

Compatibilité électromagnétique

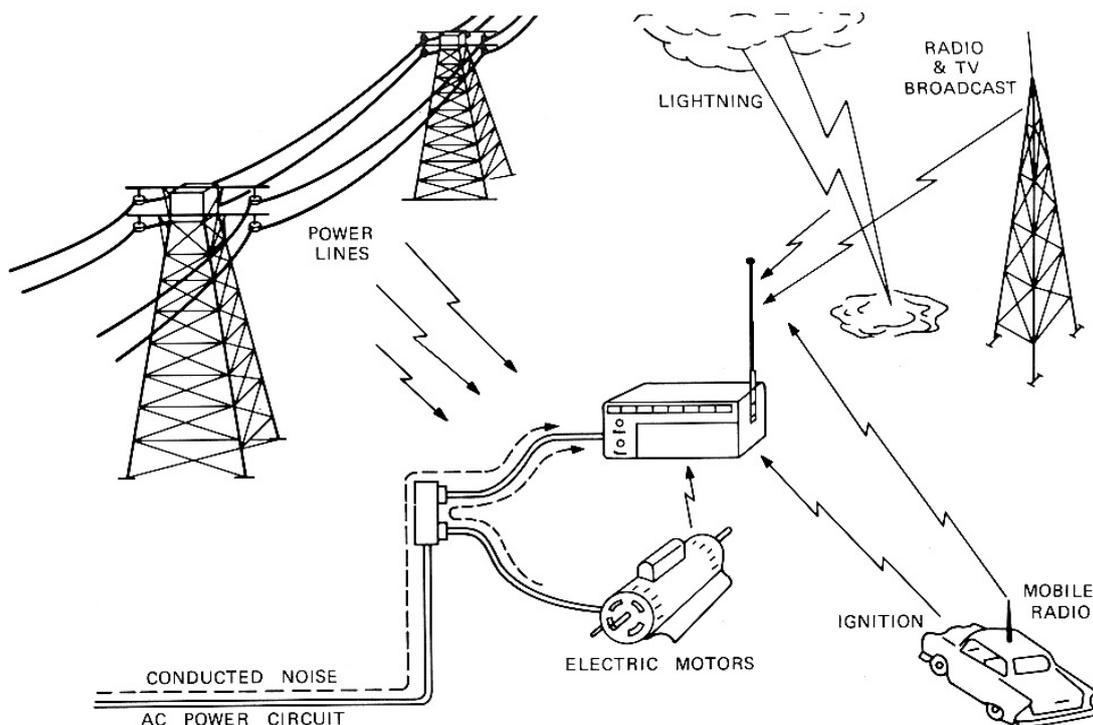
1) Concept de la compatibilité électromagnétique (CEM)

La **compatibilité électromagnétique (CEM)** est l'aptitude d'un appareil ou d'un système électrique, ou électronique, à fonctionner dans son environnement électromagnétique de façon satisfaisante, sans produire lui-même des perturbations électromagnétiques gênantes pour tout ce qui se trouve dans cet environnement.

Une bonne compatibilité électromagnétique décrit un état de « bon voisinage électromagnétique » :

- Limiter le niveau des *émissions* non désirées provenant de l'appareil, afin de ne pas perturber la réception radio ou les autres équipements ;
- Être suffisamment immunisé contre les perturbations provenant des autres équipements, ou plus généralement de l'environnement.

Les bruits électromagnétiques et radioélectriques sont le résultat de tous les courants et tensions électriques induisant une multitude de champs (électrique et magnétique) et signaux parasites.



En résumé la Compatibilité Electro Magnétique (CEM) est le fait, pour des équipements de supporter mutuellement leurs effets électromagnétiques Ces dernières années, plusieurs facteurs se sont conjugués pour augmenter l'importance de la CEM :

- ✓ Perturbations de plus en plus importantes liées à l'augmentation de la tension et de l'intensité
- ✓ Circuits à niveau d'énergie de plus en plus faible, donc de plus en plus sensibles
- ✓ Distances entre les circuits sensibles (souvent électroniques) et les circuits perturbateurs (souvent de puissance) qui se réduisent
- ✓ Explosion du nombre des matériels de télécommunication.

1.2) Démarche suivie dans l'étude en CEM

Un système « électromagnétiquement compatible » doit respecter 3 critères :

- Il ne produit aucune interférence avec d'autres systèmes
- Il n'est pas susceptible aux émissions d'autres systèmes
- Il ne produit aucune interférence avec lui-même.

2.) Emissivité et Immunité

✓ **La Susceptibilité**

C'est la capacité d'un dispositif d'être perturbé par l'extérieur.

✓ **Emissivité :**

Ce terme est employé pour évaluer le pouvoir perturbateur d'un appareil ou les perturbations générées par ce dernier soit :

- Perturbations conduites (câbles, supports, ...)
- Perturbations rayonnées (sous forme d'onde électromagnétique)

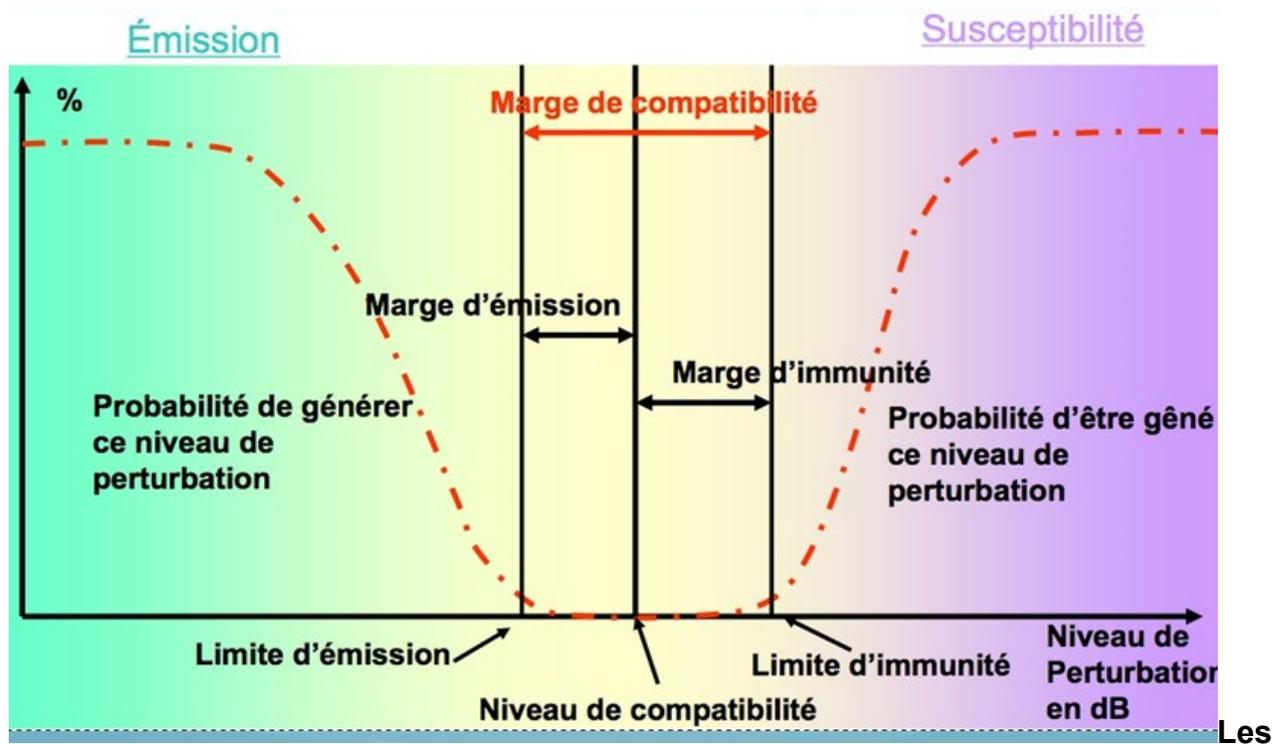
✓ **Immunité :**

On parle d'immunité pour caractériser le niveau de protection intrinsèque d'un système vis-à-vis des perturbations externes. Immunité contre :

- Les perturbations conduites
- Les perturbations rayonnées



La notion de compatibilité naît de la confrontation entre ses deux aspects autour d'une ligne de partage « **niveau de compatibilité** » comme le montre la figure ci-dessous :



1.3) Sources de perturbations

Si nous nous intéressons à l'environnement électromagnétique d'un équipement, nous pouvons distinguer les sources de perturbations d'origine naturelle et les sources de perturbations qui tiennent à l'activité humaine.

Parmi les sources de perturbation d'origine naturelle, nous pouvons citer :

- ✓ La foudre (décharge électrostatique entre nuages ou entre nuage et sol) ;
- ✓ Les rayonnements cosmiques et en particulier solaires

Parmi les sources de perturbation qui découlent de l'activité humaine, on peut distinguer trois catégories :

- ✓ Les sources de rayonnement électromagnétique volontairement créées par l'homme : émetteurs radio, télévision, radar, téléphones portables, etc. ;

- ✓ Les sources de perturbation involontaires qui proviennent de l'utilisation de l'électricité : lignes de transport de l'énergie, éclairage fluorescent, moteurs électriques, alimentations des systèmes électroniques, etc.
- ✓ Les décharges électrostatiques qui impliquent le corps humain ou des matériaux mis en mouvement par l'homme.

On a cependant tendance à classer les perturbations en fonction de leur type plutôt que de leur nature, par exemple basse ou haute fréquence, transitoires ou entretenues. La figure ci-dessous illustre ce classement.

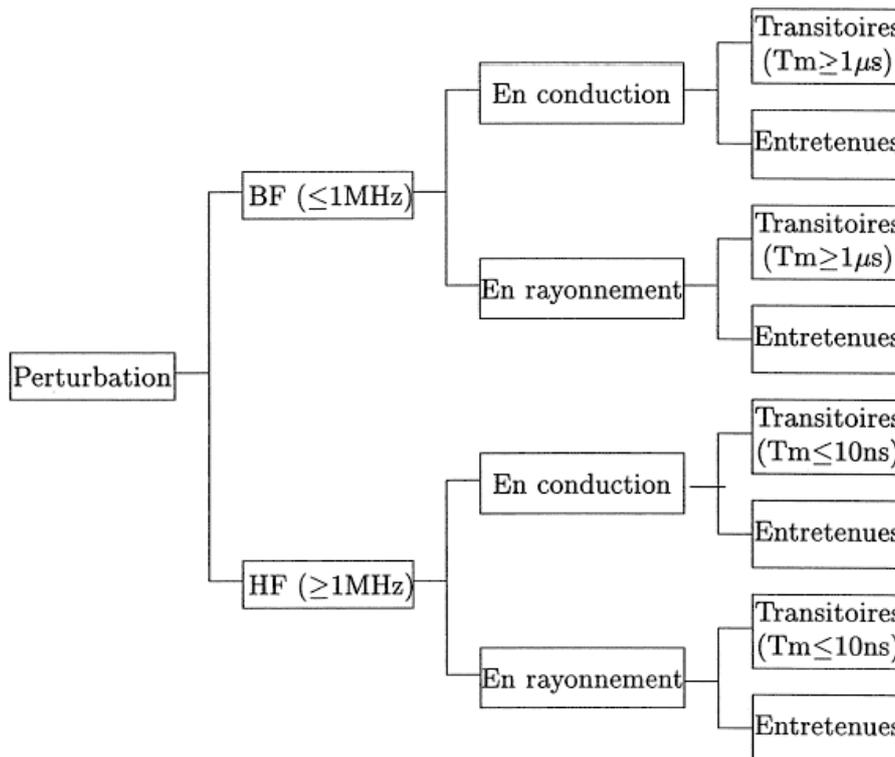


Figure : Classification des perturbations

Les perturbations conduites utilisent comme vecteur les matériaux conducteurs :

- ✓ Lignes de données
- ✓ Câbles d'alimentation
- ✓ Réseau de terre déficient

Les perturbations rayonnées sont transmises par une onde électromagnétique et utilisent comme support les milieux diélectriques :

- ✓ Le plastique
- ✓ Le bois
- ✓ L'air
- ✓ etc. ...

SOURCES	VICTIMES
Émetteurs radio-fréquence	Électronique analogique bas niveau Récepteur radio-fréquence
Lampes à arc	Électronique analogique et numérique
Soudage HF	Électronique analogique et numérique
Allumage automobile	Récepteurs radio-fréquences, toutes les électroniques
Relais, contacteurs	Toutes les électroniques
Électronique numérique, alim. à découpage,...	Électronique analogique

Figure : Exemple de sources de perturbations et leurs victimes

2) Les modes de couplages et leurs solutions

Les couplages sont des chemins de propagation par lesquels les sources de perturbations entrent en contact avec les équipements victimes. Il existe principalement six modes de couplage, deux en mode conduit et quatre en mode rayonné (deux en champ proche et deux en champ lointain).

Les principales lois mises en jeu

Mode de couplage en resumé :

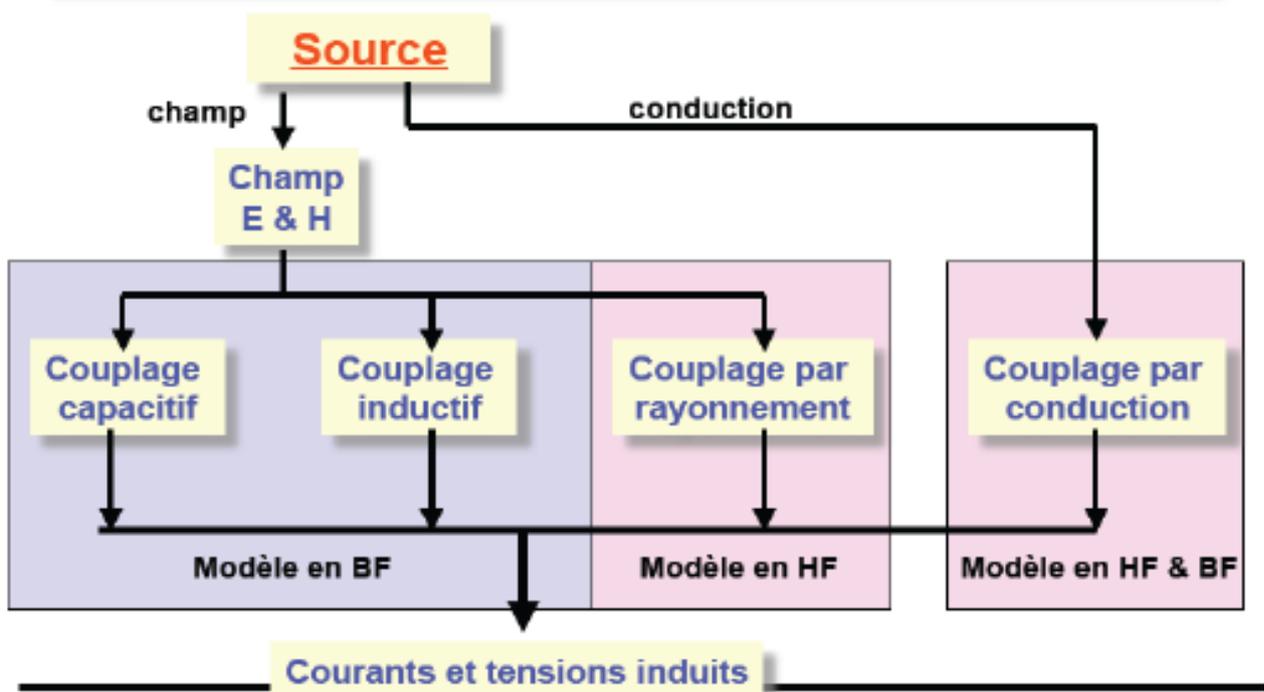


Figure : Bilan des différents couplages

En mode conduit :

- ✓ Le couplage par impédance commune.
- ✓ Le couplage « carte à châssis ».

En mode rayonné en champ proche (basse fréquence) :

- ✓ Le couplage par diaphonie inductive.
- ✓ Le couplage par diaphonie capacitive.

En mode rayonné en champ lointain (haute fréquence):

- ✓ Le couplage champ à câble.
- ✓ Le couplage champ à boucle.

2.1) Couplages en mode conduit

2.1.1) Mode commun ou par impédance commune

L'impédance d'un conducteur n'étant jamais nulle, tout courant y circulant génère donc aux bornes de ce conducteur une tension $U = Z.I$. Ce phénomène est particulièrement sévère pour les circuits bas niveaux (mesure) ou rapides (radio).

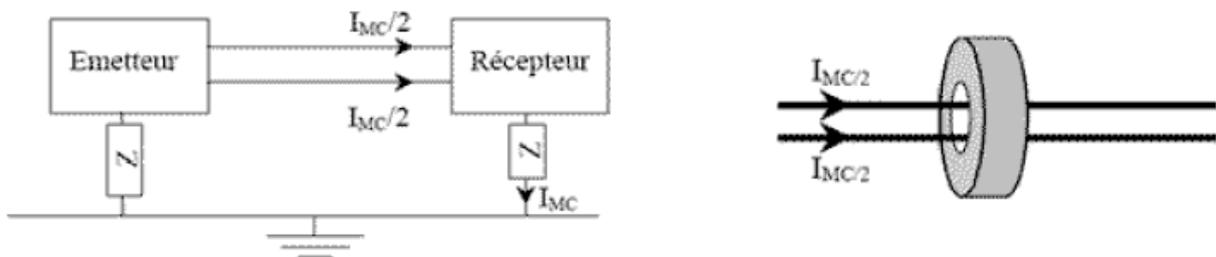


Figure : Principe du couplage par impédance commune et mesure de I_{Mc}

Les tensions de mode commun se développent entre les fils de liaisons (alimentations, signaux) et la référence de potentiel : masses des appareils, fil de protection équipotentielle. La tension de mode commun est définie comme étant égale à la valeur moyenne de la d.d.p entre les différents fils et la masse. Le courant de mode commun est égal au courant qui s'écoule à la masse, ce courant se partageant entre les différents fils de liaison, dans le même sens sur chacun des fils. Il peut être mesuré par une sonde de courant parcourue par les 2 fils dans le même sens.

Les remèdes pour diminuer ce couplage sont :

- Diminuer Z en mettant plus de cuivre.
- Circuit imprimé multicouches.
- Plan de masse.
- Grille.
- Diminuer le courant parasite.
- Alimenter les circuits de puissance en priorité.
- Découpler les composants à fort di/dt.
- Séparer l'analogique et le numérique.

2.1.2) Mode différentiel

Les signaux utiles sont généralement transmis en mode différentiel, appelé aussi mode « série », mode « normal » ou mode « symétrique ».

Exemple : alimentation, transmission sur 2 fils etc.

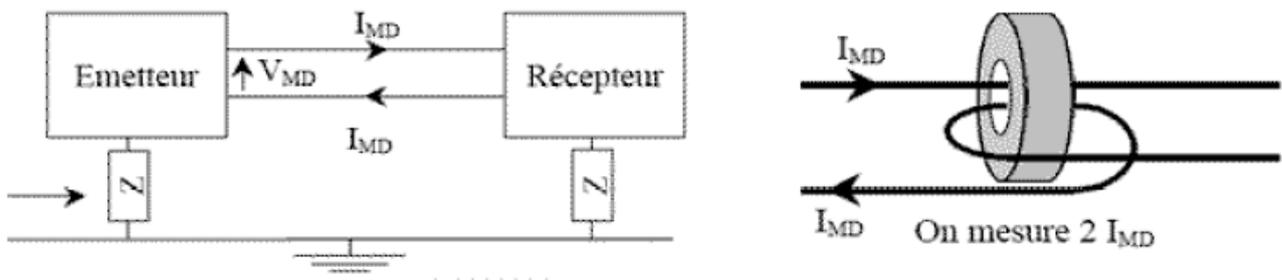


Figure : Principe du mode différentiel et mesure de I_{MD}

La tension de mode différentiel est mesurée entre les 2 fils, elle peut être mesurée avec une sonde différentielle. L'étage d'entrée des systèmes électroniques comporte souvent un amplificateur différentiel. Le courant de mode différentiel se boucle sur les 2 fils de liaison, il circule en sens opposé sur chacun des fils. Ce courant peut être mesuré au moyen d'une sonde de courant parcourue par les 2 fils en sens opposé. Les perturbations généralement constatées dans ce mode, et qui sont plutôt faibles, viennent du déséquilibre de l'étage d'entrée du récepteur.

2.1.3) Couplage « carte à châssis »

La capacité d'une carte électronique loin de tout conducteur est égale à sa capacité intrinsèque. C'est son aptitude à stocker des charges électriques lorsqu'elle est soumise à

un potentiel électrique. Lorsque cette même carte est approchée de parois métalliques (cas de la mise en boîtier), elle va subir leur influence et sa capacité intrinsèque va s'ajouter aux capacités mutuelles existant entre elle et chaque élément métallique de son voisinage. Généralement, la capacité intrinsèque d'une carte est égale à celle d'un disque métallique mince isolé dans l'espace, de diamètre égal à la plus grande dimension de la carte. Elle vaut

$$C_i = 4 \cdot \epsilon_0 \cdot R \text{ avec } R : \text{ rayon du disque}$$

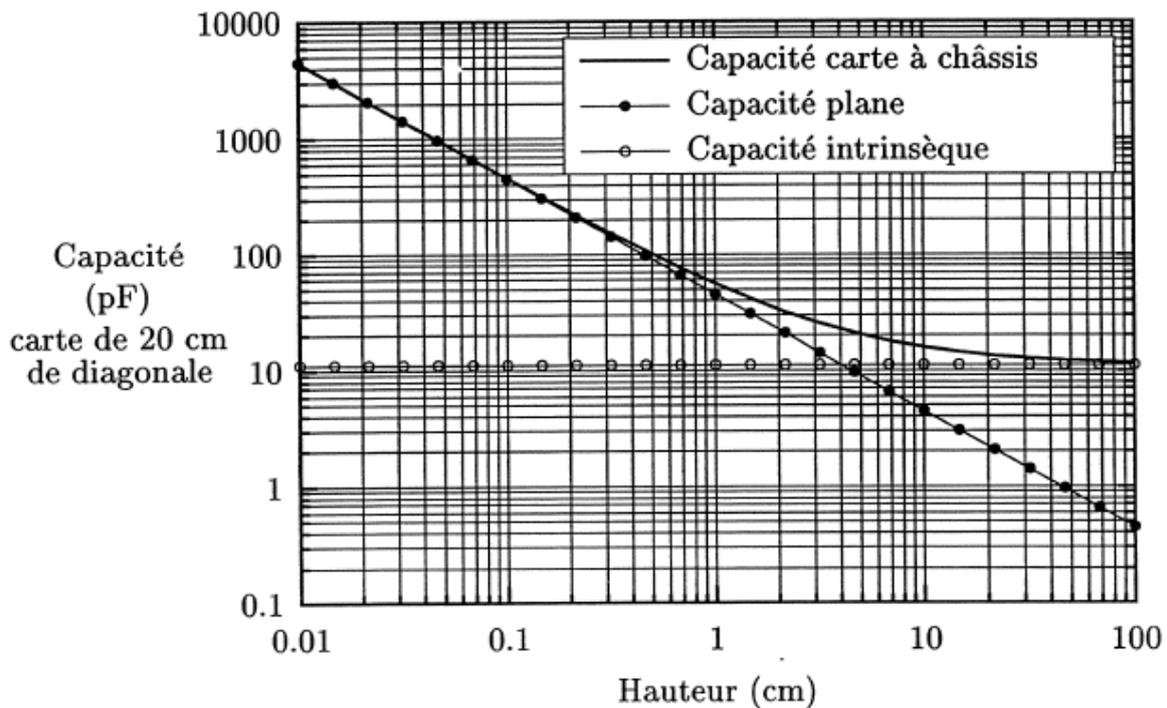


Figure : Capacité équivalente d'une carte électronique

3.2) Couplages par rayonnement

3.2.1) couplages en champ proche

Ces couplages en champ électrique ou magnétique peuvent être représentés respectivement par des liaisons capacitives ou des mutuelles inductances. Quand ces couplages interviennent sur des connexions électriques, on parle alors de couplages **câble à câble** ou de phénomènes de **diaphonie capacitive** ou **inductive**. Un signal électrique traversant un conducteur génère autour de celui-ci un champ électrique et un champ magnétique. Les conducteurs voisins baignent dans ces champs et sont à leur tour traversés par un signal électrique induit par le premier. Ces influences sont appelées couplage par diaphonie inductive (influence du champ magnétique) et capacitive

(influence du champ électrique). Il est intéressant de séparer l'étude des deux diaphonies pour la compréhension des phénomènes. Cela sous-entend que les deux lignes sont courtes devant les longueurs d'onde des signaux qui les traversent. Lorsque cette condition n'est plus valable, les lignes sont considérées comme des lignes de transmission et le calcul de la diaphonie globale devient plus complexe. La figure ci-dessous présente la configuration générale des diaphonies capacitatives et inductives dans le cas des basses fréquences (cas où la longueur d'onde est telle que la longueur des câbles $< \lambda/10$).

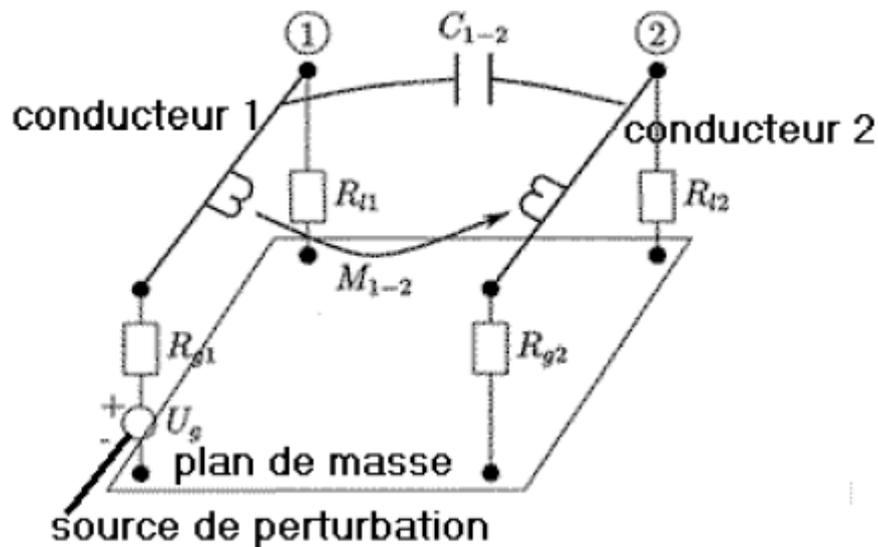


Figure : Modèle électrique d'un couplage par rayonnement en champ proche

3.2.1.1) Couplage par diaphonie inductive

Un courant i circulant dans un fil génère un champ magnétique autour de celui-ci. Si ce champ est variable, il induit une tension e dans les boucles voisines : $e = -M di/dt$ (loi de Lenz) M est l'inductance mutuelle entre les deux circuits et di/dt la vitesse de variation du courant, donc du champ. Cette inductance M est un artifice qui permet d'éviter l'introduction des notions de champ magnétique.

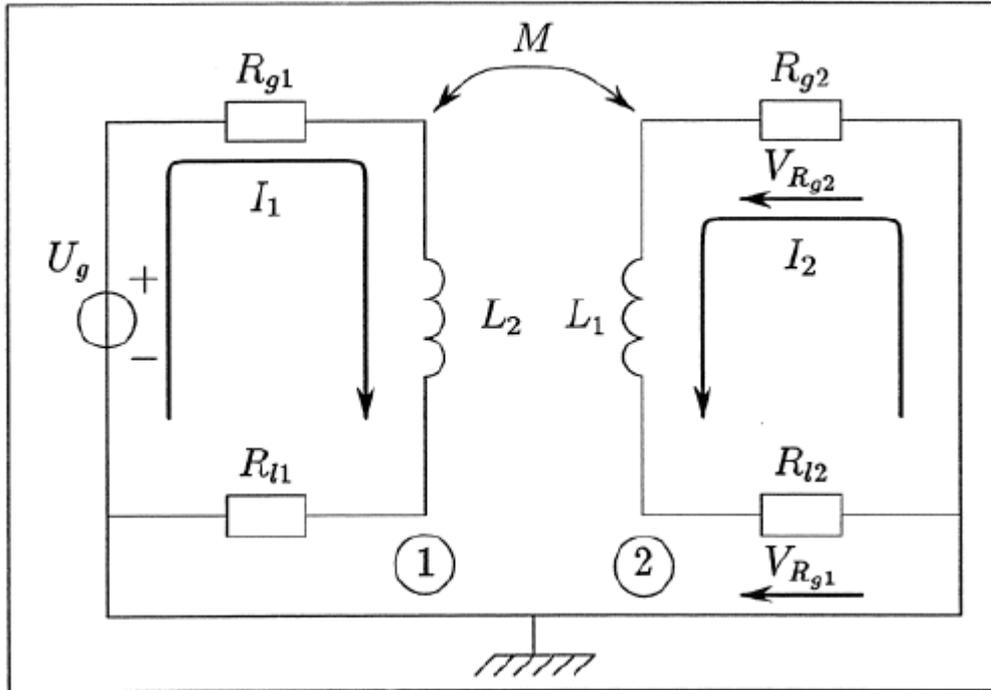


Figure : Modèle électrique d'un couplage par diaphonie inductive

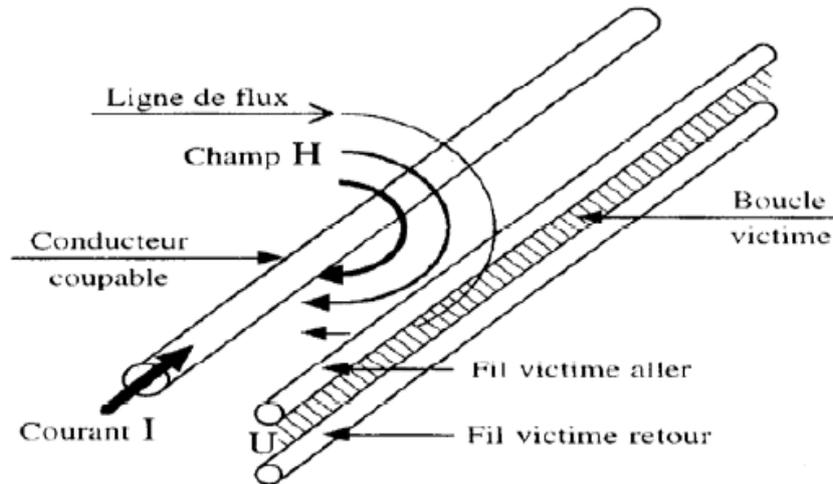


Figure : Effets de la diaphonie inductive de Mode Différentiel

La tension induite U est égale à :

$$u = -L \frac{di}{dt} \text{ où en régime harmonique } U = 2\pi \cdot f \cdot L \cdot I$$

Avec :

f fréquence du courant source

L mutuelle inductance

I courant source de perturbation

di/dt vitesse de variation du courant

La diaphonie est nulle en continu et reste faible jusqu'à des fréquences de quelques KHz. Elle n'est gênante que pour les signaux à bas niveaux proches de conducteurs transportant des courants rapidement variables.

Les remèdes pour diminuer ce couplage sont :

- Diminuer la mutuelle inductance en éloignant le fil perturbé du fil perturbateur.
- Utiliser des paires torsadées (utiles contre la diaphonie en MD uniquement).
- Câbles plats blindés, de mise en œuvre difficile, efficaces uniquement en HF.
- Multiplier les conducteurs de la masse.
- Adapter les impédances terminales des lignes.
- Câbles en nappe torsadés : alterner signal et masse

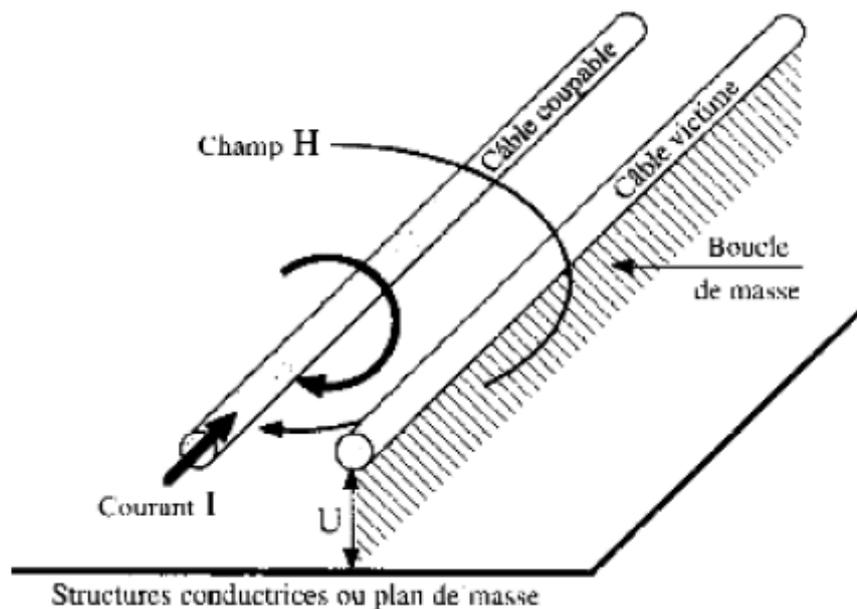


Figure : Effets de la diaphonie inductive de Mode commun

C'est un des problèmes les plus courant en CEM : les surfaces de boucle sont plus grandes qu'en Mode Différentiel par conséquent les effets sont plus significatifs. La diaphonie inductive de MC est générée par les courants de MC circulant sur les câbles perturbateurs. L'effet est une tension induite entre un câble victime parallèle et la masse la plus proche. La configuration extrême à éviter est le cheminement de câbles voisins avec des conducteurs de retour éloignés.

Les courants de MC sont supérieurs en intensité aux signaux utiles en MD.

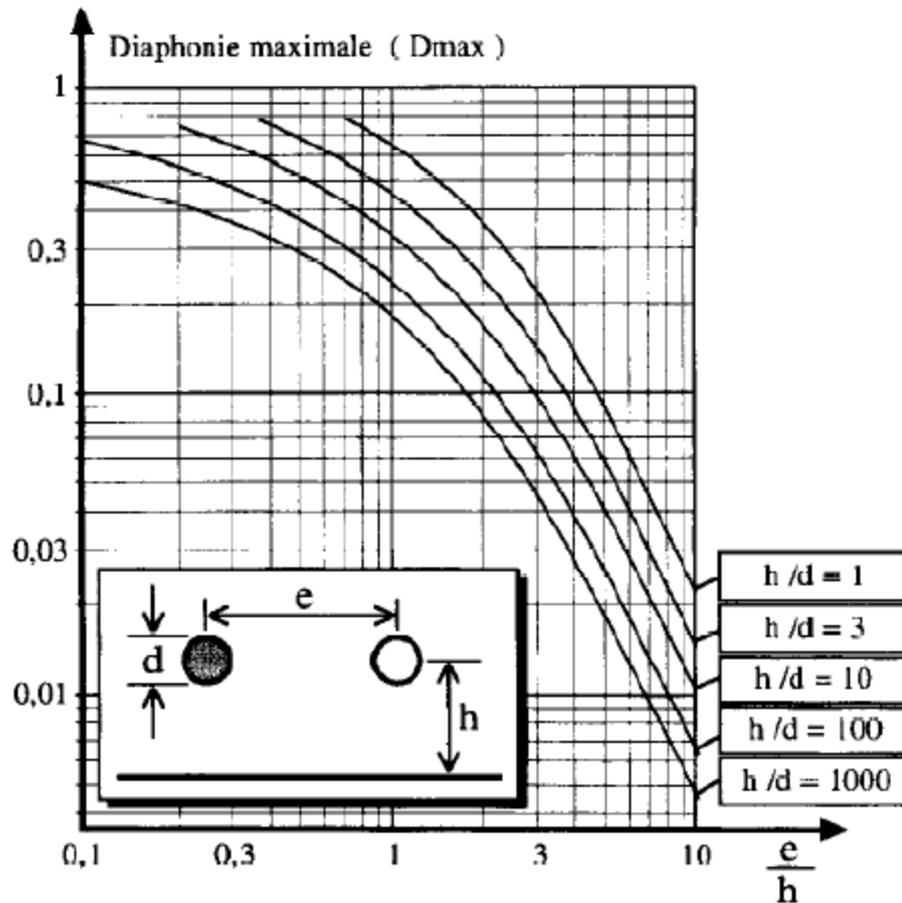


Figure : Couplage par diaphonie inductive en mode commun

Les remèdes pour diminuer ce couplage sont :

- Diminuer la mutuelle inductance en éloignant le perturbé du perturbateur.
- Utilisation d'anneau de garde relié au 0v autour des pistes sensibles.
- Éviter les parcours parallèles de câbles sur de longues distances.
- Mettre le conducteur de retour dans le même câble que le conducteur aller.
- Diminuer la vitesse de variation du courant.
- Plaquer les conducteurs victimes et perturbateurs sur la masse.
- Travailler en basse impédance.

3.2.1.2) Couplage par diaphonie capacitive

Les variations de tension entre un conducteur et son environnement génèrent un champ électrique variable. Celui-ci injecte à son tour un courant, proportionnel aux lignes de champ coupées, dans les conducteurs proches. La diaphonie capacitive est un couplage par champ électrique. La notion de capacité de couplage parasite nous évite de calculer

les champs électriques. Cette capacité de couplage nous permet de calculer le courant collecté par un conducteur victime :

$$I = C \frac{dv}{dt} \quad \text{où en régime harmonique : } I = 2\pi f C \cdot V$$

I : courant collecté par la piste victime en A.

f : fréquence du signal source en Hz.

C : capacité de couplage en F.

V : tension de source coupable.

dv/dt : vitesse de variation de la tension coupable

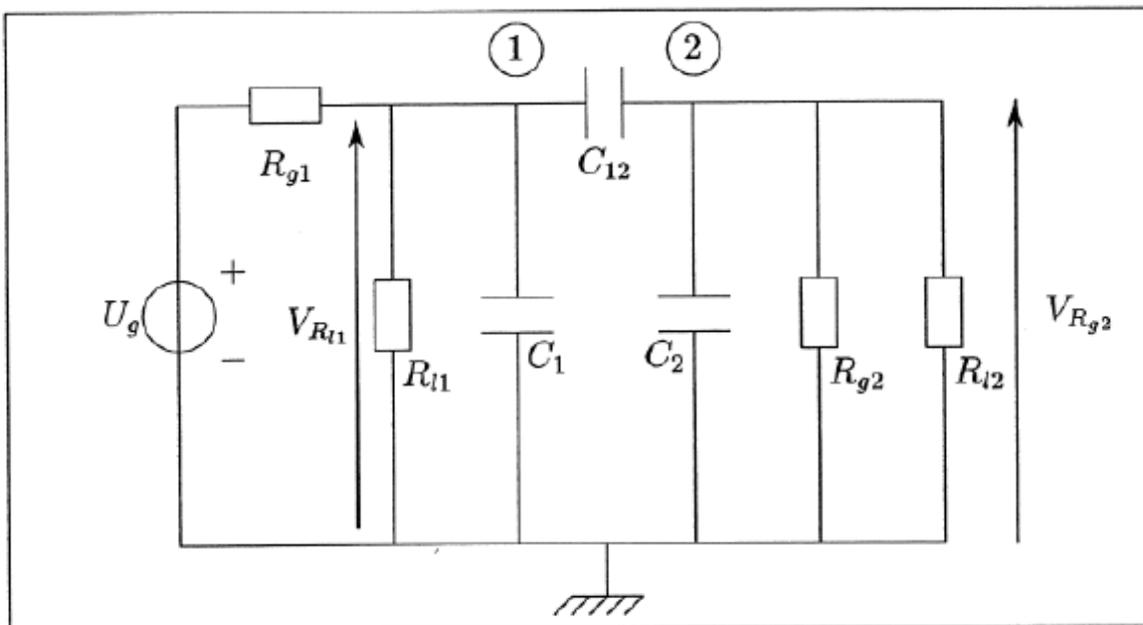


Figure : Modèle électrique d'un couplage par diaphonie capacitive

La diaphonie capacitive est faible aux basses fréquences et nulle en continu. Elle se décompose en deux : Mode Différentiel et Mode Commun. Comme pour la diaphonie inductive de Mode Commun, la diaphonie capacitive de Mode Commun est la plus gênante. Aux fréquences élevées, les diaphonies inductives et capacitives sont équivalentes en énergie.

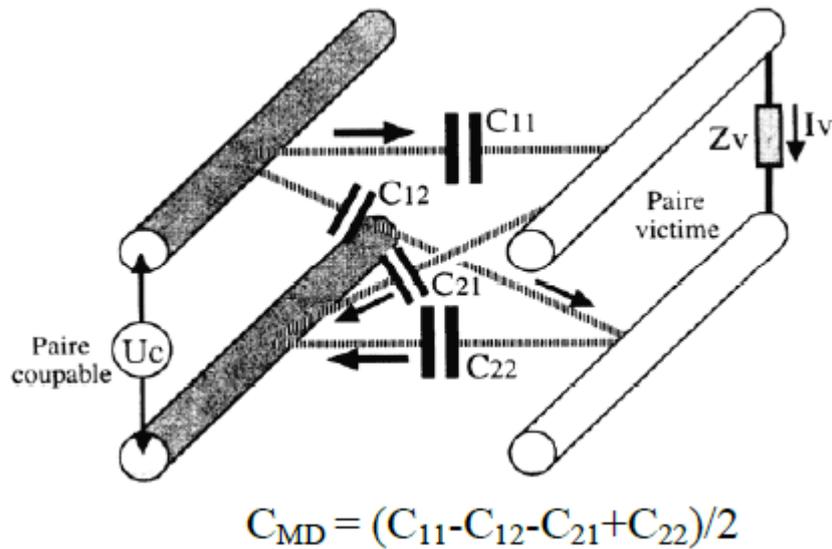


Figure : Diaphonie capacitive de Mode Différentiel

Elle perturbe, en BF, surtout les circuits à haute impédance et bas niveaux. Le pire cas de figure est le câble en nappe mal utilisé.

Les remèdes pour diminuer ce couplage sont :

- Limiter les variations rapides de tension.
- Diminuer la capacité de couplage entre les deux circuits (éloigner les conducteurs).
- Un écran conducteur, tresse, feuillard, plastique conducteur, est efficace même aux basses fréquences

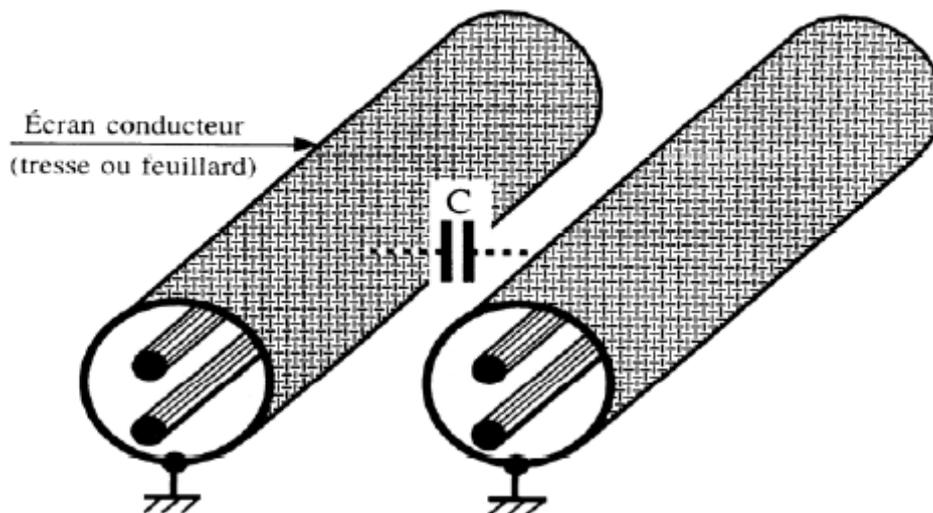


Figure : Diaphonie capacitive de mode commun

La diaphonie maximale est voisine de 50%. Dès que l'éloignement e des câbles est supérieur à la hauteur h par rapport au plan de masse, la diaphonie dans les cas extrêmes tend vers le rapport :

$$R = (h/e)^2$$

Les remèdes pour diminuer ce couplage :

Ils sont les mêmes que pour la diaphonie inductive

- Diminuer la capacité de couplage en éloignant le perturbé du perturbateur.
- Séparation des câbles bas niveaux des autres dans des goulottes séparées.
- Éviter les parcours parallèles de câbles sur de longues distances.
- Mettre le conducteur de retour dans le même câble que le conducteur aller.
- Diminuer la vitesse de variation du courant.

4) Couplage en champ lointain (Haute fréquence)

4.1) Couplage champ à fil

Un champ électrique E , en se réfléchissant sur un conducteur de longueur L , crée un courant I en surface de ce conducteur. Le condensateur parasite entre les extrémités du conducteur permet la circulation du courant. Ce phénomène s'appelle aussi « couplage champ à fil » et est très faible aux fréquences basses. Le courant collecté en fonction du champ électrique peut s'exprimer de deux manières selon la valeur de L :

$$\text{Si } L < C/4f \Rightarrow I = EL2f / (2400 \text{ Ln } (L/2d))$$

$$\text{Si } L > C/2f \Rightarrow I = 1.25 E/f$$

Avec :

L , longueur du fil en m

E , champ électrique en V/m

f , fréquence du champ E

C , célérité de la lumière (3.10^8 m/s)

I , courant parasite en A

d , distance source-fil en mètres (m)

Les remèdes pour diminuer ce couplage sont :

- Pour le réduire on peut diminuer l'effet d'antenne en rapprochant le câble de la masse, en blindant ou en éloignant le champ électrique perturbateur.
- Effet réducteur : Plaquer le câble contre un plan de masse conducteur.

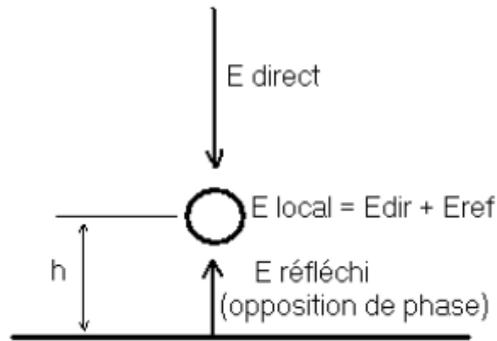


Figure : Couplage « champ à fil »

- Blinder les câbles et les coffrets.
- Filtrer les entrées et sorties par rapport à la masse mécanique.
- Monter des tores de ferrites sur les câbles collecteurs

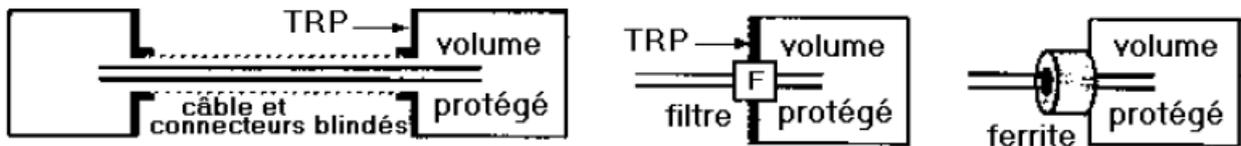


Figure : Protection contre les couplages « champ à fil »

NB : La TRP est une Tôle de Référence de Potentiel.

4.2) Couplage champ à boucle

Un champ magnétique variable traversant une boucle y crée un flux magnétique variable. Ce flux induit une tension électrique aux bornes de cette boucle.

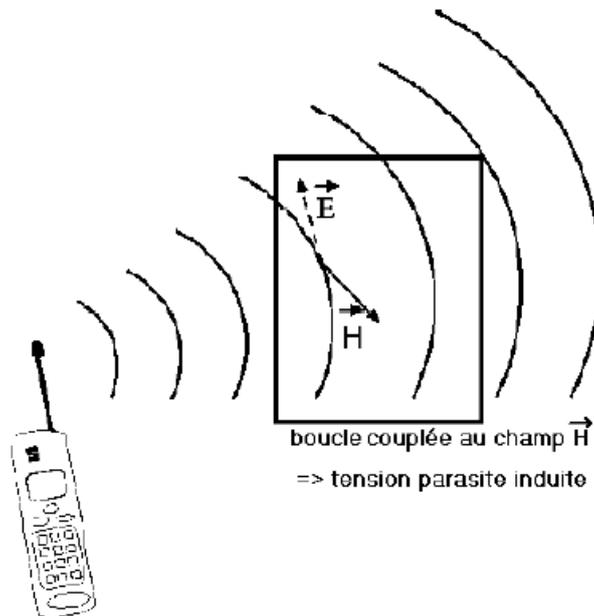


Figure : Exemple de couplage « champ à boucle »

Si la plus grande dimension de la boucle est $d < c/4f$, alors cette tension sera :

- $U = \mu_0 S d H / dt$ ou encore $U = 2\pi f \mu_0 H S$ en régime sinusoïdal
- $U = SEf/48$ (E et H étant liés en champ lointain)

Si la plus grande dimension de la boucle est $d > c/4f$ alors la loi de Lenz ne s'applique plus directement. En effet la tension induite fluctue entre des minimas et des maximas qui valent :

$$U \approx 600eH$$

Avec e : espace entre les conducteurs aller et retour en mètres.

Les remèdes pour diminuer ce couplage sont :

- Diminuer la surface des boucles, utiliser un plan de masse sur les circuits imprimés.
- Se protéger par blindage du champ magnétique perturbateur.
- Regrouper les entrées/sorties du même côté des cartes plutôt que de les répartir sur le périmètre.

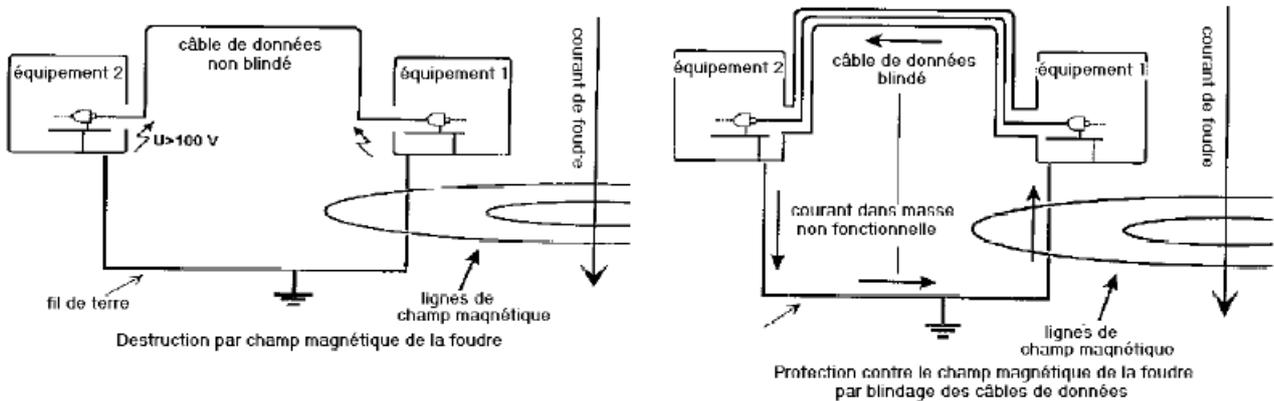


Figure : Effets de la foudre et protections possibles.

5) Modèle couplé des lignes de transmission

5.1). Rappel sur la théorie des lignes

Le modèle d'une ligne sans perte est celui de la Figure ci-dessous où :

L et C sont des inductances linéiques ($H.m^{-1}$) et capacités linéiques ($F.m^{-1}$).

Le paramètre Δx caractérise la longueur du segment de la ligne pour lequel le modèle présenté est valable. La longueur Δx doit être choisie de telle façon que $\Delta x \ll \lambda$ (λ : longueur d'onde).

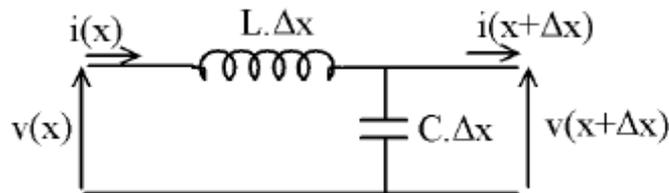


Figure : modèle de la ligne sans perte

En écrivant la différence des tensions d'entrée et de sortie et la différence des courants d'entrée et de sortie, on obtient une équation dite des Télégraphistes. A partir de cette équation on met en évidence l'existence d'ondes incidentes et d'ondes réfléchies. Le rapport de la tension au courant à l'intérieur de la ligne donne l'impédance caractéristique Z_c . La vitesse de propagation v est définie par la relation ci-dessous :

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

5.1.1) Calcul de l'inductance linéique d'un câble coaxial

Nous calculons l'inductance externe. L'inductance interne qui correspond à l'énergie à l'intérieur du conducteur n'est pas prise en compte.

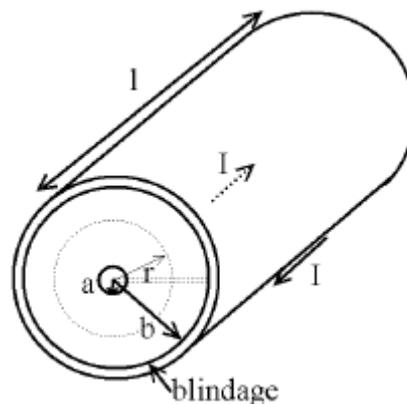


Figure : coaxial

A est le rayon de l'âme et b le rayon du blindage. Pour calculer l'inductance, on calcule le flux magnétique généré par le courant à l'intérieur du câble coaxial. L'intégration du flux se fait entre le rayon a et b. En effet, pour $r > b$ le flux est nul car il est vu de l'extérieur du câble deux courants de sens opposés. Le courant I circule dans l'âme et il revient par le blindage.

Appliquons le théorème d'Ampère :

$$\oint H \cdot dl = I \Rightarrow \oint \frac{B}{\mu_0} \cdot dl = \frac{B}{\mu_0} 2\pi r = I \Rightarrow B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

Le flux ϕ est :

$$\phi = LI = \iint B \cdot dS = l \int_a^b \mu_0 \frac{I}{2\pi r} dr = \mu_0 \frac{l}{2\pi} I [\ln r]_a^b = \mu_0 \frac{l}{2\pi} I \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

L'inductance linéique (H.m-1) L est donc :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Pour un câble coaxial standard, $a/b=3,6$. L'inductance est donc de 0,256 μH pour un mètre de longueur.

5.1.2) Capacité linéique du câble coaxial

Appliquons le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrique E à l'intérieur du coaxial de la Figure. dS est un élément de surface, Q représente les charges liées à la tension.

$$\int E \cdot dS = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot r \cdot l}$$

$V_a - V_b$ est le potentiel entre l'âme et le blindage. Il se calcule par intégration du champ électrique entre a et b. Ainsi,

$$V_a - V_b = \int_a^b E \cdot dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot l} \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \cdot l} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

On sait d'autre part que : $Q = C(V_a - V_b)$. Donc, $C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

Il s'agit là encore d'une capacité linéique en F.m-1. Dans les mêmes conditions que pour le coaxial présenté plus haut et avec $\epsilon_r = 2,3$, $C = 100 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$.

Il est important de noter que l'inductance et la capacité dépendent des dimensions de la ligne et de sa structure : forme des conducteurs, séparation, proximité de la masse...

Pour le câble coaxial considéré jusqu'à présent le calcul de Z_c et v donne :

$$Z_c = \sqrt{\frac{0,256 \cdot 10^{-6}}{100 \cdot 10^{-12}}} = 50 \Omega \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\sqrt{0,256 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-12}}} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Réciproquement, à partir de Z_c et v , il est possible de déterminer les valeurs de L et C à partir des relations suivantes :

$$L = \frac{Z_c}{v} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{Z_c \cdot v}$$

5.2) Exemples de lignes couplées

La Figure 52 représente deux lignes couplées placées sur un substrat du type circuit imprimé. La ligne génératrice est alimentée par un signal impulsionnel et la ligne réceptrice est passive. Cette dernière est le siège de tensions et de courants qui sont générés par le passage du courant dans la ligne génératrice. Le couplage entre les deux lignes est du type électrique et magnétique.

Le couplage magnétique est généré par la circulation d'un courant dans la ligne génératrice. Une partie de ce champ magnétique est intercepté par la surface de la ligne réceptrice. Elle est donc le siège de tensions induites. Par la suite, nous modéliserons le couplage magnétique entre les deux lignes par un transformateur associé à une mutuelle inductance. La mutuelle inductance dépend de la nature du milieu séparant les deux lignes et dépend de la distance entre les deux lignes.

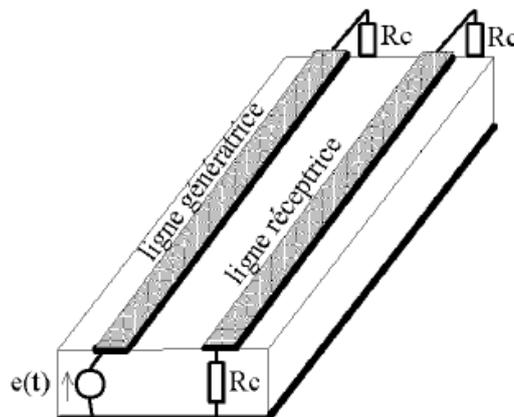


Figure : lignes couplées

Le couplage électrique entre les deux lignes est engendré par le potentiel existant sur la ligne génératrice. Il donne naissance à un champ électrique entre les deux lignes. Le couplage électrique sera modélisé par la suite par un couplage sous forme de capacité intervenant entre les deux lignes. La capacité de couplage dépend de la distance entre les deux lignes, du diélectrique entre les deux lignes et de la surface des deux conducteurs.

5.2.1) Modèle des lignes couplées

Nous ferons le calcul pour deux lignes identiques placées l'une à côté de l'autre. Le modèle de la Figure ci-dessous reprend donc deux schémas équivalent de deux lignes. Ce modèle est valable pour une longueur de ligne Δx . Il est rajouté un terme de couplage par mutuelle inductance $M.\Delta x$ et un terme capacitif $\gamma.\Delta x$ entre les deux lignes.

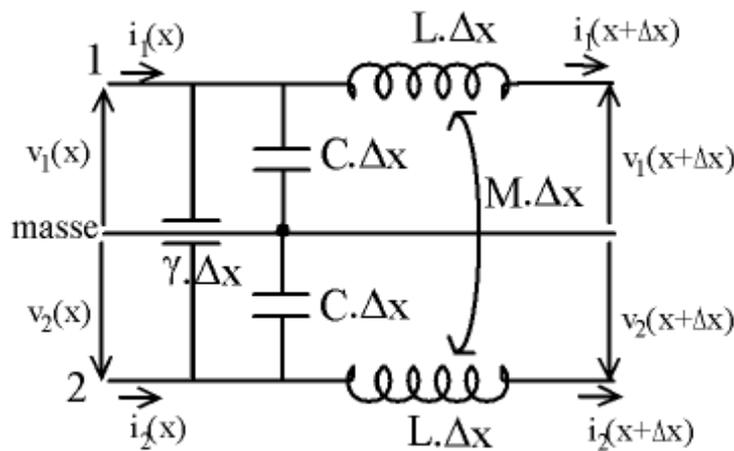


Figure : schéma des lignes couplées

Les chutes de tensions aux bornes des inductances et le courant dans les capacités C et γ sont :

$$\begin{aligned}
 v_1(x+\Delta x) - v_1(x) &= -L\Delta x \frac{\partial i_1(x+\Delta x)}{\partial t} - M\Delta x \frac{\partial i_2(x+\Delta x)}{\partial t} \\
 v_2(x+\Delta x) - v_2(x) &= -L\Delta x \frac{\partial i_2(x+\Delta x)}{\partial t} - M\Delta x \frac{\partial i_1(x+\Delta x)}{\partial t} \\
 i_1(x+\Delta x) - i_1(x) &= -C\Delta x \frac{\partial v_1(x)}{\partial t} - \gamma\Delta x \frac{\partial (v_1(x) - v_2(x))}{\partial t} \\
 i_2(x+\Delta x) - i_2(x) &= -C\Delta x \frac{\partial v_2(x)}{\partial t} - \gamma\Delta x \frac{\partial (v_2(x) - v_1(x))}{\partial t}
 \end{aligned}$$

Quand $\Delta x \rightarrow 0$, on peut remplacer $\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$ par $\frac{\partial v}{\partial x}$. D'autre part, pour soulager l'écriture on omet de placer les variables x et $x + \Delta x$. Les quatre équations deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial x} &= -L \frac{\partial \dot{i}_1}{\partial t} - M \frac{\partial \dot{i}_2}{\partial t} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} &= -L \frac{\partial \dot{i}_2}{\partial t} - M \frac{\partial \dot{i}_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \dot{i}_1}{\partial x} &= -(C+\gamma) \frac{\partial v_1}{\partial t} + \gamma \frac{\partial v_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \dot{i}_2}{\partial x} &= \gamma \frac{\partial v_1}{\partial t} - (C+\gamma) \frac{\partial v_2}{\partial t}\end{aligned}$$

Le terme $M.\partial i_2/\partial t$ représente le couplage de la ligne 2 vers la ligne 1. Ce terme est souvent négligé car le couplage entre les deux lignes n'est pas favorable. Justifions ceci sur un exemple : supposons que 10 % de l'énergie transite de la ligne 1 vers la ligne 2 ; il vient que 10 % de cette énergie retourne vers la ligne 1. Le fait de négliger le terme $M.\partial i_2/\partial t$ revient donc à négliger 1 % de l'énergie renvoyé de la ligne 2 vers la ligne 1. Avec le même raisonnement on peut négliger le terme $\gamma.\partial v_2/\partial t$.

5.2.2) Tension sur la ligne 2

On est en présence de quatre équations et nous cherchons à déterminer l'allure de la tension sur la ligne 2. Prenons, les transformées de Laplace des équations précédentes.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = -LpI_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} = -LpI_2 - MpI_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \dot{i}_1}{\partial x} = -(C+\gamma)pV_1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \dot{i}_2}{\partial x} = \gamma pV_1 - (C+\gamma)pV_2 \quad (4)$$

(1) et (3) donnent :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = L(C+\gamma)p^2 V_1 \quad (5)$$

Pour que l'équation soit homogène, il est « naturel » de poser le terme $L(C+\gamma)$ comme

étant l'inverse d'une vitesse au carré. Donc $v = \frac{1}{\sqrt{L(C+\gamma)}}$. (2), (3) et (4) donnent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} &= -Lp(\gamma p V_1 - (C+\gamma)p V_2) - Mp(-(C+\gamma)p V_1) \\
\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - L(C+\gamma)p^2 V_2 &= (-L\gamma + M(C+\gamma))p^2 V_1 \\
\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - L(C+\gamma)p^2 V_2 &= \left(-\frac{\gamma}{(C+\gamma)} + \frac{M}{L} \right) \left(\frac{P}{v} \right)^2 V_1
\end{aligned} \tag{6}$$

Posons maintenant : $K = \frac{M}{L} \left(\frac{C+\gamma}{\gamma} \right)$ et $\alpha = \frac{\gamma}{C+\gamma}$. L'équation (6) est alors :

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - L(C+\gamma)p^2 V_2 = \alpha(K-1) \left(\frac{P}{v} \right)^2 V_1 \tag{7}$$

La solution de l'équation (5) est la somme d'une onde de tension se propageant dans le sens des $x > 0$ et dans le sens des $x < 0$:

$$V_1 = A e^{-\frac{px}{v}} + B e^{+\frac{px}{v}} \tag{8}$$

Les deux constantes A et B sont à déterminer avec les conditions aux limites. Reportons (8) dans (7) :

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - L(C+\gamma)p^2 V_2 = A\alpha(K-1) \left(\frac{P}{v} \right)^2 e^{-\frac{px}{v}} + B\alpha(K-1) \left(\frac{P}{v} \right)^2 e^{+\frac{px}{v}} \tag{9}$$

La solution de l'équation (9) est la somme d'une solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. La solution de l'équation sans second membre est :

$$V_2 = C e^{-\frac{px}{v}} + D e^{+\frac{px}{v}}$$

La solution particulière est de la forme :

$$V_2 = E e^{-\frac{px}{v}} + F e^{+\frac{px}{v}}$$

En calculant séparément E et F, on obtient la solution générale de l'équation (7) :

$$V_2 = \left(D - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p A \right) e^{-\frac{px}{v}} + \left(E + \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p B \right) e^{+\frac{px}{v}} \tag{10}$$

A, B, D et E sont des constantes qui sont à préciser lors des conditions aux limites. Nous avons quatre inconnues, il faut donc quatre équations pour résoudre. Nous allons

déterminer le courant I_2 et les relations entre la tension V_2 et le courant I_2 par l'intermédiaire des résistances d'entrée et de sortie de la ligne 2 nous donnera les quatre équations.

5.2.3. Courant sur la ligne 2

Déterminons maintenant le courant I_2 . La relation (1) nous donne le courant I_1 :

$$I_1 = -\frac{1}{Lp} \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{1}{Lv} \left(A e^{-p\frac{x}{v}} - B e^{+p\frac{x}{v}} \right)$$

La quantité $L.v$ est homogène à une impédance caractéristique Z_c . La relation (2) nous fournit le courant I_2 .

$$I_2 = -\frac{1}{Lp} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + Mp I_1 \right)$$

$$I_2 = -\frac{1}{Lp} \left(e^{-p\frac{x}{v}} \left(-D \frac{p}{v} + \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v^2} p^2 A - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{1}{v} p A \right) + e^{+p\frac{x}{v}} \left(E \frac{p}{v} + \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v^2} p^2 B - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{1}{v} p B \right) + \frac{Mp}{Lv} \left(A e^{-p\frac{x}{v}} - B e^{+p\frac{x}{v}} \right) \right)$$

$$I_2 = -\frac{1}{Lv} \left(e^{-p\frac{x}{v}} \left(-D + \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p A - \alpha \frac{K-1}{2} A + A \frac{M}{L} \right) + e^{+p\frac{x}{v}} \left(E + \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p B - \alpha \frac{K-1}{2} B - B \frac{M}{L} \right) \right)$$

$$I_2 = \frac{1}{Lv} \left(e^{-p\frac{x}{v}} \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} A - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p A \right) + e^{+p\frac{x}{v}} \left(-E + \alpha \frac{K+1}{2} B - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} p B \right) \right)$$

5.3) Etude d'un exemple

Supposons les lignes adaptées en entrée et en sortie comme représentée sur la Figure ci-dessous. Comme il n'existe pas d'ondes réfléchies, la tension et le courant sur la ligne 1 sont données par les relations suivantes :

$$V_1 = V(p) e^{-p\frac{x}{v}} \text{ et } I_1 = \frac{V(p)}{R_c} e^{-p\frac{x}{v}}.$$

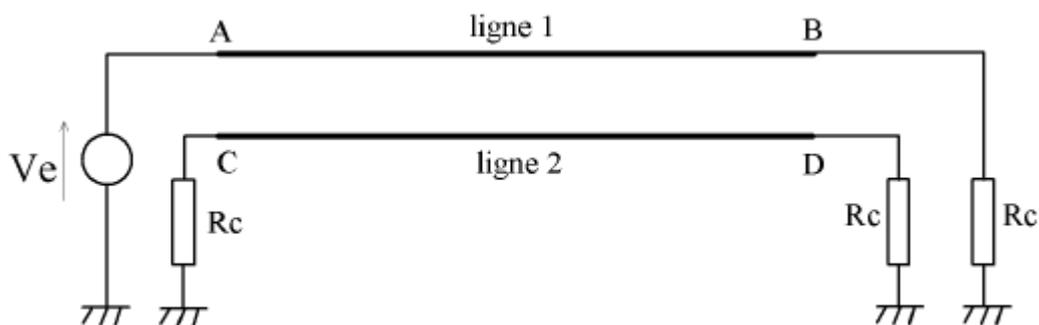


Figure : lignes chargées par leur impédance caractéristique

5.3.1) Expressions donnant la tension et le courant sur la ligne parasitée

Les autres relations se simplifient. On obtient deux équations qui décrivent la tension et le courant sur la ligne 2.

$$V_2(x) = \left(D - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} pV \right) e^{-p\frac{x}{v}} + E e^{+p\frac{x}{v}}$$

$$I_2(x) = \frac{1}{Lv} \left(e^{-p\frac{x}{v}} \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} V - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} pV \right) - E \cdot e^{+p\frac{x}{v}} \right)$$

5.3.2) Déterminations des constantes D et E

Pour déterminer D et E, on écrit les conditions aux limites :

- En entrée de la ligne, en $x = 0$, on a :

$$V_2(0) = D + E = -Rc I_2(0) \quad \text{et} \quad I_2(0) = \frac{1}{Rc} \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} V - E \right)$$

- En sortie de la ligne en $x = l$,

$$V_2(l) = \left(D - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{l}{v} pV \right) e^{-p\frac{l}{v}} + E e^{+p\frac{l}{v}} = Rc I_2(l) \text{ et}$$

$$I_2(l) = \frac{1}{Rc} \left(e^{-p\frac{l}{v}} \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} V - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{l}{v} pV \right) - E \cdot e^{+p\frac{l}{v}} \right)$$

Nous avons deux équations et deux inconnues :

- En $x = 0$,

$$V_2(0) = -Rc I_2(0) \Rightarrow D + E = - \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} V - E \right) \Rightarrow \boxed{D = \alpha \frac{K+1}{4} V}$$

- En $x = l$, $V_2(l) = Rc I_2(l)$

$$V_2(l) = \left(D - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{l}{v} pV \right) e^{-p\frac{l}{v}} + E e^{+p\frac{l}{v}} = \left(e^{-p\frac{l}{v}} \left(D - \alpha \frac{K+1}{2} V - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{l}{v} pV \right) - E \cdot e^{+p\frac{l}{v}} \right)$$

$$\Rightarrow 2E e^{+p\frac{l}{v}} = \left(e^{-p\frac{l}{v}} \left(-\alpha \frac{K+1}{2} V \right) \right) \Rightarrow \boxed{E = -\alpha \frac{K+1}{4} V e^{-2p\frac{l}{v}}}$$

On reporte D et E dans les expressions de V_2 et I_2 et on obtient :

$$V_2 = \left(\alpha \frac{K+1}{4} V - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} pV \right) e^{-p \frac{x}{v}} - \alpha \frac{K+1}{4} V e^{-p \frac{2l-x}{v}}$$

$$I_2 = \frac{1}{Rc} \left(e^{-p \frac{x}{v}} \left(-\alpha \frac{K+1}{4} V - \alpha \frac{K-1}{2} \frac{x}{v} pV \right) + \alpha \frac{K+1}{4} V e^{-p \frac{2l-x}{v}} \right)$$

5.4) Solutions des équations

A partir des 2 relations encadrées juste au-dessus, en entrée de la ligne et pour en $x = 0$, on a pour la tension V_2 :

$$V_2(0) = D + E = \alpha \frac{K+1}{4} V - \alpha \frac{K+1}{4} V e^{-2p \frac{l}{v}} = \alpha \frac{K+1}{4} V \left(1 - e^{-2p \frac{l}{v}} \right)$$

En sortie de la ligne en $x = l$, on a pour la tension V_2 :

$$V_2(l) = -\alpha \frac{K-1}{2} \tau pV e^{-p\tau}$$

L'original des transformées de Laplace de $V_2(0)$ et $V_2(l)$ sont alors en remplaçant K et a par leurs valeurs :

$$v_2(t,0) = \alpha \frac{K+1}{4} V (v(t) - v(t-2\tau)) = \frac{\gamma}{C+\gamma} \frac{M \left(\frac{C+\gamma}{\gamma} \right)^{+1}}{L} V [v(t) - v(t-2\tau)] = \frac{V}{4} \left(\frac{M}{L} + \frac{\gamma}{C+\gamma} \right) [v(t) - v(t-2\tau)]$$

$$v_2(t,l) = -\alpha \frac{K-1}{2} \tau \frac{d(v(t-\tau))}{dt} V = -\frac{\gamma}{C+\gamma} \frac{M \left(\frac{C+\gamma}{\gamma} \right)^{-1}}{L} \tau \frac{d(v(t-\tau))}{dt} V = \frac{V}{2} \left(\frac{M}{L} - \frac{\gamma}{C+\gamma} \right) \tau \frac{d(v(t-\tau))}{dt}$$

$v(t)$ est un signal de la Figure ci-dessous et avec une amplitude unitaire.

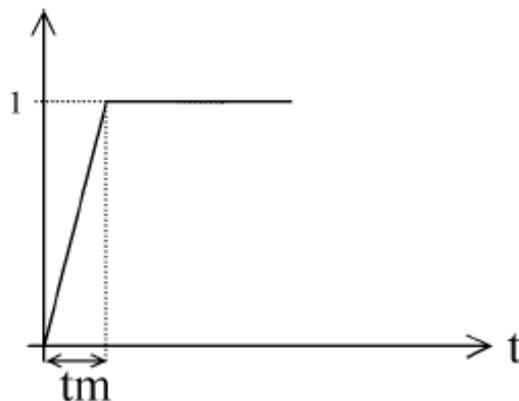


Figure : allure du signal sur la ligne parasitante

La dérivée est non nulle uniquement pendant la durée tm . On peut écrire alors :

$$v_2(t, l) = -\frac{V}{2} \left(\frac{M}{L} - \frac{\gamma}{C + \gamma} \right) \frac{\tau}{tm}$$

5.4.1) Allure des signaux sur la ligne parasitée

On considère le schéma de la Figure 5. La tension d'entrée est de la même forme que le signal de la Figure ci-dessus. Les tensions en entrée et en sortie de la ligne parasitée sont données par les expressions précédentes et leur forme en fonction du temps est donnée à la Figure ci-dessous. Sur la ligne parasitée il apparaît deux tensions qui sont appelées : onde arrière pour celle qui apparaît en arrière de la ligne 2 et l'onde avant pour la tension qui apparaît en avant de la ligne 2. La largeur de l'onde arrière est de 2τ tandis que la largeur de l'onde avant est de tm . L'onde avant apparaît décalée de τ . Les amplitudes de l'onde arrière et de l'onde avant dépendent de $\alpha = \frac{M}{L} \left(\frac{C + \gamma}{\gamma} \right)$ et $\alpha = \frac{\gamma}{C + \gamma}$. Ceux-ci sont caractéristiques de la ligne.

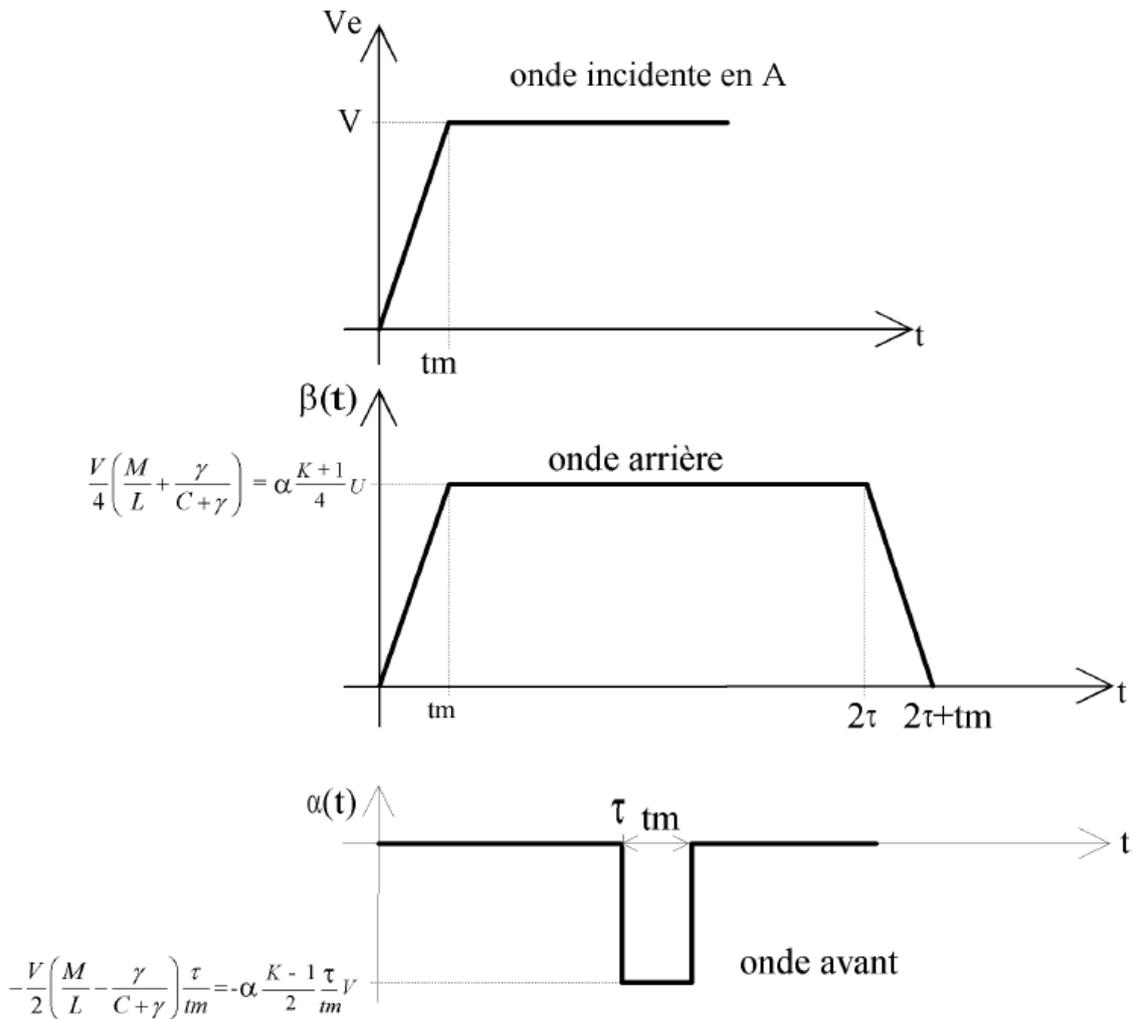


Figure : allure de l'onde arrière et de l'onde avant

5.4.2) Impédance et vitesse de mode commun et de mode différentielle

L'amplitude de l'onde avant et de l'onde arrière donnée dans le paragraphe précédent dépend de la configuration des lignes : pour certaines lignes le couplage magnétique est prédominant tandis que pour d'autres c'est le couplage électrique qui est le plus important. Nous allons calculer les vitesses et les impédances caractéristiques en mode différentiel et en mode commun et nous montrerons que dans le cas d'égalité des 2 vitesses, l'onde avant s'annule.