TD2 (Solution)
Equations Différentielles Stochastiques

Exercice 1

Considérons l'équation différentielle

$$\begin{aligned} dx(t) &= (a + x(t))\, dt + (b + x(t))\, dw(t),\ t \geq 0 \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

1. Montrons que cette équation admet une solution unique. On a:

$$|(a + x_1(t)) - (a + x_2(t))| = |x_1(t) - x_2(t)| \leq 2\,|x_1(t) - x_2(t)|$$

$$|(b + x_1(t)) - (b + x_2(t))| = |x_1(t) - x_2(t)| \leq 2\,|x_1(t) - x_2(t)|$$

d'autre part, on a:

$$\begin{aligned} |a + x(t)| &\leq |a| + |x(t)| \leq \max(|a|\,, 1)(1 + |x(t)|) \\ |b + x(t)| &\leq |b| + |x(t)| \leq \max(|b|\,, 1)(1 + |x(t)|) \end{aligned}$$

Alors les conditions d'existence du théorème d'existence et unicité sont vérifiées, alors l'équation admet une solution unique.

2. On calcule la solution de l'equation. C'est une équation linéaire non homogène, alors sa solution est donnée par:

$$x(t) = y(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{y(s)}\left((a-b)ds + bdw(s)\right)\right)$$

où

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t}\left(1 - \frac{1}{2}\right) ds + dw(s)\right) \\ &= \exp(\frac{1}{2}(t - t_0) + (w(t) - w(t_0)) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} x(t) &= y(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{1}{y(s)}\left((a-b)ds + bdw(s)\right)\right) \\ &= \exp(\frac{1}{2}(t - t_0) + (w(t) - w(t_0))x_0 \\ &\quad + \exp\frac{1}{2}(t - t_0)\exp\left(w(t) - w(t_0)\right) \\ &\quad \int_{t_0}^{t} \exp\left(-\frac{1}{2}(s - t_0)\right)\exp\left(-\left(w(s) - w(t_0)\right)\right)\left((a-b)ds + bdw(s)\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\frac{1}{2}(t-t_0)\exp\left(w(t)-w(t_0)\right)x_0 \\ &\quad +(a-b)\int_{t_0}^{t}\exp\frac{1}{2}(t-s)\exp((w(t)-w(s))ds \\ &\quad b\int_{t_0}^{t}\exp\frac{1}{2}(t-s)\exp((w(t)-w(s))dw(s) \end{aligned}$$

3. Posons $R_x(t) = E(x(t)^2)$ et $m(t) = E(x(t))$. D'aprés le cours, on a :

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= m(t)+a,\ m(t_0)=E(x_0) \\ &\Longrightarrow m(t) = \exp(t-t_0)m(t_0) + \int_{t_0}^{t}\exp(t-s)ads \\ &\Longrightarrow m(t) = \exp(t-t_0)m(t_0) + a\int_{t_0}^{t}\exp(t-s)ds \\ &\Longrightarrow m(t) = \exp(t-t_0)m(t_0) + ae^{t}(1-e^{-t_0}) \\ &\Longrightarrow m(t) = \exp(t-t_0)m(t_0) + a(1-e^{t-t_0}) \qquad (1) \end{aligned}$$

Pour la variance, on a:

$$varx(t) = E((x(t))^2) - (E(x(t)))^2$$

et comme on a (d'aprés le cours):

$$\begin{aligned} \dot{R}_x(t) &= (2+1)R_x(t) + 2m(t)(a+b) + b^2 \\ &= 3R_x(t) + 2m(t)(a+b) + b^2 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} R_x(t) &= E(x_0)^2e^{3(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{3(t-s)}(2m(s)(a+b)+b^2)ds \\ &= E(x_0)^2e^{3(t-t_0)} + 2(a+b)\int_{t_0}^{t} e^{3(t-s)}m(s) + b^2\int_{t_0}^{t} e^{3(t-s)}ds \end{aligned}$$

Exercice 1

Considérons l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dx(t) &= \mu x(t)dt + \sigma x(t)dw(t),\ t \geq 0 \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

où σ, $\mu \in \mathbb{R}$ et $w(t)$ est le mouvement Brownien standard.

1. C'est une équation linéaire et homogène. La solution de cette équation est donnée par $x(t) = y(t)x_0$, où

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t}\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds + \sigma dw(s)\right) \\ &= e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-t_0)}e^{\sigma(w'(t)-w(t_0))}x_0 \end{aligned}$$

alors

$$x(t) = e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-t_0)}e^{\sigma(w'(t)-w(t_0))}x_0$$

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, le processus $X_a(t) = e^{at}x(t)$ vérifie

$$\begin{aligned} dX_a(t) &= ae^{at}x(t)dt + e^{at}dx(t) \\ &= ae^{at}x(t)dt + e^{at}\left(\mu x(t)dt + \sigma x(t)dw(t)\right) \\ &= (a+\mu)\, e^{at}x(t)dt + \sigma e^{at}x(t)dw(t),\ t \geq 0 \\ &= (a+\mu)\, X_a(t)dt + \sigma X_a(t)dw(t),\ t \geq 0 \end{aligned}$$

3. Pour $a = -\mu$, on trouve $dX_a(t) = \sigma X_a(t)dw(t)$, $t \geq 0$, alors la solution de l'équation

$$dy(t) = \sigma y(t)dw(t),\ t \geq 0$$

est

$$y(t) = e^{-\mu t}x(t) = e^{-\mu t}e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-t_0)}e^{\sigma(w'(t)-w(t_0))}x_0 = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-t_0)}e^{\sigma(w'(t)-w(t_0))}x_0$$

Exercice 3

Considérons l'équation

$$\begin{cases} dy(t) = \frac{b-y(t)}{1-t}dt + dw(t), & 0 \leq t < 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$

Cette équation peut être écrite comme suit:

$$\begin{cases} dy(t) = -\frac{1}{1-t}y(t)dt + \frac{b}{1-t}dt + dw(t), & 0 \leq t < 1 \\ y(0) = a \end{cases}$$

C'est une équation linéaire non homogène. Sa solution est donnée par:

$$x(t) = z(t)\left(x_0 + \int_0^t \frac{1}{z(s)}\left(\frac{b}{1-s}ds + dw(s)\right)\right)$$

où

$$z(t) = \exp\left(\int_0^t -\frac{1}{1-s}ds\right) = \exp\left(\left(\int_0^t \frac{ds}{s-1}\right)\right) = t-1$$

alors

$$\begin{aligned}
x(t) &= (t-1)\left(x_0 + \int_0^t \frac{1}{(s-1)}\left(\frac{b}{1-s}ds + dw(s)\right)\right) \\
&= (t-1)\,x_0 + (t-1)\int_0^t -\frac{b}{(s-1)^2}ds + (t-1)\int_0^t \frac{dw(s)}{(s-1)} \\
&= (t-1)\,x_0 + b(t-1)\left(\frac{1}{(t-1)} + 1)\right) + (t-1)\int_0^t \frac{dw(s)}{(s-1)}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
x(t) &= (t-1)\,x_0 + b((t-1)+1) + (t-1)\int_0^t \frac{dw(s)}{(s-1)} \\
&= (t-1)\,x_0 + (t-1)\int_0^t \frac{dw(s)}{(s-1)} + bt \\
&= a\,(t-1) + bt + (t-1)\int_0^t \frac{dw(s)}{(s-1)}
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. Considérons l'équation:

$$\begin{cases} dx(t) = (\frac{2}{1+t}x(t) + b(1+t)^2)dt + b(1+t)^2 dw(t), \quad t_0 \leq t \\ x(t_0) = x_0 \in \Re \end{cases}$$

c'est une équation linéaire non homogène, sa solution est donnée par:

$$x(t) = y(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^t \frac{1}{y(s)}\left((b(1+s)^2 ds + b(1+s)^2 dw(s)\right)\right)$$

où

$$y(t) = \exp(\int_{t_0}^t \frac{2}{s+1}ds) = \exp(\int_{t_0}^t \frac{2}{s+1}ds) = 2\exp(\int_{t_0}^t \frac{ds}{s+1}) = \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2$$

alors [2]

$$\begin{aligned}
x(t) &= \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2\left(x_0 + \int_{t_0}^t \left(\frac{1+t_0}{1+s}\right)^2\left((b(1+s)^2 ds + b(1+s)^2 dw(s)\right)\right) \\
&= \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 x_0 + (1+t)^2\int_{t_0}^t (bds + bdw(s))
\end{aligned}$$

alors

$$x(t) = \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 x_0 + b\,(1+t)^2\,((t-t_0) + (w(t) - w(t_0))$$

2. Appliquons l'espérance à cette dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned}
E\,(x(t)) &= \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 E(x_0) + E(b\,(1+t)^2\,((t-t_0)) + b(1+t)^2 E((w(t) - w(t_0)) \\
&= \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 E(x_0) + b\,(1+t)^2\,((t-t_0))
\end{aligned}$$

Comme $x_0 \in \Re$, alors

$$E(x(t)) = \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 x_0 + b\,(1+t)^2\,((t-t_0))$$

On calcule $x(t)^2$, puis on applique l'espérance, on trouve que

$$\begin{aligned} E\left(x(t)\right)^2 &= \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^4 x_0^2 + \left(\frac{1+t}{1+t_0}\right)^2 b\,(1+t)^2\,((t-t_0))x_0 + b^2\,(1+t)^4\,(t-t_0)^2 \\ &\quad + b^2\,(1+t)^4\,(t-t_0) \end{aligned}$$

(ici on a utilisé les propriétés de w(t).)