Calcul de norme d'application linéaire

Exercice 1 [00491] [correction]
On note $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme N_∞. Pour $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ on pose $T(u)$ et $\Delta(u)$ les suites définies par

$$T(u)_n = u_{n+1} \text{ et } \Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$$

a) Montrer que les applications T et Δ sont des endomorphismes continus de E.
b) Calculer leur norme.

Exercice 2 [00492] [correction]
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On définit N_1 et N_2 par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

a) On définit $T : E \to F$ par : pour tout $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que T est une application linéaire continue.
b) Calculer la norme de T.

Exercice 3 [00493] [correction]
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\,.\,\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f|$$

Etudier la continuité de la forme linéaire $\varphi : f \mapsto f(1) - f(0)$ et calculer sa norme.

Exercice 4 [00494] [correction]
On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\,.\,\|_2$. Pour f et φ éléments de E on pose

$$T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que T_φ est une forme linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 5 [00495] [correction]
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\,.\,\|_1$ définie par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Etudier la continuité de la forme linéaire

$$\varphi : f \mapsto \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$$

et calculer sa norme.

Exercice 6 [00496] [correction]
Soient $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de E qui envoie $f \in E$ sur la fonction

$$u(f) : x \mapsto f(x) - f(0)$$

a) Montrer que pour E muni de $\|\,.\,\|_\infty$ l'endomorphisme u est continu.
b) Montrer que pour E muni de $\|\,.\,\|_1$ l'endomorphisme u n'est pas continu.

Exercice 7 [00497] [correction]
Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit N_1 et N_2 par :

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$$

a) Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
b) Montrer que la dérivation est continue pour N_1 et calculer sa norme.
c) Montrer que la dérivation n'est pas continue pour N_2.
d) N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Exercice 8 [00498] [correction]
On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\|\,.\,\|_\infty$. Pour f et φ éléments de E on pose

$$T_\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que T_φ est une forme linéaire continue et calculer sa norme. On pourra pour cela introduire les fonctions

$$f_\varepsilon : t \mapsto \frac{\varphi(t)}{|\varphi(t)| + \varepsilon}$$

Exercice 9 [00499] [correction]
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\,.\,\|_\infty$.
Montrons que l'application $u : f \mapsto u(f)$ où $u(f)(x) = f(0) + x(f(1) - f(0))$ est un endomorphisme continue de E et calculer sa norme.

Exercice 10 [00500] [correction]
Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\,.\,\|_\infty$.
a) Montrer que pour toute fonction $f \in E$, il existe une unique primitive F de f vérifiant

$$\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

b) Etablir que l'application $u : f \mapsto F$ est un endomorphisme continu.
c) Justifier

$$F(x) = \int_0^1 \left(\int_t^x f(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t$$

d) Calculer $\|u\|$.

Exercice 11 [01012] [correction]
Pour $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$ et $u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle a, u\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n$$

a) Justifier l'existence de $\langle a, u\rangle$.
b) Montrer que l'application linéaire $\varphi_u : a \mapsto \langle a, u\rangle$ est continue et calculer sa norme.
c) Même question avec $\psi_a : u \mapsto \langle a, u\rangle$.

Exercice 12 [03266] [correction]
Soit E l'espace des fonctions continues de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ normé par

$$N_2(f) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2\right)^{1/2}$$

a) Soit ϕ une fonction continue bornée. Montrer que l'application

$$u : f \mapsto \phi f$$

définit un endomorphisme continue de E.
b) Soient x_0 fixé dans $\mathbb{R}$ et f_n la fonction continue valant 1 en x_0, affine sur $[x_0 - 1/n, x_0]$ et $[x_0, x_0 + 1/n]$ et nulle ailleurs. Montrer que pour une fonction g définie continue sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} f_n^2 g}{\int_{\mathbb{R}} f_n^2} = g(x_0)$$

c) Calculer la norme de l'endomorphisme u défini à la première question.

Exercice 13 [03300] [correction]
On note E l'espace des fonctions réelles définies et continues sur $[0,1]$.
On note E_∞ cet espace muni de la norme

$$\|\,.\,\|_\infty : f \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

et E_1 cet espace muni de la norme

$$\|\,.\,\|_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Soit u l'endomorphisme de E défini par

$$u(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que l'application v de E_∞ vers E_1 qui à f associe $u(f)$ est continue et déterminer sa norme.
b) Montrer que l'application w de E_1 vers E_∞ qui à f associe $u(f)$ est continue et déterminer sa norme.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
a) Pour tout $u \in \ell^\infty(\mathbb{R})$, on a $|T(u)_n| \leqslant N_\infty(u)$ et $|\Delta(u)_n| \leqslant 2N_\infty(u)$ donc $T(u), \Delta(u) \in \ell^\infty(\mathbb{R})$.
Les applications T et Δ sont bien à valeurs dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$, de plus elles sont clairement linéaires et

$$N_\infty(T(u)) \leqslant N_\infty(u) \text{ et } N_\infty(\Delta(u)) \leqslant 2N_\infty(u)$$

donc elles sont aussi continues.
b) Par l'étude qui précède on a déjà

$$\|T\| \leqslant 1 \text{ et } \|\Delta\| \leqslant 2$$

Pour $u = (1)$, on a $N_\infty(u) = 1$ et $N_\infty(T(u)) = 1$ donc $\|T\| = 1$.
Pour $u = ((-1)^n)$, on a $N_\infty(u) = 1$ et $N_\infty(\Delta(u)) = 2$ donc $\|\Delta\| = 2$.

Exercice 2 : [énoncé]
a) L'application T est bien définie et est clairement linéaire. Pour tout $x \in [0,1]$, $|T(f)(x)| \leqslant xN_1(f)$ donc

$$N_2(T(f)) = \|T(f)\|_\infty + \|f\|_\infty \leqslant 2N_1(f)$$

Ainsi T est continue.
b) Par l'étude ci-dessus, on a déjà $\|T\| \leqslant 2$. Pour $f(t) = 1$, on a $N_1(f) = 1$, $T(f)(x) = x$ et donc $N_2(T(f)) = 2$. Ainsi $\|T\| = 2$.

Exercice 3 : [énoncé]
Pour tout $f \in E$,

$$|\varphi(f)| \leqslant |f(1)| + |f(0)| \leqslant 2\|f\|_\infty$$

donc φ est continue et

$$\|\varphi\| \leqslant 2$$

Pour $f : x \mapsto 2x - 1$, $f \in E$, $\|f\|_\infty = 1$ et $u(f) = 2$ donc

$$\|\varphi\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\varphi(f)| = \max_{\|f\| \leqslant 1} |\varphi(f)| = 2$$

Exercice 4 : [énoncé]
$T_\varphi : E \to \mathbb{R}$ est bien définie et est clairement linéaire. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|T_\varphi(f)| \leqslant \|\varphi\|_2 \|f\|_2$$

donc T_φ est continue et $\|T_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_2$.
De plus pour $f = \varphi$, $|T_\varphi(f)| = \|\varphi\|_2 \|f\|_2$ donc

$$\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_2$$

Exercice 5 : [énoncé]
Pour tout $f \in E$,

$$|\varphi(f)| = \int_0^1 |tf(t)| \,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_1$$

donc φ est continue et

$$\|\varphi\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\varphi(f)| \leqslant 1$$

Pour $f : t \mapsto t^n$, $\|f\|_1 = \frac{1}{n+1}$ et $|\varphi(f)| = \int_0^1 t^{n+1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}$ donc

$$\frac{|\varphi(f)|}{\|f\|_\infty} = \frac{n+1}{n+2} \to 1$$

d'où

$$\|\varphi\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\varphi(f)| = 1$$

Exercice 6 : [énoncé]
a) On a

$$\|u(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + |f(0)| \leqslant 2\|f\|_\infty$$

donc l'endomorphisme u est continu pour la norme $\|\,.\,\|_\infty$.
b) Pour $f : x \mapsto (n+1)(1-x)^n$, $\|f\|_1 = 1$ et

$$\|u(f)\|_1 = \int_0^1 (n+1) - (n+1)(1-x)^n \mathrm{d}x = n \to +\infty$$

L'endomorphisme u n'est donc pas continu pour la norme $\|\,.\,\|_1$.

Exercice 7 : [énoncé]
a) L'application $N_1 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ est bien définie car la somme se limite à un nombre fini de termes non nuls.
Si $N_1(P) = 0$ alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, P^{(k)}(0) = 0$$

or

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

donc $P = 0$.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$N_1(P+Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0) + Q^{(k)}(0)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| + \left|Q^{(k)}(0)\right|$$

donc

$$N_1(P+Q) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| + \sum_{k=0}^{+\infty} \left|Q^{(k)}(0)\right| = N_1(P) + N_1(Q)$$

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$N_1(\lambda P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\lambda P^{(k)}(0)\right| = |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| = |\lambda| N_1(P)$$

Finalement N_1 est une norme.
L'application $N_2 : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^+$ est bien définie car une fonction continue sur un segment y est bornée.
Si $N_2(P) = 0$ alors

$$\forall t \in [-1,1], P(t) = 0$$

Par infinité de racines $P = 0$.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$N_2(P+Q) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t) + Q(t)| \leqslant \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| + |Q(t)|$$

donc

$$N_2(P+Q) \leqslant \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| + \sup_{t\in[-1,1]} |Q(t)| = N_2(P) + N_2(Q)$$

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$N_2(\lambda P) = \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda P(t)| = \sup_{t\in[-1,1]} |\lambda| |P(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)| = |\lambda| N_2(P)$$

Finalement N_2 est aussi norme.
b) Notons $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'opération de dérivation.

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], N_1(D(P)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|D(P)^{(k)}(0)\right| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k+1)}(0)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^k(0)\right| = N_1(P)$$

donc l'endomorphisme D est continu pour la norme N_1 et $\|D\| \leqslant 1$. Pour $P = X$, on a $N_1(P) = 1$ et $N_1(D(P)) = 1$ donc $\|D\| = 1$.
c) Soit $P_n = X^n$. On a $D(P_n) = nX^{n-1}$ donc $N_2(P_n) = 1$ et $N_2(D(P_n)) = n \to +\infty$.
Par suite l'endomorphisme D n'est pas continu pour N_2.
d) Par ce qui précède, les normes ne sont pas équivalentes. Néanmoins $P = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$ donc

$$|P(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left|P^{(k)}(0)\right|}{k!} \leqslant N_1(P)$$

donc

$$N_2(P) \leqslant N_1(P)$$

C'est là la seule (et la meilleure) comparaison possible.

Exercice 8 : [énoncé]
L'application $T_\varphi : E \to \mathbb{R}$ est bien définie et est clairement linéaire. Par l'inégalité

$$|T_\varphi(f)| \leqslant \int_0^1 |\varphi(t)| \, dt \, \|f\|_\infty$$

on obtient T_φ est continue et

$$\|T_\varphi\| \leqslant \int_0^1 |\varphi(t)| \, dt$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $f_\varepsilon = \frac{\varphi}{|\varphi|+\varepsilon}$. On observe $\|f_\varepsilon\|_\infty \leqslant 1$ et

$$T_\varphi(f_\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\varphi^2(t)}{|\varphi(t)| + \varepsilon} \, dt$$

donc

$$\left|T_\varphi(f_\varepsilon) - \int_0^1 |\varphi(t)| \, dt\right| \leqslant \int_0^1 \frac{\varepsilon |\varphi(t)|}{|\varphi(t)| + \varepsilon} \, dt \leqslant \varepsilon$$

puis

$$T_\varphi(f_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or $|T_\varphi(f_\varepsilon)| \leqslant \|T_\varphi\|\,\|f_\varepsilon\|$ donc on en déduit que $\|T_\varphi\| \geqslant \int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$ et finalement

$$\|T_\varphi\| = \int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9 : [énoncé]
u est clairement un endomorphisme de E.

$$u(f)(x) = (1-x)f(0) + xf(1)$$

donc

$$|u(f)(x)| \leqslant (1-x)\,|f(0)| + x\,|f(1)| \leqslant (1-x)\,\|f\|_\infty + x\,\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

Ainsi $\|u(f)\| \leqslant \|f\|$. L'endomorphisme u est continu et $\|u\| \leqslant 1$.
Pour $f : x \mapsto 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et $\|u(f)\|_\infty = 1$ donc $\|u\| \geqslant 1$ puis

$$\|u\| = 1$$

Exercice 10 : [énoncé]
a) Les primitives de f sont de la forme $\varphi + C^{te}$ avec $\varphi : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Parmi celles-ci une seule est d'intégrale nulle c'est

$$F = \varphi - \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

b) L'application u est bien définie de E vers E car une primitive est une fonction continue. Pour $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ et $f,g \in E$, $(\lambda u(f) + \mu u(g))' = \lambda f + \mu g$ et $\int_0^1 \lambda u(f) + \mu u(g) = 0$ donc $u(\lambda f + \mu g) = \lambda u(f) + \mu u(g)$. Ainsi u est un endomorphisme.

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

donc aisément $|F(x)| \leqslant 2\,\|f\|_\infty$ puis $\|F\|_\infty \leqslant 2\,\|f\|_\infty$. Ainsi u est continue.
c)

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t$$

et par intégration d'une constante

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u$$

On conclut par la linéarité et la relation de Chasles.
d) On a

$$|F(x)| \leqslant \int_0^1 |x-t|\,\|f\|_\infty\,\mathrm{d}t$$

et en découpant l'intégrale en x, on obtient

$$\int_0^1 |x-t|\,\mathrm{d}t = x^2 - x + \frac{1}{2}$$

donc

$$|F(x)| \leqslant \frac{1}{2}\,\|f\|_\infty$$

puis $\|F\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}\,\|f\|_\infty$ car $\sup\limits_{x\in[0,1]} (x^2 - x + 1/2) = \frac{1}{2}$. Ainsi $\|u\| \leqslant 1/2$.
Enfin pour $f : x \mapsto 1$, $\|f\|_\infty = 1$, $F : x \mapsto x - 1/2$ et $\|F\|_\infty = 1/2$ donc $\|u\| = 1/2$

Exercice 11 : [énoncé]
a) On a $|a_nu_n| \leqslant \|a\|_\infty\,|u_n|$ et $\sum |u_n|$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum a_nu_n$ est absolument convergente et donc convergente.
b) $|\langle a,u\rangle| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_nu_n| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \|a\|_\infty\,|u_n| = \|a\|_\infty\,\|u\|_1$.
On en déduit que φ_u est continue et $\|\varphi_u\| \leqslant \|u\|_1$.
Soit a la suite bornée déterminée par $a_n = 1$ si $u_n \geqslant 0$ et $a_n = -1$ sinon.
On a $\|a\|_\infty = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_nu_n = |u_n|$ de sorte que
$\varphi_u(a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| = \|u\|_1$.
On en déduit que $\|\varphi_u\| = \|u\|_1$.
c) Par l'inégalité $|\langle a,u\rangle| \leqslant \|a\|_\infty\,\|u\|_1$, on obtient que ψ_a est continue et $\|\psi_a\| \leqslant \|a\|_\infty$.
Pour la suite $u_k = (\delta_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$, on a $\|u_k\|_1 = 1$ et $\psi_a(u_k) = a_k$ donc $|a_k| \leqslant \|\psi_a\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Par suite $\|a\|_\infty \leqslant \|\psi_a\|$ puis finalement $\|\psi_a\| = \|a\|_\infty$.

Exercice 12 : [énoncé]
a) Si $f \in E$ alors $\phi f \in E$ car

$$|\phi(t)f(t)|^2 \leqslant \|\phi\|_\infty\,|f(t)|^2$$

De plus, l'application u est évidemment linéaire et c'est donc un endomorphisme de E.
Aussi

$$\|\phi f\|_2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \|\phi\|_\infty |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \|\phi\|_\infty \|f\|_2$$

donc l'endomorphisme u est continue et

$$\|u\| \leqslant \|\phi\|_\infty$$

b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la fonction g est continue, il existe $\alpha > 0$ vérifiant

$$|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on a $1/n \leqslant \alpha$ et alors

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)g(x)\,\mathrm{d}x - g(x_0)\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x) - g(x_0)|\, f_n^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Puisque f_n est nulle en dehors de $[x_0 - 1/n, x_0 + 1/n]$, on obtient

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)g(x)\,\mathrm{d}x - g(x_0)\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)\,\mathrm{d}x$$

et donc

$$\left|\frac{\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)\,\mathrm{d}x} - g(x_0)\right| \leqslant \varepsilon$$

c) On sait déjà $\|u\| \leqslant \|\phi\|_\infty$. En appliquant le résultat qui précède à la fonction $g = \phi^2$, on obtient

$$\frac{\|f_n\phi\|_2}{\|f_n\|_2} \to |\phi(x_0)|$$

On en déduit

$$\|u\| \geqslant |\phi(x_0)|$$

pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
On peut alors affirmer $\|u\| \geqslant \|\phi\|_\infty$ puis l'égalité.

Exercice 13 : [énoncé]
a) Pour $f \in E$,

$$|u(f)(x)| \leqslant \int_0^x t\,\|f\|_\infty \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 \|f\|_\infty$$

donc

$$\|v(f)\|_1 \leqslant \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 \|f\|_\infty \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\|f\|_\infty$$

On en déduit que l'application linéaire v est continue et

$$\|v\| \leqslant 1/6$$

En prenant $f = \tilde{1}$, on obtient

$$\|f\|_\infty = 1,\ u(f) : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \text{ et } \|v(f)\|_1 = 1/6$$

On en déduit $\|v\| = 1/6$.
b) Pour $f \in E$,

$$|u(f)(x)| = \int_0^x t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_1$$

donc

$$\|w(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |u(f)(x)| \leqslant \|f\|_1$$

On en déduit que l'application linéaire w est continue et $\|w\| \leqslant 1$.
Pour $f_n(t) = t^n$, on a

$$\|f_n\|_1 = 1/(n+1),\ u(f_n)(x) = \frac{1}{n+2}x^{n+2} \text{ et } \|w(f_n)\|_\infty = \frac{1}{n+2}$$

Puisque

$$\frac{\|w(f_n)\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2} \to 1$$

on obtient $\|w\| = 1$