction propre en éléments simples

Théorème 6.2: (Théorème fondamental de la décomposition d'une fraction propre)

Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle propre tq:

$Q(x) = c(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}....(x-x_k)^{m_k}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}....(x^2+p_lx+q_l)^{n_l}$
où:

- $c, x_1, x_2, ..., x_k \in \mathbb{R}$, $p_1, p_2, ..., p_l \in \mathbb{R}$ et $q_1, q_2, ..., q_l \in \mathbb{R}$
- $m_1, m_2, ..., m_k \in \mathbb{N}$ et $n_1, n_2, ..., n_l \in \mathbb{N}$
- $\forall i \in \{1, 2, ..., l\}$; $\Delta_i = p_i^2 - 4q_i < 0$

Alors $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose en fractions simples sous la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,1}}{x-x_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-x_1)^2} + ... + \frac{A_{1,m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} \\
&+ \frac{A_{2,1}}{x-x_2} + \frac{A_{2,2}}{(x-x_2)^2} + ... + \frac{A_{2,m_2}}{(x-x_1)^{m_2}} \\
&+ .... \\
&+ \frac{A_{k,1}}{x-x_k} + \frac{A_{k,2}}{(x-x_k)^2} + ... + \frac{A_{k,m_2}}{(x-x_1)^{m_k}} \\
&+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + ... + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} \\
&+ \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + ... + \frac{B_{2,n_2}x + C_{2,n_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{n_2}} \\
&+ .... \\
&+ \frac{B_{l,1}x + C_{l,1}}{x^2+p_lx+q_l} + \frac{B_{l,2}x + C_{l,2}}{(x^2+p_lx+q_l)^2} + ... + \frac{B_{l,n_l}x + C_{l,n_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{n_l}}
\end{aligned}
$$

avec les $A_{i,j}, B_{i,j}$ et $C_{i,j}$ sont des constantes réelles.

Remarque 6.6 *D'après le théorème précédent, on peut décomposer toute fraction propre en une somme finie d'éléments simples suivants:*

1. *Élément simple de première espèce est de la forme* $\dfrac{A}{(x-a)^m}$ *tq:* $A, a \in \mathbb{R}$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$
2. *Élément simple de seconde espèce est de la forme* $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$ *tq:* $n \in \mathbb{N}^*, B, C, p, q \in \mathbb{R}$ *et* $\Delta = p^2 - 4q < 0$

Exemple 6.9

Décomposer en éléments simples les fractions suivantes:

1. $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$
2. $g(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{1 + 2x^2}{x^2(1+x^2)^2}$

Solution:

01) $f(x)$ est une fraction propre d'après le théorème fondamental de la décomposition on a:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1(x-1)(x^2+x+1)+A_2(x^2+x+1)+(x-1)^2(B_1x+C_1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{(A_1+B_1)x^3+(A_2+C_1-2B_1)x^2+(A_2+B_1-2C_1)x-A_1+A_2+C_1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

Par identification des coefficients du numérateur on obtient:

$$\begin{cases} A_1+B_1=2 \\ A_2+C_1-2B_1=4 \\ A_2+B_1-2C_1=1 \\ -A_1+A_2+C_1=2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A_1=2,\ A_2=3,\ B_1=0 \text{ et } C_1=1$$

$$\Longrightarrow \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{(x-1)} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}$$

02) $g(x)$ est une fraction propre d'après le théorème fondamental de la décomposition on a:

$$\begin{aligned} \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)^2} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1x+C_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{A_1x(x^2+1)^2+A_2(x^2+1)^2+x(B_1x+C_1)(x^2+1)+x^2(B_2x+C_2)}{x^2(1+x^2)^2} \\ &= \frac{A_1x^5+(A_2+B_1)x^4+(2A_1+B_2+C_1)x^3+(2A_2+B_1+C_2)x^2+(A_1+C_1)x+A_2}{x^2(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Par identification des coefficients du numérateur on obtient:

$$\begin{cases} A_1=0 \\ A_2+B_1=0 \\ 2A_1+B_2+C_1=0 \\ 2A_2+B_1+C_2=2 \\ A_1+C_1=0 \\ A_2=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow A_1=0, A_2=1, B_1=0, B_2=0,\ C_1=-1,\ \text{et } C_2=1$$

.

$$\Longrightarrow \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

6.5.2 Intégration des éléments simples

1. Un élément simple de première espèce est de la forme:$U(x) = \dfrac{A}{(x-a)^m}$ tq: $A, a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$, alors on a:

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + c/c \in \mathbb{R} & \text{Si } m = 1 \\ \displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^m}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + c/c \in \mathbb{R} & \text{Si } m \neq 1 \end{cases}$$

2. Un élément simple de seconde espèce est de la forme:$V(x) = \dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$ tq: $n \in \mathbb{N}^*,\ B, C, p, q \in \mathbb{R}$ et $\Delta = p^2 - 4q < 0$

Méthode de calcul:
Pour calculer l'intégrale de type: $I = \displaystyle\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, on suit les étapes suivantes:

- On a:

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= (x+\frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2 \\ &= (x+\frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}(p^2-4q) \\ &= (x+\frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}\Delta \\ &= -\frac{\Delta}{4}\left[-\frac{4}{\Delta}(x+\frac{1}{2}p)^2 + 1\right] \\ &= -\frac{\Delta}{4}\left[\left(\frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

- En effectuant un changement de variable avec la manière suivante:

$$t = \frac{2x+p}{\sqrt{-\Delta}} \implies x = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t - \frac{p}{2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}dt$$

On obtient:

$$I = \frac{B}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)^{2n-2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{dt} + \left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)^{2n-1}\left(\frac{2C-Bp}{2}\right)\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{dt}$$

Posons: $I_n = \displaystyle\int \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{dt}$ et $J_n = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{dt} \implies I = \alpha I_n + \beta J_n$

$$\text{avec:} \quad \alpha = \frac{B}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)^{2n-2} \quad \text{et} \quad \beta = \left(\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\right)^{2n-1}\left(\frac{2C-Bp}{2}\right)$$

- Calcul de I_n et J_n
  (a) On a:

$$\begin{cases} I_1 = \displaystyle\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{dt} = \ln(t^2+1) + c/c \in \mathbb{R} \\ I_n = \displaystyle\int \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{dt} = -\frac{1}{(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + c/c \in \mathbb{R} \quad \text{et } n > 1 \end{cases}$$

(b) J_n est calculée par la formule de recurrence suivante:

$$\begin{cases} J_1 = \arctan(t) + c / c \in \mathbb{R} \\ \\ J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n + \frac{t}{2n(t^2+1)^n} \end{cases}$$

Preuve

- Pour $n = 1$ on a: $J_1 = \displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \implies J_1 = \arctan(t) + c / c \in \mathbb{R}$
- Pour $n > 1$, en utilisant une intégration par partie avec la façon suivante: Posons:

$$\begin{array}{rcl} f(t) = \frac{1}{(t^2+1)^n} & \longrightarrow & f'(t) = -\frac{2nt}{(t^2+1)^{n+1}} \\ g'(t) = 1 & \longrightarrow & g(t) = t \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\implies J_n = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\ &\implies J_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n \int \left(\frac{1}{(t^2+1)^n} - \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}} \right) \mathrm{d}t \\ &\implies J_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2nJ_n - 2nJ_{n+1} \\ &\implies J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n + \frac{t}{2n(t^2+1)^n} \end{aligned}$$

- Enfin, on remplace t par $\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}t + \frac{p}{\sqrt{-\Delta}}$ et on obtient le résultat.

Exemple 6.10

- Calculer $\displaystyle\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$

Solution:

- **Étape 01:**(La décomposition en éléments simples)
  D'après l'exemple (6.9) on a:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}$$

- **Étape 02:**(L'intégration des éléments simples obtenus après la décomposition)
  D'après la propriété des intégrales indéfinies on a:

$$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

1. On obtient immédiatement:

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| + c_1 \\ \quad\text{et} \\ \displaystyle\int \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{x-1} + c_2 \end{cases}$$

2. Concernant l'intégral $J = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ on suit la méthode suivante:
   On a:
$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] \\ &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$
   On effectue un changement de variable avec la manière suivante:
$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \implies \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{1}{2} \\ \quad \text{et} \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt \end{cases}$$
   On obtient:
$$J = \int \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(t) + c_3$$
   Donc, on remplace t par $\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et on obtient:
$$J = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c_3$$

$$\implies \int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c/c \in \mathbb{R}$$

6.6 Intégration des fonctions irrationnelles

L'intégration de certaines fonctions irrationnelles peut se transformer à l'aide d'un changement de variable convenable en une intégration d'une fraction rationnelle. Pour un plus de détail sur cette méthode d'intégration nous avons besoin des définitions suivantes.

6.6.1 Polynôme et fraction de deux variables

Définition 6.4

Un pôlynome de deux variables x, y de degré n est défini par l'expression suivante:
$$\begin{aligned} P(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + ... + a_{n,0}x^n \\ + a_{n-1,1}x^{n-1}y + ... + a_{1,n-1}xy^{n-1} + a_{0,n}y^n \end{aligned}$$

Exemple 6.11

1. Un polynôme de deux variables x, y de degré 1 est défini par:
$$P(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y$$
2. Un polynôme de deux variables x, y de degré 3 est défini par:
$$\begin{aligned} P(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{3,0}x^3 \\ + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3 \end{aligned}$$