



Université de Batna 2
 Faculté des Mathématiques et d'informatique
 Département Socle Commun MI
 1ère année MI/Module : Analyse 02
 Année Universitaire 2021/2022

Série de Td N :-01 (Fonctions usuelles)

Exercice 01 :

Montrer que :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}_+; |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leq \sqrt{|y - x|}$.
- $\forall x > -1; \ln(1 + x) \leq x$.
- $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}; (1 + \frac{1}{n})^n \leq e \leq (1 - \frac{1}{n})^n$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*; \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln(\frac{a+b}{2})$

Exercice 02 : (Pour l'étudiant)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

- Déterminer l'ensemble sur lequel f est définie.
- Calculer la limite de f en $+\infty$.
- Calculer $f'(x)$. On exprimera $f'(x)$ sous la forme $\beta(u(x))^\alpha$ où $u(x)$ est un polynôme et α, β sont des réels.

Exercice 03 :

- Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sqrt{x}}$$

- Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[; x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$

- Résoudre les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \quad b) \begin{cases} e^x e^{2y} = 1 \\ 2xy = -1 \end{cases}$$

Exercice 04 : (Pour l'étudiant)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \cos(3x) \cos^3(x)$$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ et $f(x + \pi)$ en fonction de $f(x)$, en déduisant l'intervalle I sur lequel on peut étudier f .
- étudier le sens de variation de f sur I .
- Tracer la courbe représentative de f .

Exercice 05 :

- Déterminer la valeur de $\arcsin(\frac{1}{2})$ et $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.
- Calculer $\arccos(\cos(\frac{2\pi}{3}))$ et $\arccos(\cos(\frac{4\pi}{3}))$
- Simplifier les expressions suivantes :

$$a) \tan(\arcsin(x)) \quad b) \cos(\arctan(x))$$

Exercice 05 :

Montrer que :

- $\forall x \in]-1, 1[; \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*; \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \text{sgn}(x) \frac{\pi}{2}$

Remarque : $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Exercice 06 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2 \cosh^2(x) - \sinh(2x)}{x - \ln(\cosh(x) - \ln(2))}$$

- Simplifier l'expression de f .
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Exercice 07 :

Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Exprimer $f(x)$ en fonction de $\text{argsh}(x)$ et $g(x)$ en fonction de $\text{argch}(x)$.