TD1 (Solution)

Equations Différentielles Stochastiques

Exercice 1

Montrons que pour $n \geq 0$, on a:

$$w^n(t) = n\int_0^t w^{n-1}(s)dw(s) + \frac{n(n-1)}{2}\int_0^t w^{n-2}(s)ds,$$

Soit $u(t,x) = x^n$, $x = w(t)$. D'aprés la formule d'Itô, on a:

$$\begin{aligned} dw^n(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}g^2 dt \\ &= 0 + nx^{n-1}dx + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}dt \\ &= nw^{n-1}(t)dw(t) + \frac{1}{2}n(n-1)w^{n-2}(t)dt \end{aligned}$$

par intégration, on trouve:

$$\begin{aligned} w^n(t) &= n\int_0^t w^{n-1}(s)dw(s) + \int_0^t \frac{1}{2}n(n-1)w^{n-2}(s)dt \\ &= n\int_0^t w^{n-1}(s)dw(s) + \frac{1}{2}n(n-1)\int_0^t w^{n-2}(s)ds \end{aligned}$$

Pour $n = 3$, on trouve:

$$w^3(t) = 3\int_0^t w^2(s)dw(s) + 3\int_0^t w(s)ds,$$

2. Montrons que le processus $(x_1(t), x_2(t)) = (t, e^t w(t))$ est une solution de l'équation

$$\begin{pmatrix} dx_1(t) \\ dx_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{x_1(t)} \end{pmatrix} dw(t),\ t \geq 0$$

On a $dx_1(t) = dt$ et

$$dx_2(t) = e^t w(t)dt + e^t dw(t) = x_2(t)dt + e^{x_1(t)}dw(t)$$

alors

$$\begin{pmatrix} dx_1(t) \\ dx_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_2(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 1 \\ e^{x_1(t)} \end{pmatrix} dw(t),\ t \geq 0$$

Exercice 2

Soit $(w(t))_{t\geq 0}$ le processus de Wiener et $f(t)$ une fonction continue. Montrons que la solution de l'equation

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)f(s)dw(s)$$

est donnée par

$$x(t) = \exp\left(\int_0^t f(s)dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right)$$

Soit $u(t) = \exp y(t)$, avec $y(t) = \left(\int_0^t f(s)dw(s) - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds\right)$. On a:

$$dy(t) = f(t)dw(t) - \frac{1}{2}f^2(t)dt$$

D'aprés la formule d'Itô, on a:

$$\begin{aligned}
du(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}g^2dt \\
&= \exp y(t)dy(t) + \frac{1}{2}\exp y(t)f^2(t)dt \\
&= \exp y(t)\left(f(t)dw(t) - \frac{1}{2}f^2(t)dt\right) + \frac{1}{2}\exp y(t)f^2(t)dt \\
&= \exp y(t)f(t)dw(t) - \frac{1}{2}\exp y(t)f^2(t)dt + \frac{1}{2}\exp y(t)f^2(t)dt \\
&= \exp y(t)f(t)dw(t)
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
d\exp y(t) &= \exp y(t)f(t)dw(t) \\
&\Longrightarrow \int_0^t d\exp y(s) = \int_0^t \exp y(s)f(s)dw(s) \\
&\Longrightarrow \exp y(t) - \exp y(0) = \int_0^t \exp y(s)f(s)dw(s) \\
&\Longrightarrow \exp y(t) - 1 = \int_0^t \exp y(s)f(s)dw(s)
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\exp y(t) = 1 + \int_0^t \exp y(s)f(s)dw(s)$$

Ainsi

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)f(s)dw(s)$$

Exercice 3

Considérons le processus $B(t) = \sqrt{(w_1(t))^2 + (w_2(t))^2}$, où $w_1(t), w_2(t)$ sont deux processus de Wiener scalaires. Montrons que

$$dB(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{B(t)}dt + \frac{w_1(t)}{B(t)}dw_1(t) + \frac{w_2(t)}{B(t)}dw_2(t)$$

Soit $u(w_1, w_2)$=$\sqrt{(w_1(t))^2 + (w_2(t))^2}$. D'aprés la formule d'Itô on a:

$$\begin{aligned}
dB(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}g^2 dt \\
&= \frac{\partial u}{\partial w_1}dw_1 + \frac{\partial u}{\partial w_2}dw_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial w_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial w_2^2}\right)dt \\
&= \frac{2w_1(t)}{2B(t)}dw_1 + \frac{2w_2(t)}{2B(t)}dw_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2B(t)} + \frac{1}{2B(t)}\right)dt \\
&= \frac{w_1(t)}{B(t)}dw_1(t) + \frac{w_2(t)}{B(t)}dw_2(t) + \frac{1}{2}\frac{1}{B(t)}dt
\end{aligned}$$

Exercice 4

Montrons que le processus stochastique

$$S(t) = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma w(t)\right)$$

satisfait l'équation différentielle stochastique:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma S(t)dw(t)$$

Soit $u(t) = S_0 \exp y(t)$, $y(t) = \int_0^t \mu(s)ds - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma w(t)$. D'aprés la formule d'Itô on a:

$$\begin{aligned}
du(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}g^2 dt \\
&= S_0 \exp y(t)dy(t) + \sigma^2\frac{1}{2}S_0 \exp y(t)dt \\
&= S_0 \exp y(t)(\mu(t)dt - \frac{\sigma^2}{2}dt + \sigma dw(t)) + \sigma^2\frac{1}{2}S_0 \exp y(t)dt \\
&= S_0 \exp y(t)\mu(t)dt + \sigma S_0 \exp y(t)dw(t)
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
dS(t) &= d\left(S_0 \exp y(t)\right) \\
&= \mu(t)S_0 \exp y(t)dt + \sigma S_0 \exp y(t)dw(t) \\
&= \mu(t)S(t)dt + \sigma S(t)dw(t)
\end{aligned}$$