TD N°4

Exercice (convolution)

Nous considérons un réseau de neurones à convolutions qui reçoit en entrée des images de taille 6 × 6 ne possédant qu'un seul canal, telles que la matrice X1 suivante :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&1&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

Le réseau comprend deux couches de convolutions, chacune suivie d'une fonction d'acti vation de type ReLU, ainsi qu'une couche pleinement connectée. Il y a un seul neurone de sortie, muni d'une activation linéaire. Aucune couche ne possède de paramètres de biais. Plus spécifiquement,

1. La première couche de convolution comporte 3 filtres de taille 3 × 3, exprimés par les matrices suivantes :

$$W_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1&0&-1 \\ 1&0&-1 \\ 1&0&-1 \end{bmatrix}; \quad W_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 0&0&0 \\ -1&-1&-1 \end{bmatrix}; \quad W_3^{(1)} = \begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 1&-4&1 \\ 0&1&0 \end{bmatrix}$$

2. La deuxième couche de convolution comporte un seul filtre de taille 3 × 3 × 3, exprimé par le tenseur suivant :

$$W^{(2)}[i,j,k] = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k = 2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{pour } i,j,k \in \{1,2,3\}\,.$$

3. La troisième couche (la couche de sortie) est une couche pleinement connectée exprimée par un simple vecteur de taille 4 :

$$\mathbf{w}^{(3)} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Question : Calculez la valeur de sortie du réseau pour l'image X_1, en suivant les étapes suivantes :

(a) Calculez la représentation associée à la première couche cachée. Plus spécifiquement, pour chacun des trois filtres $W_1^{(1)}$, $W_2^{(1)}$, $W_3^{(1)}$, calculer le résultat de la convolution suivit de l'activation ReLU:

$$H_i^{(1)} = \mathrm{relu}(X_1 * W_i^{(1)})\,.$$

(b) Notons H (1) 1:3 la juxtaposition des trois matrices calculées en (a) en un seul tenseur de taille 3 × 3 × 3. Calculez la représentation associée à la deuxième couche cachée, c'est-à-dire le résultat de la couche convolution suivante :

$$H^{(2)} = \mathrm{relu}(H_{1:3}^{(1)} * W^{(2)})\,,$$

$$\text{avec } H_{1:3}^{(1)}[i,j,k] = H_i^{(1)}[j,k] \text{ pour } i \in \{1,2,3\} \text{ et } j,k \in \{1,2,3,4\}\,.$$

(c) Notons $h^{(2)}$ la vectorisation de la matrice $H^{(2)}$ en un vecteur colonne de 4 éléments. Calculez la valeur du neurone de sortie, c'est-à-dire :

$$y = \mathbf{w}^{(3)} \cdot \mathbf{h}^{(2)} .$$

avec $\mathbf{h}^{(2)}[i + 2(j{-}1)] = H^{(2)}[i, j]$ pour $i, j, k \in \{1, 2\}$.