Chapitre 4 : Algèbre de Boole

1. Introduction

C'est une algèbre binaire mise en œuvre par le mathématicien anglais George BOOLE (1815-1864) pour étudier la logique. Les variables, dites booléennes, ne peuvent prendre que deux valeurs : VRAI ou FAUX ou bien encore 1 ou 0. On peut alors définir des opérateurs sur ces variables et consigner le résultat dans une TABLE DE VERITE. Ces opérateurs peuvent être réalisés par des circuits électroniques : ils sont alors appelés PORTES LOGIQUES.

2. Définition et propriétés de l'algèbre de Boole

Soit B un ensemble sur lequel sont définies deux opérations binaires + et ×, et une opération unitaire, notée ' ; soient 0 et 1 deux éléments distincts de B. Dans ces conditions, le sextuplet : (B,+,×, ', 0, 1) est une algèbre de Boole si les postulats suivants, relatifs à des éléments quelconques a, b et c de B sont satisfaits :

Commutativité	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
Distributivité	$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$
Identité	$a + 0 = a$	$a \times 1 = a$
Complémentarité	$a + a' = 1$	$a \times a' = 0$

0 est dit l'élément nul, 1 est l'élément unité et a' (ou $\overline{a}$) est le complément de a. Les opérations + et × sont appelées respectivement : somme et produit. Souvent nous écrivons le symbole × sous la forme . (un simple point) ou bien nous l'ignorons tout simplement. C'est-à-dire :

$$a \times (b + c) = a \cdot (b + c) = a\,(b + c)$$

2.1. Priorité des opérateurs

La première priorité est aux parenthèses, ensuite la priorité est à la négation ’ (ou ¯) ensuite à l’opérateur × et enfin à l’opérateur +.

Exemple :

a + b × c signifie a + (b × c) et non pas (a + b) × c
a × b’ signifie a× (b’) et non pas (a × b)’

Remarque :

Attention ! Bien que leur nom et leur symbole se ressemblent, ne confondons pas la somme et le produit logiques avec la somme et le produit arithmétiques, tels que nous les connaissons. Les premiers s'exercent sur des valeurs logiques, les seconds sur des nombres.

Convention :

Puisque notre utilisation de l’algèbre de Boole sera exclusivement pour réaliser des circuits logiques à partir de portes logiques, nous appellerons dès maintenant l’opérateur × par ET logique (AND) et l’opérateur + par OU logique (OR). Quand au complément de a : $\overline{a}$, il représente la négation logique de a, c'est-à-dire NON a (NOT a).

Exemple :

Soit B l’ensemble {0,1} sur lequel sont définies les opérateurs + et ×. Supposons que les compléments soient définis par $\overline{1}$ = 0 et $\overline{0}$ = 1, alors B est une algèbre de Boole.

+	**1**	**0**
1	1	1
0	1	0

x	**1**	**0**
1	1	0
0	0	0

2.2. Principe de Dualité

Le dual d'un énoncé quelconque d'une algèbre de Boole B est l'énoncé obtenu par inversion des opérateurs + et × ainsi que des éléments 0 et 1 dans l'expression originale. Le dual d'une expression vérifiée vraie est également vrai. C'est-à-dire que si l'expression d'origine est vraie, son dual est vrai également.

Exemple : Le dual de l'expression booléenne :

$(1 + a) \times (b + 0) = b$ est $(0 \times a) + (b \times 1) = b$

2.3. Théorèmes fondamentaux

Soient a, b et c des éléments d'une algèbre de Boole :

- Loi d'idempotence : $a + a = a$ $a \times a = a$
  $a + 1 = 1$ $a \times 0 = 0$
- Loi d'absorption : $a + (a \times b) = a$ $a \times (a + b) = a$
- Loi d'associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- Unicité du complément : Si $a + x = 1$ et $a \times x = 0$ $x = \overline{a}$
  C.à.d : $a + \overline{a} = 1$ et $a \times \overline{a} = 0$
- Loi d'involution: $\overline{\overline{a}} = a$ // $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$
- Loi de Morgan: $\overline{(a + b)} = \overline{a} \times \overline{b}$ $\overline{(a \times b)} = \overline{a} + \overline{b}$
- Généralisation de la loi de Morgan :

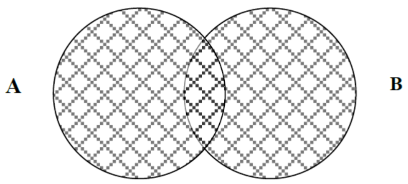
$\overline{(a + b + c + \ldots)} = \overline{a} \times \overline{b} \times \overline{c} \times \ldots$ $\overline{(a \times b \times c \times \ldots)} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \ldots$

Remarques (Diagramme de Venn):

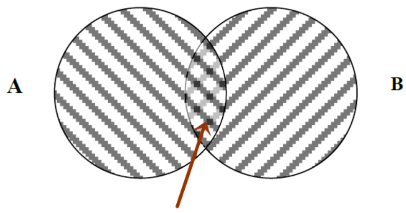
Il existe un moyen très visuel de traduire ces concepts un peu abstraits : il consiste à considérer les classes de Boole comme des ensembles. *« L'idée n'est pas si niaise puisqu'un grand mathématicien anglais, John Venn [1834-1923] nous a d'ailleurs précédés. ».*

Dès lors, les opérations fondamentales de Boole prennent la forme d'opérateurs sur les ensembles et on peut alors utiliser des diagrammes de Venn pour les représenter :

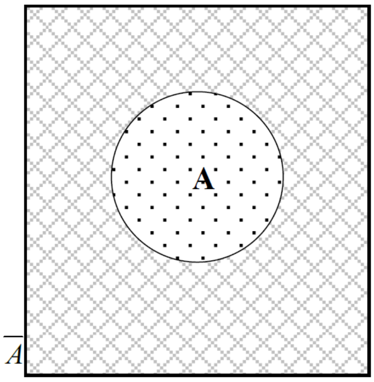
- La somme logique de deux classes (A + B) se traduit par l'union (A ∪ B) entre les deux ensembles correspondants,
- Le produit logique (A . B) par l'intersection (A ∩ B),
- Le complément $\overline{A}$ de A par le complément d'un ensemble A.



$(A \cup B) \leftrightarrow A+B$



$(A \cap B) \leftrightarrow A.B$



$C(A) \leftrightarrow \overline{A}$

Exemple : Simplifions les expressions suivantes autant que possible en utilisant les différentes lois vues au cours :

- $E1 = a + (\overline{a} . b)$ et $E2 = (a + b) \times (a + \overline{b})$
- $E1 = a + (\overline{a} . b) = (a + \overline{a}) . (a + b) = 1 . (a + b) = a + b$
- $E2 = (a + b) . (a + \overline{b}) = a . (a + \overline{b}) + b . (a + \overline{b}) = aa + a\overline{b} + ba + b\overline{b} =$

  $a + a\overline{b} + ab = a + a(\overline{b} + b) = a + a.1 = a + a = a$

2.4. Fonction Booléenne

$$F(A,B,C) = A\,B\,\overline{C} + A\,\overline{C}\,B + \overline{A}\,B\,C$$

C’est une fonction qui relie N variables logiques avec un ensemble d’opérateurs logiques. Sachant qu’une variable logique (booléenne) est une variable qui peut prendre soit la valeur 0 ou 1. La valeur d’une fonction logique est égale à 1 ou 0 également, selon les valeurs des variables logiques. Si une fonction logique possède N variables logiques, ça implique qu’il peut y avoir 2^n combinaisons de ses variables, donc cette même fonction peut avoir 2^n valeurs. Les 2^n combinaisons sont représentées dans une table appelée table de vérité (T.V).

Exemple :

Soit la fonction logique $F(A,B,C) = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$

A	**B**	**C**		**F**
0	0	0		0
0	0	1		1
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		0
1	1	1		1

2.4.1. Forme canonique d’une fonction logique

On appel forme canonique d’une fonction la forme ou chaque terme de la fonction comportent toutes les variables.

Exemple :

La fonction $F(A,B,C) = A\,B\,\overline{C} + A\,\overline{C}\,B + \overline{A}\,B\,C$ est sous forme canonique.

2.4.1.1. Première forme canonique (forme disjonctive)

C’est la forme exprimée en somme de produits (ou somme des mintermes). On dit aussi que c’est une disjonction de conjonctions. Cette forme est la forme la plus utilisée.

Exemple :

La fonction suivante est sous la première forme canonique :

$$F(A,B,C) = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$$

2.4.1.2. Deuxième forme canonique (forme conjonctive)

C'est la forme exprimée en produit de sommes (ou produit de maxtermes). On dit aussi que c'est une conjonction de disjonctions. Les deux formes (1ère et 2ème) canoniques sont équivalentes.

Exemple :

La fonction suivante est sous la deuxième forme canonique :

$$F(A,B,C) = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)$$

2.4.2. Extraction de la fonction logique à partir de la T.V

Une fonction peut être exprimé sous sa première forme canonique ou sous sa deuxième forme canonique à partir de sa propre table de vérité. La meilleure façon d'illustrer ça, sera par un exemple :

A	**B**	**C**		**F**		
0	0	0		0	→ $A+B+C$	
0	0	1		0	→ $A+B+\overline{C}$	MAX TERMES
0	1	0		0	→ $A+\overline{B}+C$	
0	1	1		1	→ $\overline{A}.B.C$	
1	0	0		0	→ $\overline{A}+B+C$	
1	0	1		1	→ $A.\overline{B}.C$	
1	1	0		1	→ $A.B.\overline{C}$	MIN TERMES
1	1	1		1	→ $A.B.C$	

On peut exprimer la fonction F sous forme de produits de maxtermes (2ème FC) à partir des lignes contenant « 0 » dans la table de vérité :

$$F(A,B,C) = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)$$

Ou sous forme de sommes de mintermes (1ère FC) à partir des lignes contenant « 1 » dans la table de vérité de F.

$$F(A, B,C) = \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.C + A.B.\overline{C} + A.B.C$$

Remarque :

'Comment Retrouver une forme canonique à partir d'une équation simplifiée ?'

On peut toujours ramener n'importe quelle fonction logique à l'une des formes canoniques. Cela revient à rajouter les variables manquantes dans les termes qui ne contiennent pas toutes les variables (les termes non canoniques). Cela est possible en utilisant les règles de l'algèbre de Boole :

- Multiplier un terme avec une expression qui vaut 1,
- Additionner à un terme avec une expression qui vaut 0,
- Par la suite faire la distribution,

C'est-à-dire : il suffit de compléter la ou les variables manquantes dans chaque terme sans modifier l'état de la fonction. Par exemple, pour la fonction logique, H1, de trois variables (a, b, c) et dont l'équation logique "simplifiée" est :

$$H_1(a, b, c) = a.\overline{b} + a.b.\overline{c}$$

La première forme canonique peut être obtenue de la manière suivante :

$$H_1(a, b, c) = a.\overline{b} + a.b.\overline{c} = a.\overline{b}.(c+\overline{c}) + a.b.\overline{c} = a.\overline{b}.c + a.\overline{b}.\overline{c} + a.b.\overline{c}$$

On remarque que le terme ajouté ne modifie pas la fonction, car ce terme vaut 1,

Exemples :

- $F(A,B) = A + B$

  $= A\,(B+\overline{B}) + B\,(A+\overline{A})$

  $= AB + A\overline{B} + AB + \overline{A}B$

  $= AB + A\overline{B} + \overline{A}B$

- $F(A,B,C) = AB + C$

  $= AB\,(C + \overline{C}) + C\,(A + \overline{A})$

  $= ABC + AB\overline{C} + AC + \overline{A}C$

  $= ABC + AB\overline{C} + AC\,(B + \overline{B}) + \overline{A}C\,(B + \overline{B})$

  $= ABC + AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C$

  $= ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C$

2.4.3. Complément d'une fonction

On obtient le complément d'une fonction (négation d'une fonction) par application de la loi de Morgan si elle est sous l'une de ses formes canoniques ou par inversion de sa table de vérité. En général, on déduit le complément d'une fonction sous l'une des deux formes canoniques en remplaçant les OU par des ET, les ET par des OU et chaque terme par son complément.

Exemple1 :

$F(A, B, C, D) = A + \overline{A}B + (C + \overline{D})$

$\overline{F}(A, B, C, D) = \overline{A + \overline{A}B + (C + \overline{D})} = \overline{A}.(\overline{\overline{A}} + \overline{B}).\overline{C}.\overline{\overline{D}} = \overline{A}.(A + \overline{B}).\overline{C}.D$

Exemple2 :

Calculez le complément de la fonction présentée dans ***2.4.2***