

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**THESE**

Présentée à

**L'UNIVERSITE DE BATNA  
INSTITUT DE MECANIQUE**

Pour l'obtention du Diplôme de:

**MAGISTER**

**EN**

**MECANIQUE**

**Option : Energétique**

**Par**

**M<sup>r</sup> Abdellah BOUAM**

**Ingénieur, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger**

***MODELISATION DE L'ECOULEMENT AUBE A AUBE  
DANS UN ROTOR DE POMPE AXIALE  
PAR LA METHODE DES VOLUMES FINIS***

Soutenue : Avril 1999, devant le jury d'examen :

Dr Z. NEMOUCHI, MC, Université de Constantine	Président
Dr L. MESSAOUDI, MA, Université de Batna	Rapporteur
Dr. M. SI AMEUR, MA, Université de Batna	Examineur
Dr. A. SOUDANI, MA, Université de Batna	Examineur
Dr. S. BOUGOUL, MA, Université d'Om-Elbouaki	Examineur

## REMERCIEMENTS

*Je tiens à remercier et à exprimer toute ma reconnaissance au Docteur L. MESSAOUDI, mon directeur de thèse, pour m'avoir dirigé vers ce domaine de recherche et d'avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires à la réalisation de ce travail.*

*Je remercie également Monsieur Z. NEMOUCHI pour avoir accepté de présider ce jury.*

*Mes remerciements vont également à Messieurs :*

*M. SI AMEUR,*

*S. BOUGOUL,*

*A. SOUDANI*

*qui ont accepté d'évaluer ce travail en étant membres du jury de cette thèse.*

*Je remercie également ma sœur et mon amie FATIHA pour leurs encouragements et leurs soutiens morales tout au long de ce travail.*

*En fin, je remercie Messieurs A. BOUKHTACHE et M. BOUKHECHBEN pour leur hospitalité lors de l'impression de cette thèse.*

## NOMENCLATURE

$a$ [Kg/s.m <sup>2</sup> ]	: Coefficient dans l'équation de discrétisation.
$F$ [Kg/s.m <sup>2</sup> ]	: importance de convection.
$D$ [Kg/s.m <sup>2</sup> ]	: Importance de diffusion.
$f_x, f_y$ [m/s <sup>2</sup> ]	: Composantes de la force de volume suivant les directions x, y.
$J$ [1.Kg/s.m <sup>2</sup> ]	: flux total.
$\dot{J}$	: Flux adimensionnel.
$N$ [tr/mn]	: Vitesse de rotation.
$p$ [N/m <sup>2</sup> ]	: Pression.
$p'$ [N/m <sup>2</sup> ]	: Pression corrigée.
$\dot{p}$ [N/m <sup>2</sup> ]	: Choix initial de la pression.
$Re$	: Nombre de Reynolds.
$r$ [m]	: Rayon de la roue.
$u$ [m/s]	: Vitesse axiale.
$u_e$ [m/s]	: Vitesse débitante.
$\hat{u}$ [m/s]	: Pseudo vitesse axiale.
$\dot{u}$ [m/s]	: Vitesse correspondante à $\dot{p}$ .
$v$ [m/s]	: Vitesse tangentielle.
$\hat{v}, \dot{v}$ [m/s]	: Similaires aux $\hat{u}, \dot{u}$ .
$x, y$ [m]	: Coordonnées cartésiennes.
$\alpha$	: Facteur de relaxation.
$\alpha_p$	: Facteur de relaxation de pression.
$\omega$ [rad/s]	: Vitesse angulaire.
$\xi$ [s <sup>-1</sup> ]	: Vorticité.
$\psi$ [Kg/s.m]	: Fonction de courant.
$\Delta x$ [m]	: Longueur entre deux interfaces successives suivant l'axe des x.
$\delta x$ [m]	: Longueur entre deux nœuds successifs suivant l'axe des x.
$\Delta y$ [m]	: Longueur entre deux interfaces successives suivant l'axe des y.
$\delta y$ [m]	: Longueur entre deux nœuds successifs suivant l'axe des y.
$\mu$ [Kg/m.s]	: Viscosité dynamique du fluide.
$\rho$ [Kg/l]	: Densité du fluide.
$\phi$ [1]	: Variable générale.
$\gamma$ [°]	: Angle du calage de l'aube.

## INDICES

$E$	: Nœud voisin dans la direction positive de l'axe des x (coté Est).
$e$	: Interface entre p et E.
$N$	: Nœud voisin dans la direction positive de l'axe des y (coté Nord).
$n$	: Interface entre p et N.
$nb$	: Voisins généraux des nœuds du maillage.
$P$	: Nœud centrale du maillage qui est en considération.
$S$	: Nœud voisin dans la direction négative de l'axe des y (coté Sud).
$s$	: Interface entre p et S.
$W$	: Nœud voisin dans la direction négative de l'axe des x (coté West).
$w$	: Interface entre p et W.

## SYMBOLE SPÉCIAL

[| A,B,C,... |] : Valeur maximale de A,B,C...

## INTRODUCTION

Des turbomachines de tous les types sont largement utilisées depuis longtemps pratiquement dans tous les secteurs de l'industrie et des transports. En raison des quantités très importantes d'énergie souvent introduites et transformées dans les machines, l'amélioration de ses performances passe par une meilleure connaissance de l'écoulement interne, notamment dans les zones aubées.

En présence de ces machines plusieurs écoulements sont engendrés et dans le domaine de l'aérodynamique, on peut citer brièvement l'exemple de l'écoulement autour d'un aubage de compresseur ou de turbine. Cet écoulement, sous l'influence des perturbations dues à la présence des autres aubages et des parois constituant l'enveloppe et le moyeu, est instationnaire en raison des mouvements relatifs des roues adjacentes.

L'écoulement dans les turbomachines est généralement tridimensionnel, instationnaire, visqueux et turbulent [4,6,10,11,19]. La roue mobile d'une turbomachine possède une géométrie très complexe, le fluide passe à travers des canaux délimités par les parois des aubages du moyeu et du carter. Ainsi, cet écoulement est l'un des plus complexe qu'on puisse rencontrer en mécanique des fluides.

Le dimensionnement des différents éléments d'une turbomachine revient à une étude complète de cet écoulement afin de pouvoir y remédier dans la résolution du problème inverse. Cette étude consiste à résoudre les équations dynamiques (**NAVIER-STOKES**) tenant compte des conditions aux limites imposées par les obstacles.

Dans la réalité, l'écoulement à travers les aubages d'une roue n'est pas axisymétrique, car il existe un gauchissement des surfaces de courant. Seuls des calculs réellement tridimensionnels peuvent représenter ce phénomène, mais de tels calculs sont très lourds à mener et leurs limites d'utilisation sont imposées par les capacités des moyens de calcul.

Plusieurs approches [14,16] sont actuellement utilisées, elles dépendent du degré des simplifications admises de ces équations, selon l'analyse des phénomènes physiques.

Une approximation courante (approche quasi-tridimensionnelle), consiste à admettre que les nappes de courant restent de révolution [16,19].

L'étude de l'écoulement tridimensionnel revient à une étude de deux écoulements bidimensionnels. L'un des outils de calcul le plus fiable qui permet de déterminer cet écoulement dans une roue de turbomachine est basé sur le modèle établi par *Ch. WU* [19,23] : La modélisation numérique consiste à calculer les écoulements aube-à-aube (**S1**) et méridien (**S2**) puis faire le couplage entre les deux.

### *Objectif et plan du travail*

L'objectif principal de cette étude, qui s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche, consiste à établir un programme de calcul de l'écoulement aube-à-aube dans un rotor de pompe axiale. Par la suite, ce programme devra être intégré au logiciel " **POMPAX** " [25] qui permet le dimensionnement, la prédiction des caractéristiques hydrauliques ainsi que l'analyse des performances des pompes axiales. Il permettra alors d'analyser l'écoulement interne de la machine dimensionnée et d'analyser ainsi les répartitions de pression et de vitesse entre ces aubes.

Une synthèse bibliographique sur les méthodes numériques de résolution des écoulements dans les turbomachines est exposée dans le premier chapitre.

Dans le second, la formulation mathématique du problème à été faite, en se basant sur les équations dynamiques de **NAVIER-STOKES** pour les écoulements incompressibles.

Dans le troisième chapitre, la modélisation de l'écoulement aube à aube a été développée , le maillage adapté et, finalement, les résultats obtenus ainsi que leurs interprétations sont présentées dans le dernier chapitre.

## INTRODUCTION

Il est bien connu que l'écoulement dans une roue de turbomachine est extrêmement complexe, en particulier dans un environnement multi-étage. Nous pouvons rencontrer une surface de choc quand l'écoulement incident est supersonique. Des écoulements secondaires peuvent avoir lieu en pied et en têtes des aubages (les tourbillons de coins les couches limites d'aubages) ; donc dans une configuration multi-étagée, l'écoulement perd progressivement son uniformité (au fur et à mesure que l'on progresse dans la direction de l'écoulement) [2,6,18].

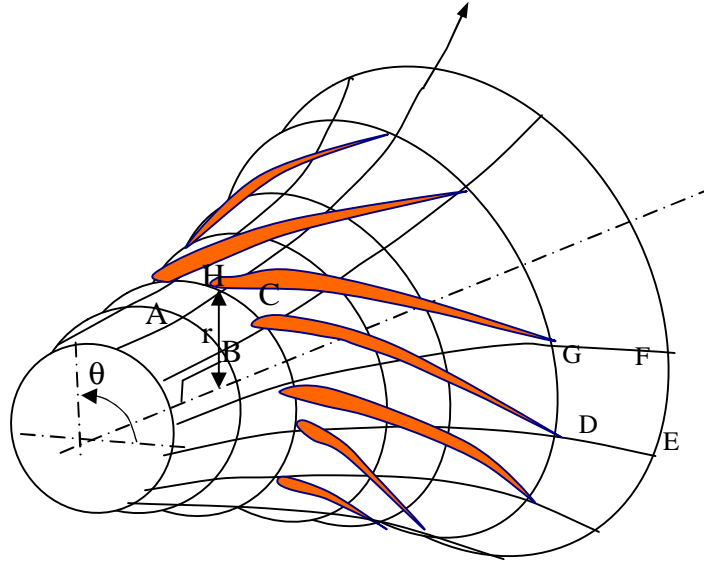
Un des outils de calcul le plus fiable, permettant de déterminer l'écoulement dans une roue de turbomachine, est basé sur le modèle établi par **Ch. WU** (1952) [23]. Dans cette théorie, une approximation quasi-tridimensionnelle de l'écoulement tridimensionnel est obtenue grâce à une succession de problèmes bidimensionnels. Des calculs aube à aube (S1) **Fig.(I-1)**, sont combinés avec des calculs réalisés sur les surfaces méridiennes (S2) **Fig.(I-2)**.

Afin de ne pas compliquer inutilement la gestion informatique des codes, et parce que les surfaces aube-à-aube sont en général supposé axisymétrique, un seul calcul méridien suffit; celui-ci peut aussi être déterminé, de manière élégante, à partir d'une moyenne azimutale appliquée aux équations qui régissent le problème [22].

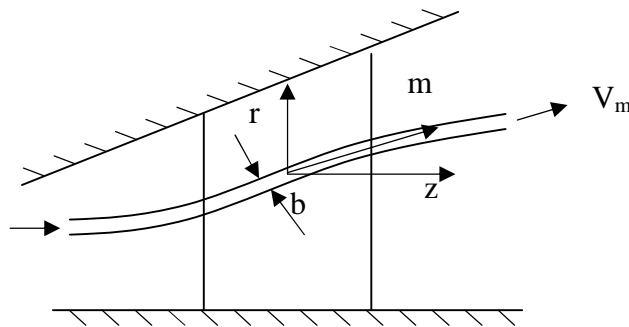
Au cours de ces dernières années, les recherches concernant la simulation numérique d'écoulements ont connu un essor considérable. D'une part, grâce aux progrès réalisés dans le domaine de l'analyse numérique, avec le développement de méthodes capables d'intégrer des modèles mathématiques de plus en plus complexes, et d'autre part, grâce à l'accroissement considérable des performances des ordinateurs mis à la disposition des ingénieurs et chercheurs.

Plusieurs revues dans ces recherches de **GOSTELOW** (1973), **PERKINS** et **HORLOCK** (1975), **JAPIKSE** (1976), **SCHOLZ** et **KLEIN** (1977) ont admirablement couvert les mérites et limitations des apparus avant 1976 [16,22]. La plupart des simulations

numériques des écoulements potentiels tridimensionnels ont été basées sur des méthodes d'éléments finis qui permettent une bonne prise en compte de la géométrie des frontières [1,22]. Les méthodes pseudo-stationnaire (différences finies, volumes finis) ont été aussi utilisées dans la simulation des écoulements transoniques [5].



**Fig.(I-1) : Surface de révolution aube à aube (S1).**



**Fig.(I-2) : Surface méridienne (S2).**

### I.1- CALCUL DE L'ÉCOULEMENT AUBE A AUBE (S1)

Parmi les méthodes numériques actuellement utilisées [16,22] pour le calcul de l'écoulement aube-à-aube, on cite :

- La méthode des singularités.
- La méthode des courbures des lignes de courant.
- La méthode des différences finies pour les écoulements potentiels.

Jusqu'à ces dernières années, plusieurs méthodes de calcul de l'écoulement aube-à-aube ont été utilisées. Elles sont essentiellement basées sur les discrétisations par différences finies, éléments finis et volumes finis. Parmi ces dernières on cite :

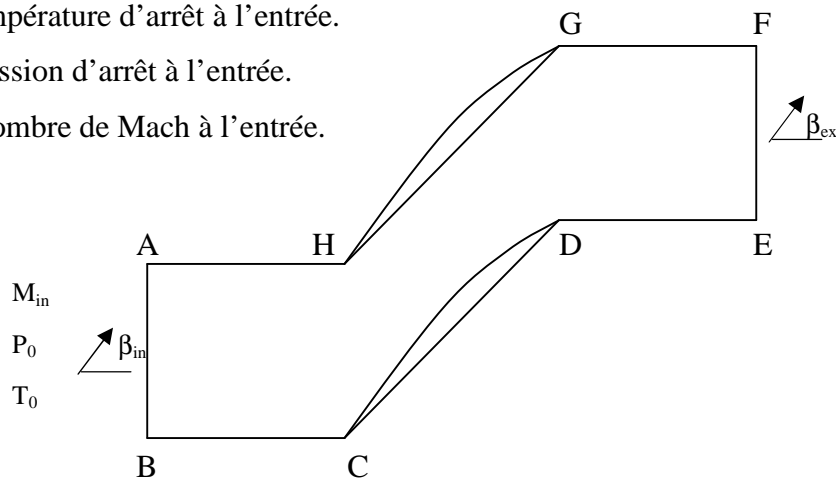
- La résolution des équations d'**EULER** par la méthode de relaxation: Différences finies et volumes finis.
- La résolution des équations de l'écoulement potentiel par la méthode de relaxation : différences finies et éléments finis dans un régime transsonique.
- Méthodes des différences finies et volumes finis utilisées pour la résolution des équations de **NAVIER-STOKES**.

Généralement, le domaine de calcul par ces différentes méthodes dans le plan aube-à-aube est représenté ci-dessous, Fig.(I-3).

$T_0$  : température d'arrêt à l'entrée.

$P_0$  : pression d'arrêt à l'entrée.

$M_{in}$  : nombre de Mach à l'entrée.



**Fig.(I-3) : Région de calcul du plan aube-à-aube (S1).**

Les conditions aux limites sont définies selon le cas et la méthode de résolution. Elles peuvent être par exemple, d'après la référence [16] :

- une condition de glissement sur les aubes :  $\vec{W} \cdot \vec{n} = 0$ .

$W$  est la vitesse relative,  $n$  est la direction normale au profil d'aube.

- une condition de périodicité en amont et aval des aubes :

$V(r, \theta, z) = V(r, \theta + \frac{2\pi}{Na}, z)$ , où :  $V$  est la vitesse absolue,  $z$  est la direction axiale,  $\theta$  est la

direction circonférentielle et  $Na$  est le nombre d'aubes de la roue.

- la donnée du champ de vitesse sur la frontière amont.



### I.1.1- METHODE DES SINGULARITES

Les méthodes de singularités utilisent le principe de superposition des solutions des écoulements potentiels. Le potentiel dont dérive l'écoulement étant considéré comme la somme de potentiels élémentaires correspondant respectivement à:

- l'écoulement uniforme de base,
- des sources, des puits ou des tourbillons localisés en des points convenablement choisis du champ de l'écoulement.

Dans ces méthodes, la régularité de la solution au bord de fuite permet de définir la direction de l'écoulement issue de la grille d'aube à l'aide de la condition de **KUTTA JOUKOVSKI** ou d'une condition équivalente. Un avantage de cette méthode, du fait de sa précision, et de permettre l'analyse fine des zones à gradients de vitesses élevés. Elles s'appliquent aux écoulements subsoniques [5,6,16,22].

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est pas applicable pour le calcul des écoulements transsoniques et des ondes de choc, ou dans le calcul d'écoulements fortement décollés [22,26].

### I.1.2- METHODE DE COURBURE DES LIGNES DE COURANT

La méthode de courbure des lignes de courant se base sur l'expérience pour résoudre des problèmes de dynamique des fluides. Elle permet de développer les équations de mouvement et de continuité d'un écoulement dans une turbomachine axiale ou centrifuge. Les lignes de courant sont tracées à travers le conduit et repositionnées à chaque itération sur la base de nouvelles propriétés calculées du fluide.

L'écoulement est adiabatique le long d'une ligne de courant et les conditions d'entrée sont connues [16,22].

Les équations de base sont exprimées dans un repère cylindrique absolu  $(r, z, \theta)$ , puis la ligne de courant est introduite en passant dans un repère  $(r, m, \theta)$  avec :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\cos \phi} \left( \frac{\partial}{\partial m} \cdot \sin \phi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (\text{I.1})$$

Le flux étant axisymétrique ( $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ )

Sur une ligne de courant de l'écoulement moyen, la rothalpie est conservée et la vitesse relative dans la direction normale à  $(m, \theta)$  est nulle ( $W_b=0$ ).

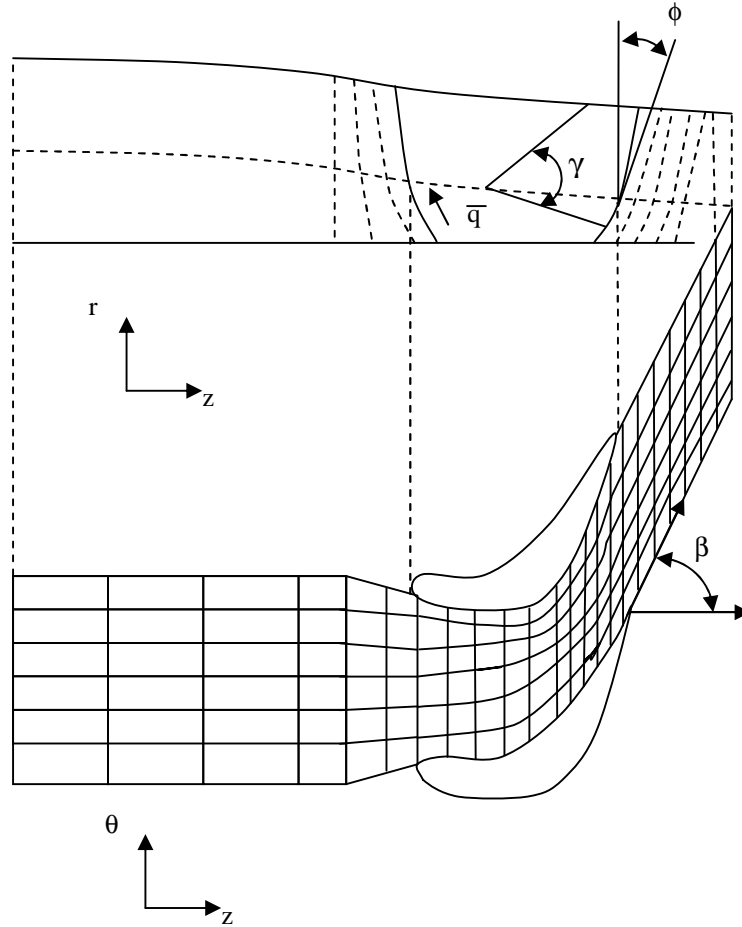


Fig.(I-4) : Représentation du plan aube-à-aube.

Les équations citées ci-après ont été développées pour un fluide incompressible [16].

$$\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} = p(s).W + Q(s) + \frac{R(s)}{W} \tag{I.2}$$

où :

$$\begin{cases} P(s) = \frac{\cos \beta}{r} \cdot \frac{d}{ds} (r \cdot \text{tg} \beta) \\ Q(s) = \text{tg} \beta \frac{dV_m}{ds} + \frac{2 \cdot \omega r \cdot \sin \phi \cos \beta}{r} \\ R(s) = T \cdot \sin \beta \cdot \frac{dS}{ds} \end{cases} \tag{I.3}$$

Le maillage est constitué de lignes de courant et de lignes quasi-orthogonales tracées expérimentalement au début de l'étude. Au fil des itérations, la position des nœuds est modifiée en fonction des nouvelles lignes de courant.

En utilisant la méthode explicite pour l'équation gérant l'écoulement sur la surface (S1). Connaissant la modélisation de l'écoulement et les fonctions  $Q(s)$  et  $R(s)$  pour chaque position axiale, une valeur de la vitesse est choisie et l'équation est intégrée pour obtenir le profil des vitesses. Le débit masse moyen de cette position est alors calculé et comparé au débit massique spécifique. S'ils sont différents, une nouvelle vitesse est choisie et le calcul repris. Quand le débit voulu est obtenu et que le profil des vitesses est connu d'un bout à l'autre de la machine, une nouvelle modélisation des lignes de courant et de nouvelles valeurs de  $Q(s)$  et  $R(s)$  peuvent être calculées. Le cycle complet de calcul est répété jusqu'à ce que le critère de convergence soit satisfait [16].

La principale difficulté de cette méthode est la modélisation des lignes de courant et l'obtention de l'inclinaison  $\phi$  et du rayon de courbure  $r_m$ .

Parmi les auteurs qui ont utilisé ces méthodes, principalement pour les machines axiales, on peut citer [16,22] : **NOVAK**, **DAVIS**, **MILLAR** et **DEVILLEZ**.

### **I.1.3- MÉTHODE DE RELAXATION UTILISANT LE POTENTIEL DES VITESSES**

Le mouvement étant supposé irrotationnel, il existe alors un potentiel des vitesses. L'équation de continuité fournit une équation aux dérivées partielles non linéaire du second ordre de type elliptique dans le domaine subsonique et de type hyperbolique dans le domaine supersonique. Cette équation admet des solutions discontinues qui se vérifient par les relations de **RANKINE – HUGONIOT** pour les ondes de chocs [16]. Parmi les schémas adoptés à la discrétisation, on trouve les schémas mixtes de mailles centrées dans le domaine subsonique et de mailles décentrées dans le domaine supersonique.

### **I.1.4- METHODE MATRICIELLE**

Cette méthode combine les équations de mouvement et de continuité en utilisant une fonction de courant pour obtenir l'équation principale dans le plan considéré. Elle est

basée sur la définition initiale d'une grille de points ou nœuds dans tout le passage de l'écoulement étudié. Pour que la combinaison des lois physiques et d'informations empiriques soient satisfaites, les équations aux différences sont écrites pour chaque point de la grille. Sur le plan (S1), une méthode permet de décrire l'écoulement du fluide sur une surface de révolution. En écrivant la condition d'irrotationnalité de l'écoulement absolu sur la surface de révolution, on obtient l'équation de continuité qui s'écrit en régime stationnaire d'après [16] :

$$\frac{\partial(\rho b W_m)}{\partial m} + \frac{\partial(\rho b W_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{I.4})$$

En introduisant la fonction de courant :

$$\begin{cases} W_m = \frac{1}{\rho b r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ W_\theta = -\frac{1}{\rho b} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial m} \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

Le modèle établi par **KATSANIS** (1968) [16] s'appuie sur la condition d'irrotationnalité de l'écoulement absolu sur la surface de révolution.

De ce fait, on a :

$$\overrightarrow{rot.W} + 2 \cdot \vec{\omega} = \vec{0} \quad (\text{I.6})$$

La troisième composante de cette équation devient :

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} - A(r) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + B(r) \frac{\partial \psi}{\partial m} = -2\omega b \rho \sin \delta \quad (\text{I.7})$$

où :

$$\begin{cases} A(r) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(\log|b\rho|)}{\partial \theta} \\ B(r) = \frac{\sin \delta}{r} - \frac{\partial(\log|b\rho|)}{\partial m} \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

où :

m,  $\theta$  et r sont les directions méridienne, circonférentielle et radiale.

$\delta$  l'inclinaison de la direction méridienne par rapport à l'axe de la roue.

b est l'épaisseur de la nappe de courant.

Cette équation traduit le champ de  $\psi$  sur une surface de courant à l'intérieur des aubes. Elle doit être résolue en tenant compte des conditions aux limites et en respectant la condition de **KUTTA-JOUKOWSKY** [4].

Pour un choix initial du champ de  $\psi$ , une solution est obtenue en recalculant les nouvelles valeurs de  $\psi$  à partir de l'équation discrétisée. Le processus est répété jusqu'à ce que le critère de convergence soit satisfait.

La difficulté réside dans l'obtention des solutions numériques pour  $\psi$ . De nombreuses approximations aux différences finies utilisent une grille de points rectangulaire car ceci conduit à des expressions simples des dérivées. Cependant, pour calculer l'écoulement dans une turbomachine, une grille doit être raffinée en se rapprochant aux frontières des aubes [16].

On peut écrire l'équation sous forme matricielle :

$$[M] \cdot [\psi] = [Q] \quad (I.9)$$

Pour le calcul aube-à-aube, une première formulation a été donnée par **WU** et reprise et modifiée par **MARCH**. Une méthode analogue développée par **DAVIS** pour des compresseurs axiaux a été adaptée ultérieurement en France par **LEBOEUF** pour des compresseurs transsoniques et des turbines à vapeur [11].

### I.1.5- METHODE DES DIFFERENCES FINIES

Les équations du problème continu sont prises sous la forme d'équations aux dérivées partielles. Le domaine d'étude  $D$  est discrétisé en un ensemble de points (« nœuds ») définis en général par les intersections des familles de lignes ou de surfaces qui constituent un maillage. Les inconnues sont les valeurs de  $\phi$  aux nœuds. Le problème discret résulte de l'application de l'équation générale à la variable  $\phi$  et des conditions aux limites aux nœuds du maillage respectivement dans  $D$  et sur les frontières. En pratique, la dépendance de  $\phi$  par rapport à  $x$  n'est pas donnée explicitement; elle résulte implicitement (sans d'ailleurs être unique) des formules aux différences finies utilisées pour représenter les dérivées de  $\phi$  aux nœuds, formules déduites des développements en série de **TAYLOR**.

Sauf cas spéciaux, on peut considérer que  $\phi$  est un polynôme en  $x$  continu et dérivable par morceaux [26].

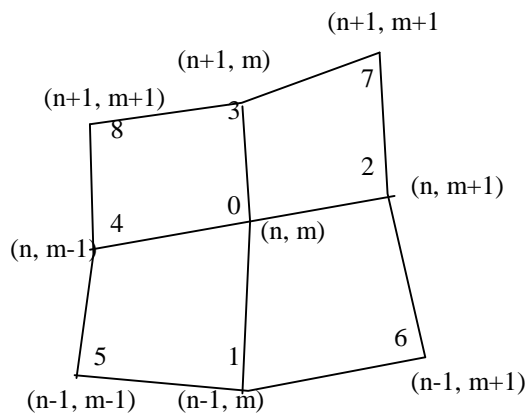
### I.1.6- METHODE DES VOLUMES FINIS

Le problème continu est formulé en termes d'équations de bilan (lois de conservation) sous forme intégrale s'appliquant à des sous-domaines quelconques de D. Le domaine D est discrétisé par des volumes élémentaires (ou cellules, ou volumes finis) pouvant se recouvrir partiellement, et le plus souvent définis par des maillages comme dans les méthodes de différences finies. Les inconnues peuvent être les valeurs moyennes de  $\phi$  dans chaque cellule, ou plus généralement des valeurs de  $\phi$  en certains points de chaque cellule. Les équations discrètes résultent de l'application à  $\phi$  des équations de bilan dans chaque cellule [26].

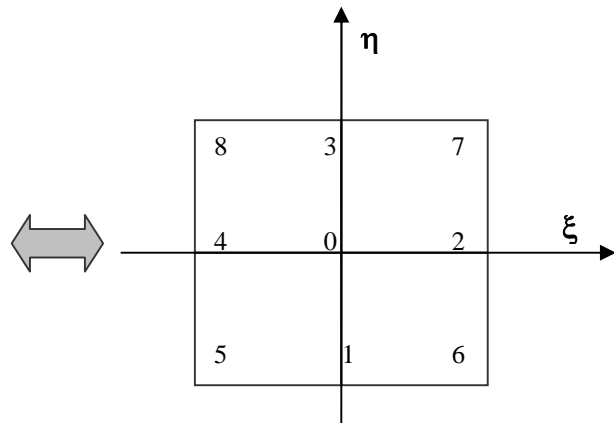
### I.1.7- METHODE DES ELEMENTS FINIS

Cette méthode permet de mieux déterminer les caractéristiques réelles de l'écoulement par la formulation des équations. Elle résout l'équation d'équilibre radiale mise sous la forme quasi-harmonique par l'intermédiaire de la fonction de courant.

Un maillage isoparamétrique à 8 nœuds **Fig.(I-5)** est souvent choisi (possibilité de prendre un maillage triangulaire). Dans le domaine de l'écoulement divisé en éléments. La fonction de courant inconnue  $\psi$  est écrite sous forme polynomiale [4,16] :



**Fig.(I-5.a):** Schéma de maillage (9 points).



**Fig.(I-5.b):** Elément de référence.

Au point 0 :

$$\psi(\theta, m) = \sum_1^8 \psi_i N_i(\xi, \eta) \tag{I.10}$$

Avec:

$\psi_i$  : inconnues nodales,

$N_i(\xi, \eta)$  : fonctions de forme.

L'application de la méthode des résidus pondérés (méthode de **GALERKINE** [16]). à l'équation permet d'écrire :

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{f\} \quad (\text{I.11})$$

$$\text{avec : } \begin{cases} K_{ij} = \int_{\Omega} k(\theta, m) \cdot \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial m} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial m} \right] r \cdot d\theta \cdot dm \\ f_i = \int_{\Omega} N_i(\theta, m) \cdot f(\theta, m) r \cdot d\theta \cdot dm \\ \delta_i = \psi_i \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Le processus de résolution est le suivant [16] :

- On initialise la solution  $\psi$ , en faisant l'hypothèse d'une vitesse uniforme à travers la machine.
- Pour des conditions initiales données, on calcule en première approximation toutes les fonctions annexes à chaque nœud de maillage.
- Les variables aux nœuds d'indice  $i$  sont calculées avec l'aide des informations connues aux nœuds d'indice  $(i-1)$ .
- Un processus itératif est appliqué pour calculer le plan (S1). En général, une méthode de sous-relaxation est utilisée pour éviter la divergence due à l'instabilité.

La plupart des auteurs ont choisi une formulation en fonction de courant, équivalente à celle utilisée pour les méthodes de différences finies, et qui conduit à la résolution d'une équation elliptique. **HIRSCH** et **WARZEE** suivis par **HONG TUAN HA** ont utilisés une méthode de résidus pondérés (méthode de **GALERKINE**) pour discrétiser les équations, tandis que **ADLER** et **KRIMERMAN** ont utilisé une formulation variationnelle [1,5].

D'une façon générale, lorsque les effets tridimensionnels sont supposés être négligeables, l'analyse des écoulements bidimensionnels constitue une première étude des

phénomènes physiques. L'aspect visqueux de l'écoulement provient du développement des couches limites sur les parois ce qui fait apparaître parfois les écoulements secondaires.

Une analyse détaillée de ces phénomènes nécessite des méthodes de calcul pour la résolution des équations de **NAVIER-STOKES**, qui sont en cours de développement et de validation. Avec la méthode des volumes finis [16,22], ces équations sont discrétisées dans le domaine d'étude.

Une première approximation consiste à négliger la viscosité du fluide en utilisant des méthodes d'**EULER**. Cette approche est estimée suffisante dans de nombreux cas lorsque les effets visqueux sont confinée près des parois en l'absence de décollements importants. Dans la plus part des calculs d'optimisation où de conception de profils, la viscosité du fluide est négligée et on considère que le résultat obtenu reste représentatif de l'écoulement inter-aubes, permettant ainsi d'appréhender les risques de décollement de couches limites liées aux gradients de pression sur les parois [2,6].

Un écoulement stationnaire de turbomachine est un cas très particulier : seul le cas d'une roue isolée considérée dans son repère relatif avec des conditions amonts et avals constantes au cours du temps correspond à un régime stationnaire [1,5,6].

Dans notre étude, le domaine de calcul de base est l'espace inter-aubes d'une roue délimité par l'extrados de la première aube et l'intrados de la seconde ainsi que d'un canal à l'amont. Les données géométriques des aubes, aux différents rayons, sont fournies par le logiciel « **POMPAX** » [25] dans la phase du dimensionnement.

Les conditions aux limites imposées à l'entrée du domaine et sur les frontières diffèrent suivant la configuration étudiée et seront examinées par la suite.

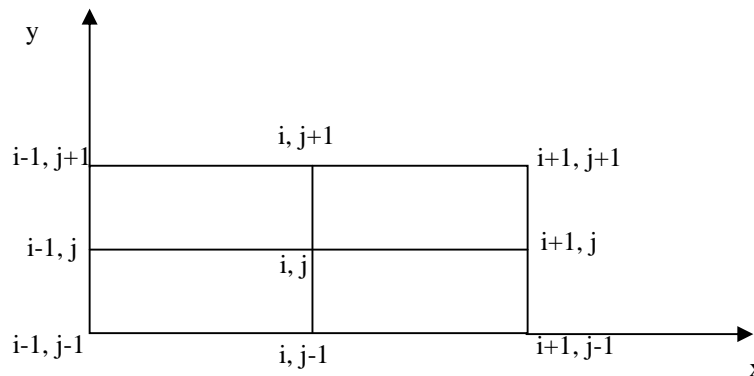
## CONCLUSION

A partir de cette synthèse bibliographique sur les différentes méthodes appliquées au calcul des écoulements inter-aubages dans les turbomachines, nous avons essayé d'appliquer la méthode matricielle à la résolution des équations elliptiques (I.7) par la méthode des différences finis. Pour cela, nous avons utilisé deux types de maillages [27] :



### Maillage rectangulaire droit

La détermination des différentes dérivées, consiste à développer la fonction de courant en chaque nœud en séries de **Taylor** jusqu'à l'ordre deux [27].

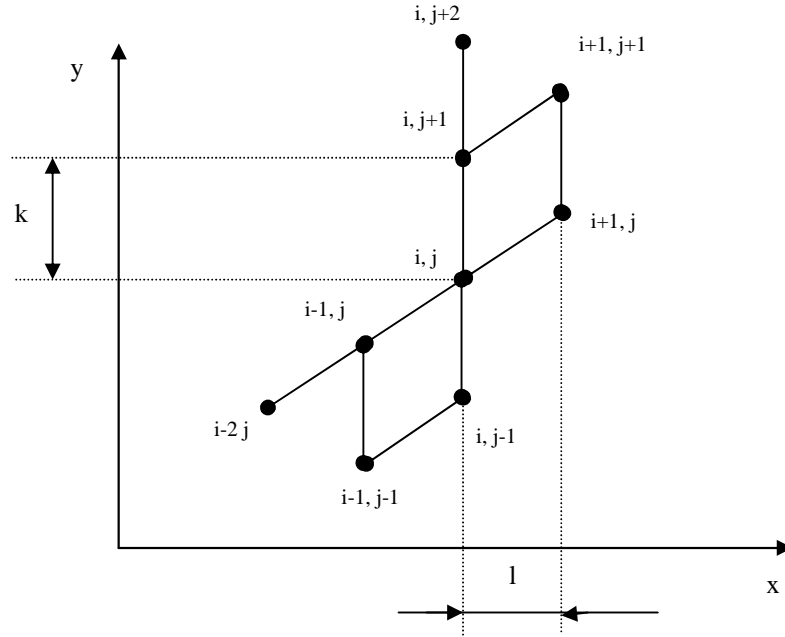


$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2.\Delta x} \\ \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2.\Delta y} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2.\psi_{i,j}}{(\Delta x)^2} \\ \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2.\psi_{i,j}}{(\Delta y)^2} \\ \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i-1,j+1}}{4.\Delta x.\Delta y} \end{array} \right.$$

Modèle de MARCH [27] :

### Maillage rectangulaire incliné

Le type de ce maillage est utilisé dans le cas d'un domaine incliné qui est obtenu après transformation du domaine réel. Les expressions des différentes dérivées sont obtenues par le développement de la fonction de courant en séries de **Taylor** poussé jusqu'à l'ordre neuf [27].



$$\left\{ \begin{aligned} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{i,j} &= \frac{1}{6l} \{ 3(1 + \varepsilon)\psi_{i,j} + 2\psi_{i+1,j} + \psi_{i-2,j} - 6\psi_{i-1,j} - \varepsilon(6\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j+2}) \} \\ \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|_{i,j} &= \frac{1}{6k} \{ 6\psi_{i,j+1} - 3\psi_{i,j} - 2\psi_{i,j-1} - \psi_{i,j+2} \} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{i,j} &= \frac{1}{l^2} \left\{ -2(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)\psi_{i,j} + (\varepsilon + \varepsilon^2)(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) - \varepsilon(\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i+1,j+1}) \right. \\ &\quad \left. + (1 + \varepsilon)(\psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1}) \right\} \\ \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{i,j} &= \frac{1}{k^2} \{ \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} + 2\psi_{i,j} \} \end{aligned} \right.$$

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{2lk} \left\{ (\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}) - (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j}) \right. \\ \left. + (1 + 2\varepsilon)(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j}) \right\}$$

$$\varepsilon = \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{l}$$

La transformation de l'équation du (I.10) dans le plan fictif qui est défini par :

L'écoulement dans le repère (m,θ) correspond à l'écoulement plan (x,y) tel que :

$$\begin{cases} dx = k.dm \\ dy = k.r.d\theta \end{cases}$$

k est une constant définissant l'échelle de la transformation, qui est définit par :

$k = \frac{Na.t}{2.\pi r}$  ; t est le pas du canal, Na est le nombre d'aubes.

Expressions de l'équation (I.7) dans le repère plan :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + A \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{2\omega b \rho}{k^2} \sin \delta \quad (\text{I.13})$$

où :

$$\begin{cases} B = -\frac{\partial(\log|b\rho|)}{\partial y} \\ A = \frac{\sin \delta}{rk} - \frac{\partial(\log|b\rho|)}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Pour transformer l'équation précédente en une équation adimensionnelle, nous avons utilisé les variables adimensionnelles suivantes :

$$x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{t}; \quad \psi^* = \frac{\psi}{Q}; \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_r}; \quad b^* = \frac{b}{b_r}$$

où : L est la corde de l'aube, t le pas, Q le débit,  $\rho_r$  la densité de référence et  $b_r$  l'épaisseur de la nappe de courant de référence. Alors l'équation principale devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{1}{t^2} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} + \frac{1}{L^2} \left( \frac{L}{r.k} \sin(\delta) - \frac{\partial \log(\rho^*.b^*)}{\partial x^*} \right) \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} - \frac{1}{t^2} \frac{\partial \log(\rho^*.b^*)}{\partial y^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} \\ = -\frac{2.\rho_r.b_r.\rho.b}{k^2.Q} \omega.\sin(\delta) \end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

Pour une pompe axiale en équilibre radiale ( $b=c^{te}$ ) conduisant à ( $\delta=0$ ), le second membre de l'équation précédente est nul. C'est le seul cas où l'on est ramené à l'écoulement dans une grille fixe.

La discrétisation de l'équation (I.15) devient :

$$\psi_{i,j}^* = f(\psi_{i-2,j}^*, \psi_{i-1,j}^*, \psi_{i+1,j}^*, \psi_{i,j+2}^*, \psi_{i,j+1}^*, \psi_{i,j-1}^*, \psi_{i-1,j-1}^*, \psi_{i+1,j+1}^*) \quad (\text{I.16})$$

Nous avons essayé de résoudre cette dernière avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \psi^* = 0 & \text{au niveau de la paroi inférieure du canal.} \\ \psi^* = 1 & \text{au niveau de la paroi supérieure du canal.} \end{cases}$$

Malheureusement, nous n'avons pas obtenus de résultats par cette méthode car elle diverge au cours des premières itérations malgré que nous avons diminué le facteur de relaxation jusqu'à une valeur très faible.

Puisque d'une part, nous n'avons pas pu trouvé la cause de cette divergence et, d'autre part, la viscosité du fluide n'intervient pas dans l'équation principale, nous avons alors changé d'approche au problème posé.

Nous allons appliquer la méthode des volumes finis pour la résolution des équations de **NAVIER-STOKES** afin de simuler l'écoulement aube-à-aube dans la pompe axiale. Le choix de cette méthode numérique est dû au fait qu'elle est relativement facile à mettre en œuvre par rapport à celle des éléments finis et plus adéquate pour les conditions aux limites que la méthode des différences finis.

## II.1- NOTIONS SUR LE FONCTIONNEMENT D'UNE TURBOMACHINE

### II.1.1- DEFINITION

Une turbomachine est une machine qui réalise un transfert d'énergie entre son arbre propre et un fluide en mouvement. Ce transfert peut s'effectuer dans les deux sens suivants :

- Une récupération de l'énergie du fluide sur l'arbre de la machine (fonction réalisée par les machines de type turbine).

- Une augmentation de l'énergie du fluide par fourniture d'énergie mécanique sur l'arbre de la machine (fonction réalisée par les machines de type compresseur, ventilateur, pompe).

### II.1.2- FONCTIONS ET DOMAINES D'UTILISATION DES TURBOMACHINES

#### II.1.2.1- RÉCUPÉRATION DE L'ÉNERGIE D'UN FLUIDE

Le fluide concerné peut être un liquide comme dans le cas des turbines hydrauliques. Ces turbines sont utilisées pour récupérer l'énergie potentielle d'une masse d'eau (barrages hydroélectriques) afin de produire de l'énergie électrique par l'intermédiaire d'alternateurs. Le fluide concerné peut également être un gaz. C'est le cas :

- ◆ des turbines de dentiste : la turbine alimentée par l'air comprimé assure la rotation de la fraise.
- ◆ des turbocompresseurs : la turbine alimentée par les gaz d'échappement entraîne un compresseur qui permet, par exemple, la suralimentation du moteur à combustion interne concerné.

- des turbopompes : la turbine entraîne alors une pompe (utilisée notamment dans l'industrie spatiale).

- Les turbines peuvent également être étudiées en association avec d'autres éléments (compresseurs, échangeurs de chaleur). C'est le cas par exemple de la production d'énergie mécanique à partir d'une source de chaleur et de la propulsion par réaction chimique en aéronautique.

### **II.1.2.2- TRANSPORT DE FLUIDE**

Deux cas peuvent se présenter :

- Elévation d'une masse de liquide: il faut alors lui fournir de l'énergie afin de vaincre le champ gravitationnel. C'est le domaine d'utilisation des pompes hydrauliques.

- Le transport horizontal de gaz ou de liquides sur de longues distances par l'intermédiaire de conduits.

### **II.1.2.3- COMPRESSION DE GAZ**

Cette fonction assurée par des compresseurs, se présente dans des domaines très diversifiés tels que l'industrie chimique (pression de réaction), l'industrie pétrolière (pour l'extraction du pétrole) ou simplement la création de sources d'air comprimé.

### **II.1.2.4- VENTILATION**

La création d'un débit d'air pour la ventilation, le refroidissement ou le séchage notamment se réalise au moyen de ventilateurs.

### **II.1.2.5- PRODUCTION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE À PARTIR D'UNE SOURCE DE CHALEUR**

Cette production est réalisée par des turbines à gaz ou des turbines à vapeur. Ces machines associent dans un cycle thermodynamique, turbines, compresseurs (où pompes), sources de chaleur, et éventuellement des refroidisseurs.

Les turbines à gaz peuvent servir à la production d'énergie électrique (locale dans l'aérospatiale, les chars, les avions) ou la production d'énergie mécanique pour actionner par exemple une hélice de bateau, d'avion ou un rotor d'hélicoptère.

### II.1.3- DIFFERENTS TYPES DE TURBOMACHINES

Les géométries sont très diverses (de l'éolienne à la turbine Pelton). Une majorité de turbomachines peut cependant être répertoriée dans les catégories des machines axiales, des machines radiales (où centrifuges) et de géométrie intermédiaire qualifiée de mixtes ou hélico-centrifuges [9].

#### II.1.3.1- LES MACHINES AXIALES

Roue mobile de machine axiale : le fluide entre et sort avec une vitesse débitante approximativement axiale.

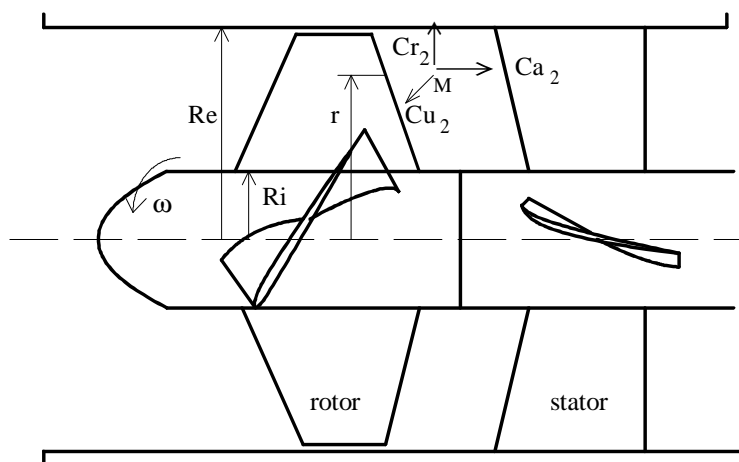


Fig.(II-1) : Représentation d'une machine axiale.

$R_e, R_i$  : rayons extérieur et intérieur de la roue.

$Cr_2, Ca_2$  et  $Cu_2$  : vitesses radiale, absolue et d'entraînement d'une particule fluide (M) à la sortie du rotor.

Le fonctionnement s'apparente intuitivement à celui d'un tire-bouchon (ventilateur), ou d'un moulinet (turbine). Ces machines peuvent véhiculer des débits importants avec des vitesses de rotations faibles par rapport aux machines centrifuges.

### II.1.3.2– LES MACHINES CENTRIFUGES

Roue mobile de compresseur centrifuge : le fluide sort approximativement dans un plan radial, l'entrée pouvant ne pas être radiale. Dans le cas d'une turbine le flux est inversé.

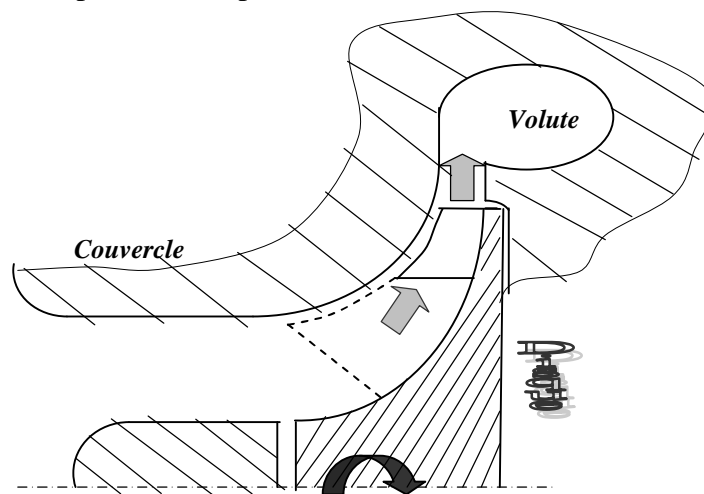
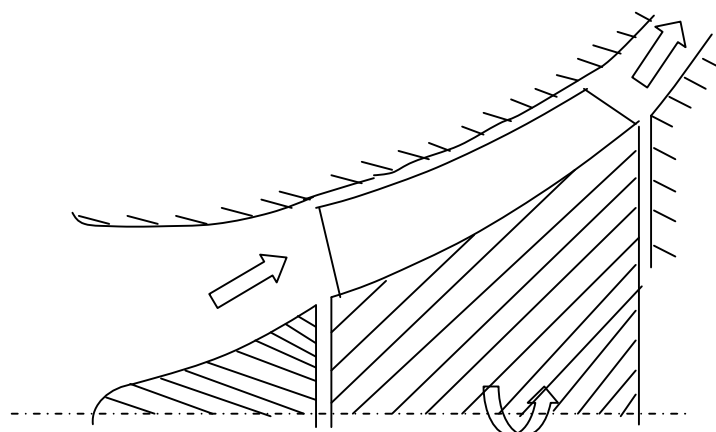


Fig.(II-2) : Représentation d'une machine centrifuge.

Le fonctionnement s'apparente intuitivement de celui d'une centrifugeuse. Les débits sont limités à cause de la présence du coude qui influe sur le comportement de la couche limite sur la paroi cotée couvercle [9].

### II.1.3.3– LES MACHINES HELICO-CENTRIFUGES

Machines mixtes : géométrie et performances intermédiaires entre les deux catégories précitées.



21  
Fig.(II-3) : Représentation d'une machine hélico-centrifuge.

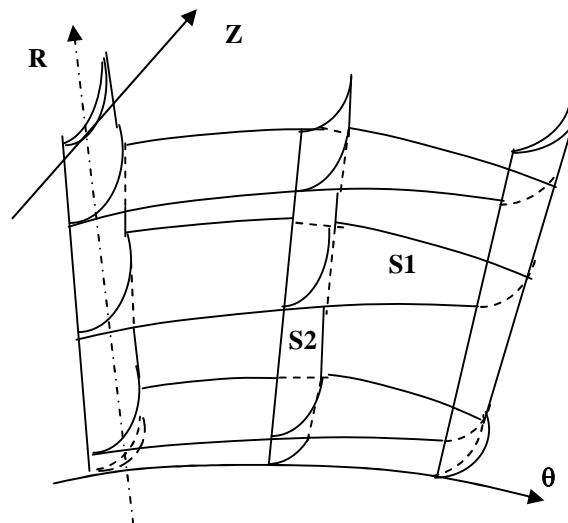


## II.2- MODELISATION QUASI-TRIDIMENSIONNELLE DE L'ÉCOULEMENT

Jusqu'au début des années 80, il n'existait pas de méthodes de résolution des équations de l'écoulement dans leur ensemble. L'approche du problème par approximations, en devisant l'écoulement réel tridimensionnel **Fig.(II-4)** en un certain nombre de modèles plus simples, est l'une des techniques les plus utilisées pour le calcul des écoulements stationnaires. Elle est dite : méthode (S1-S2) de Ch. **WU** (1952) [5,9,16].

## II.3- DECOMPOSITION DE L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL EN DEUX ÉCOULEMENTS BIDIMENSIONNELS

Au lieu d'étudier l'écoulement dans son ensemble en trois dimensions, la technique de **Wu** permet de le faire sur deux séries de surfaces représentées sur la figure ci-dessous :



**Fig.(II-4) : Modèle des surfaces.**

- Les surfaces aube-à-aube (S1) : ce sont des surfaces de courant générées par des particules situées sur des cercles centrés sur l'axe de rotation de la machine.

- Les surfaces méridiennes (S2) : ce sont des surfaces de courant générées par des particules situées sur une droite perpendiculaire à l'axe de rotation.

Avec cette méthode, le problème initial des équations locales et les conditions aux limites tridimensionnelles est décomposé en deux problèmes bidimensionnels couplés.

Dans le cadre de cette étude, nous nous limitons uniquement à l'étude de l'écoulement aube-à-aube (S1).

### II.3.1- EQUATIONS DE BASE

Dans ce paragraphe, nous allons donner une formulation mathématique décrivant l'écoulement dans une turbomachine de compression axiale.

Pour aborder un tel problème, la mécanique des fluides met à notre disposition un certain nombre d'équations aux dérivées partielles associées à des conditions aux limites qui nous permettent d'envisager une solution dépendant, à priori du temps et de l'espace.

Soit une roue unique, animée d'une vitesse de rotation uniforme  $N$  dans le repère lié à la roue. Et soit  $(r, \theta, z)$  un système de coordonnées cylindriques lié au repère de la roue. Faisons le changement de repère suivant :

$$\begin{array}{ccc} (r, r\theta, z) & \longrightarrow & (x, y, z) \\ \text{coord. cylindriques} & & \text{coord. cartésiennes} \\ \text{liées à la roue} & & \end{array}$$

Dans un tel repère [13], les écoulements de fluides Newtoniens, incompressibles et visqueux sont régis par les équations définies dans les paragraphes ci-dessous :

#### II.3.1.1- EQUATION DE CONTINUITÉ

Cette équation concerne le principe de conservation de la masse dans un volume de contrôle. L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (\text{II.1})$$

Où  $D/Dt$  : est la dérivée totale (en suivant la particule) définit par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}$$

### II.3.1.2- EQUATIONS DE QUANTITE DE MOUVEMENT

Elles traduisent l'équilibre du fluide sous l'effet des forces extérieures.

Lorsque la roue tourne avec une vitesse de rotation constante, la composante tangentielle de l'accélération est nulle (située dans le plan aube à aube), et les équations de NAVIER-STOKES s'écrivent, d'après [13] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \cdot \frac{Du}{Dt} = \rho \cdot f_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \cdot \frac{Dv}{Dt} = \rho \cdot f_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \cdot \frac{Dw}{Dt} = \rho \cdot f_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right.$$

(II.2)

Ces équations forment un système d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires. Dans un repère cartésien, les forces de volume se réduisent aux forces de gravité et les équations (II.2) peuvent se mettre sous la forme compacte suivante :

$$\rho \frac{DV}{Dt} = \rho \cdot f_i + \mu \cdot \Delta V - \nabla p \quad i=x,y,z$$

(II.3)

Les hypothèses que nous allons considérer dans notre étude sont :

Soit une machine axiale véhiculant un fluide incompressible ( $\rho=c^{te}$ ).

- La modélisation du plan (S1) de Ch. WU nous permet d'étudier l'écoulement dans le plan (x, y) (écoulement bidimensionnel et stationnaire) [1,5,6].
- Les forces de volume sont négligées (l'épaisseur d'une nappe de courant est très fine).

D'après les hypothèses précédentes les équations (II.1) et (II.3) deviennent :

- *Equation de continuité :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(II.4)

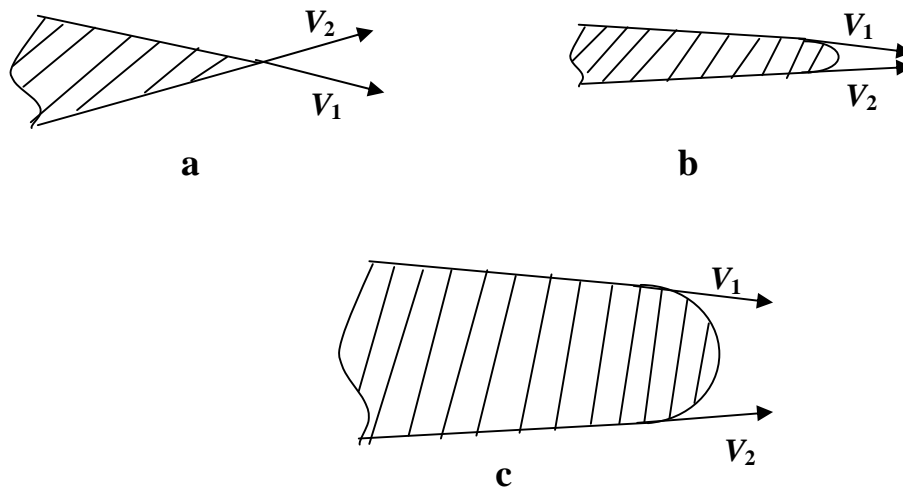
- *Equation de quantité de mouvement :*

$$\begin{cases} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

(II.5)

### II.3.2- CONDITION DE KUTTA JOUKOWSKI

Cette condition concerne l'écoulement au bord de fuite; ce dernier peut être soit un angle fini **Fig.(II-5-a)**, sous la forme d'un biseau **Fig.(II-5-b)** où en forme arrondie **Fig.(II-5-c)**.



**Fig.(II-5) : Différentes formes du bord de fuite.**

La condition de **KUTTA- JOUKOWSKI** s'exprime de la façon suivante :

Pour un écoulement de fluide autour d'un profil dont l'intrados et l'extrados se terminent suivant une tangente commune, la ligne de courant issue du bord de fuite doit quitter ce dernier suivant cette tangente.

Dans ce chapitre, nous allons formuler la procédure de résolution de l'équation différentielle générale de la variable  $\phi$  en appliquant la méthode des volumes finis présentée dans l'annexe- A, en utilisant un schéma **POWER LAW** qui a démontré ses performances par rapport autres schémas [17] (loi en puissance, précision et temps de calcul).

### III.1- ETUDE DU CHAMP DYNAMIQUE

Les variables qui interviennent durant l'écoulement du fluide dans la pompe sont les composantes de la vitesse ( $u, v$ ) et la pression  $p$ .

L'équation de continuité ainsi que celle du mouvement s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\rho u_i \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (\mu \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) + s ; i=1,2 \quad (\text{III.2})$$

où :

$$\phi = u, v$$

$$s = - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$\mu$  est la viscosité dynamique.

Nous constatons que le champ de pression apparaît dans l'équation du mouvement, donc la pression est indirectement introduite à travers l'équation de continuité.

Si la pression exacte est connue, et que nous l'introduisons dans l'équation du mouvement, on obtient un champ de vitesse qui vérifie l'équation de continuité.

#### Remarque

Pour éviter cette difficulté, certains auteurs utilisent la formulation : fonction de courant- vorticité ( $\psi, \xi$ ), en éliminant le gradient de pression [8,13,17,19].

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} ; \xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\text{III.3})$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$\rho \frac{\partial \xi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \xi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \xi}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.4})$$

$$\xi = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \quad (\text{III.5})$$

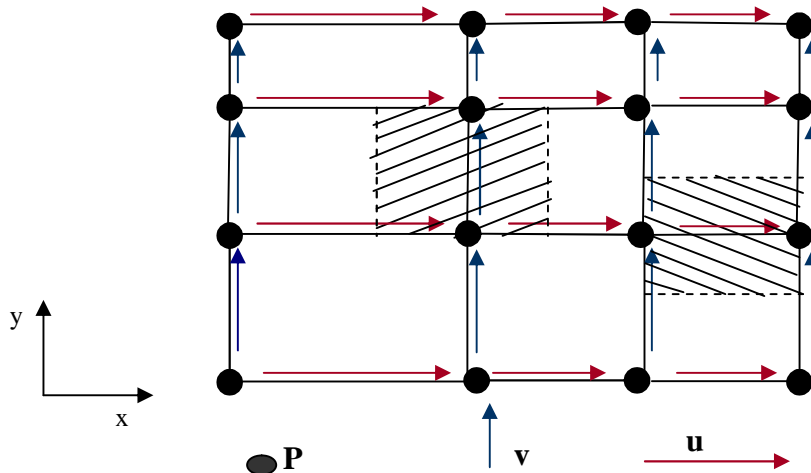
## III.2- DISCRETISATION DES EQUATIONS

### III.2.1- MAILLAGE

Nous adoptons un maillage non uniforme (pas entre deux nœuds successifs est variable) et décalé (utilise les pressions dans les différents nœuds et les vitesses au niveau des interfaces). Cette méthode est utilisée par **PATANKAR** [17] :

**HARLOW & WELCH** (1956); **CARETTO, CURR & SPALDING** (1972), **PATANKAR & SPALDING** (1972) **SIMPLE**.

Ce maillage est représenté sur la **Fig.(III-1)** ci dessous :



**Fig.(III-1) : Représentation du maillage décalé.**

Nous avons utilisé, dans notre étude, 3 maillages différents : un maillage rectangulaire raffiné dans le cas de la pompe entière, un autre rectangulaire droit qui passe par les différents points (26) de définition du profil et un dernier incliné et raffiné au niveau des parois extrados et intrados. Les équations utilisées pour le raffinage du premier ainsi que du dernier maillage sont respectivement :

$$\Delta y = \frac{Pas}{(m_1 + 1).m_1} \quad \text{et} \quad \Delta y(i) = \frac{Pas(i)}{(m_1 + 1).m_1}$$

où :  $\Delta y$  : pas du maillage.

- Pas : pas inter-aubes.
- $m_1$  : nombre de nœuds pour une moitié du canal aube - à - aube.
- $i$  : indice de la coordonnée des nœuds suivant x (car le pas est différents dans chaque section transversale).

**III.2.2- EQUATIONS DU MOUVEMENT**

a/ Composante suivant l'axe x :

L'équation du mouvement projetée sur l'axe x ( $\phi=u$ ) s'écrit :

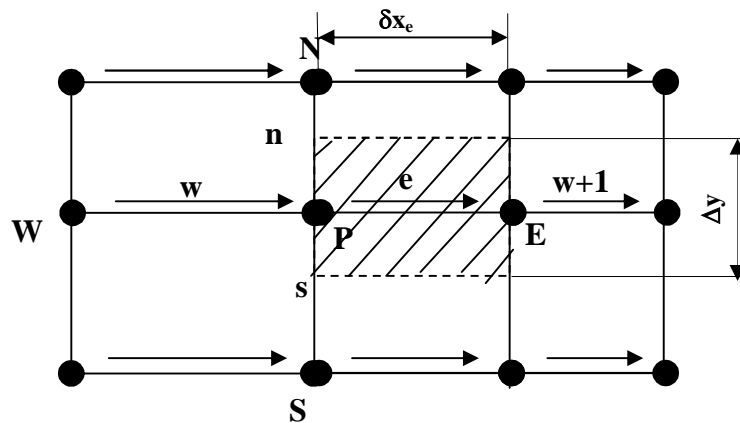
$$\rho u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{III.6}$$

En tenant compte du flux J :

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{III.7}$$

avec :

$$\begin{cases} J_x = \rho u \cdot u - \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\ J_y = \rho v \cdot u - \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \tag{III.8}$$



**Fig.(III-2) : Représentation du volume de contrôle -U<sub>e</sub>-.**

L'intégration de l'équation (III.7) sur le volume de contrôle ( $\delta x_e \cdot \Delta y$ ), représenté sur la **Fig.(III-2)** autour de  $u_e$ , donne :

$$(J_{Ex} - J_{Px}) \cdot \Delta y + (J_{ny} - J_{sy}) \cdot \delta x_e = (p_p - p_e) \cdot \Delta y \tag{III.9}$$

avec :

$$\begin{cases} J_{Ex} = (\rho u)_E \cdot u_E - \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)_E \\ J_{Px} = (\rho u)_P \cdot u_P - \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)_P \\ J_{ny} = (\rho v)_n \cdot u_n - \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n \\ J_{sy} = (\rho v)_s \cdot u_s - \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

d'après l'équation (A.58) [Annexe –A], l'équation (III.9) devient :

$$\left\{ (D_{Ex}^* J_{Ex}^* - D_{Px}^* J_{Px}^*) + \delta x_e \left( \left\{ (\rho v)_n \cdot u_n - \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n \right\} - \left\{ (\rho v)_s \cdot u_s - \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right\} \right) \right\} = (p_P - p_E) \cdot \Delta y \quad (\text{III.11})$$

substituant la valeur de chaque flux [équation (A-51)] dans l'équation précédente :

$$\left\{ D_{Ex} \{ B_{Ex} u_e - A_{Ex} u_{w+1} \} - D_{Px} \{ B_{Px} u_w - A_{Px} u_e \} + \{ \delta x_e (\rho v)_n \cdot u_n - \delta x_e (\rho v)_s \cdot u_s \} - \delta x_e \left\{ \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right\} \right\} = (p_P - p_E) \cdot \Delta y \quad (\text{III.12})$$

où encore :

$$\left\{ \begin{aligned} & \{ D_{Ex} \cdot B_{Ex} + D_{Px} \cdot A_{Px} \} u_e = \{ D_{Px} \cdot B_{Px} \} u_w + \{ D_{Ex} \cdot A_{Ex} \} u_{w+1} \\ & - \{ \delta x_e (\rho v)_n \} u_n + \{ \delta x_e (\rho v)_s \} u_s + \delta x_e \left\{ \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right\} + (p_P - p_E) \cdot \Delta y \end{aligned} \right. \quad (\text{III.13})$$

avec :

$$\begin{cases} \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n = \mu_P \frac{u_n - u_P}{(\Delta y / 2)} \\ - \left( \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s = \mu_P \frac{u_s - u_P}{(\Delta y / 2)} \end{cases}$$

l'équation discrétisée devient :

$$a_e u_e = a_w u_w + a_{w+1} u_{w+1} + a_n u_n + a_s u_s + (p_P - p_E) A_e \quad (\text{III.14})$$



avec :

$$\begin{cases} a_w = D_{Px} \cdot A(|R_{ePx}|) + [F_{Px}, 0] \\ a_{w+1} = D_{Ex} \cdot A(|R_{eEx}|) + [-F_{Ex}, 0] \\ a_s = [F_{sy}, 0] \\ a_n = [-F_{ny}, 0] \\ a_e = a_w + a_{w+1} + a_s + a_n \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

$A_e = \Delta y$  représente la surface sur laquelle agit la pression.

Avec :

$$\begin{cases} D_{Ex} = \left(\frac{\mu_E}{\Delta x}\right) \delta y_n & ; & F_{Ex} = (\rho u)_E \cdot \delta y_n \\ D_{Px} = \left(\frac{\mu_P}{\Delta x}\right) \delta y_n & ; & F_{Px} = (\rho u)_P \cdot \delta y_n \\ D_{Ny} = \left(\frac{\mu_N}{\Delta y}\right) \delta x_e & ; & F_{ny} = (\rho v)_n \cdot \delta x_e \\ D_{Py} = \left(\frac{\mu_P}{\Delta y}\right) \delta x_e & ; & F_{sy} = (\rho v)_s \cdot \delta x_e \\ R_{ePx} = \frac{F_{Px}}{D_{Px}} \\ R_{eEx} = \frac{F_{Ex}}{D_{Ex}} \end{cases}$$

Les fonctions  $A(|R_e|)$  sont calculées à partir de la formule du schéma de **Power– Law** qui est définie dans l'Annexe –A].

Avec la forme générale :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + A_e (p_P - p_E) \quad (\text{III.16})$$

*b/ Composante suivant l'axe y :*

L'équation du mouvement projetée sur l'axe y ( $\phi=v$ ) s'écrit :

$$\rho u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \mu \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{III.17})$$

En tenant compte du flux J :

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{III.18})$$

avec :

$$\begin{cases} J_x = \rho u.v - \mu. \frac{\partial v}{\partial x} \\ J_y = \rho v.v - \mu. \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (III.19)$$

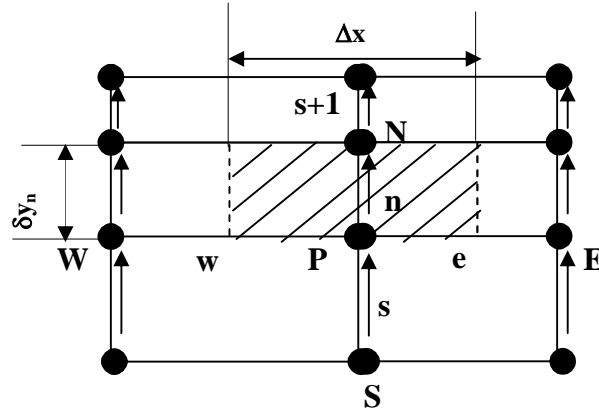


Fig.(III-3) : Représentation du volume de contrôle -V<sub>n</sub>-.

L'intégration de l'équation (III.18) sur le volume de contrôle (Δx.δy<sub>n</sub>), représenté sur la Fig.(III-3) autour de v<sub>n</sub>, donne :

$$(J_{ex} - J_{wx}).\delta y_n + (J_{Ny} - J_{Py}).\Delta x = (p_P - p_N).\Delta x \quad (III.20)$$

avec :

$$\begin{cases} J_{ex} = (\rho u)_e.v_e - \left( \mu. \frac{\partial v}{\partial x} \right)_e \\ J_{wx} = (\rho u)_w.v_w - \left( \mu. \frac{\partial v}{\partial x} \right)_w \\ J_{Ny} = (\rho v)_N.v_N - \left( \mu. \frac{\partial v}{\partial y} \right)_N \\ J_{Py} = (\rho v)_P.v_P - \left( \mu. \frac{\partial v}{\partial y} \right)_P \end{cases} \quad (III.21)$$

d'après l'équation (A.58) [Annexe -A], l'équation (III.20) devient :

$$\begin{cases} \delta y_n (\rho u)_e.v_e - \delta y_n (\rho u)_w.v_w - \delta y_n \left\{ \left( \mu. \frac{\partial v}{\partial x} \right)_e - \left( \mu. \frac{\partial v}{\partial x} \right)_w \right\} + (D_{Ny}^* J_{Ny}^* - D_{Py}^* J_{Py}^*) \\ = (p_P - p_N).\Delta x \end{cases} \quad (III.22)$$

substituant la valeur de chaque flux [équation (A-51)] dans l'équation précédente :

$$\left\{ \begin{aligned} & \{\delta y_n(\rho u)_e\} \cdot v_e - \{\delta y_n(\rho u)_w\} \cdot v_w - \delta y_n \left\{ \left( \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)_e - \left( \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)_w \right\} \\ & + D_{Ny} \{B_{Ny} v_n - A_{Ny} v_{s+1}\} - D_{Py} \{B_{Py} v_s - A_{Py} v_n\} \end{aligned} \right\} = (p_P - p_N) \cdot \Delta x \quad (\text{III.23})$$

où encore :

$$\left\{ \begin{aligned} & \{D_{Ny} \cdot B_{Ny} + D_{Py} \cdot A_{Py}\} v_n = \{D_{Ny} \cdot A_{Ny}\} v_{s+1} + \{D_{Py} \cdot B_{Py}\} v_s \\ & - \{\delta y_n(\rho u)_e\} \cdot v_e + \{\delta y_n(\rho u)_w\} \cdot v_w - \delta y_n \left\{ \left( \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)_e - \left( \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)_w \right\} + (p_P - p_N) \cdot \Delta x \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.24})$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left( \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)_e = \mu_P \frac{v_e - v_P}{(\Delta x / 2)} \\ & - \left( \mu \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right)_w = \mu_P \frac{v_w - v_P}{(\Delta x / 2)} \end{aligned} \right.$$

l'équation discrétisée devient :

$$a_n v_n = a_{s+1} v_{s+1} + a_s v_s + a_e v_e + a_w v_w + (p_P - p_N) A_n \quad (\text{III.25})$$

avec :

$$\left\{ \begin{aligned} & a_w = [F_{wx}, 0] \\ & a_s = D_{Py} \cdot A(|R_{ePy}|) + [F_{Py}, 0] \\ & a_e = [-F_{ex}, 0] \\ & a_{s+1} = D_{Ny} \cdot A(|R_{eNy}|) + [F_{Ny}, 0] \\ & a_n = a_w + a_s + a_{s+1} + a_e \end{aligned} \right. \quad (\text{III.26})$$

$A_n = \Delta x$  représente la surface sur laquelle agit la pression.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{Ex} = \left( \frac{\mu_E}{\Delta x} \right) \delta y_n \quad ; \quad F_{ex} = (\rho u)_e \cdot \delta y_n \\ D_{Px} = \left( \frac{\mu_P}{\Delta x} \right) \delta y_n \quad ; \quad F_{wx} = (\rho u)_w \cdot \delta y_n \\ D_{Ny} = \left( \frac{\mu_N}{\Delta y} \right) \delta x_e \quad ; \quad F_{Ny} = (\rho v)_N \cdot \delta x_e \\ D_{Py} = \left( \frac{\mu_P}{\Delta y} \right) \delta x_e \quad ; \quad F_{Py} = (\rho v)_P \cdot \delta x_e \\ R_{e_{Py}} = \frac{F_{Py}}{D_{Py}} \\ R_{e_{Ny}} = \frac{F_{Ny}}{D_{Ny}} \end{array} \right.$$

Les fonctions  $A(|R_e|)$  sont calculées à partir de la formule du schéma de **Power– Law** qui est définie dans l'Annexe –A].

Avec la forme générale :

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + A_n (p_P - p_N) \quad (\text{III.27})$$

avec les équations (III.16) et (III.27), on abouti au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + A_e (p_P - p_E) \quad (1) \\ a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + A_n (p_P - p_N) \quad (2) \end{array} \right. \quad (\text{III.28})$$

La résolution de ce système nécessite la connaissance de la pression. Le champ de vitesse obtenu ne satisfait l'équation de continuité que si la pression est correcte.

Au choix initial  $p^*$  correspond la solution :  $u^*$  ;  $v^*$ , donc le système précédent devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_e^* u_e^* = \sum a_{nb}^* u_{nb}^* + A_e^* (p_P^* - p_E^*) \quad (1) \\ a_n^* v_n^* = \sum a_{nb}^* v_{nb}^* + A_n^* (p_P^* - p_N^*) \quad (2) \end{array} \right. \quad (\text{III.29})$$

### III.3- CORRECTION DES VITESSES ET PRESSIONS

Soit  $p^*$  la pression estimée telle que les vitesses obtenues  $u^*$  et  $v^*$  s'approcheront progressivement de la valeur qui satisfait l'équation de continuité.

Soit  $p$  la pression exacte et  $p'$  la pression corrigée.

On écrit alors :

$$\begin{cases} p = p^* + p' & (1) \\ u = u^* + u' & (2) \\ v = v^* + v' & (3) \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

$u', v'$ : corrections des vitesses  $u$  et  $v$ .

La différence entre les deux équations (III.28-1) et (III.28-1) nous donne :

$$a_e u'_e = \sum a_{nb} u'_{nb} + A_e (p'_P - p'_E) \quad (\text{III.31})$$

**Algorithme de SIMPLE** : Le terme :  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  est négligeable

### III.3.1- FORMULES DE CORRECTION DES VITESSES

L'équation (III.31) devient :

$$u'_e = d_e (p'_P - p'_E) \quad (\text{III.32})$$

avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad (\text{III.33})$$

D'une manière similaire pour la correction de la vitesse à l'interface  $w$  :

$$u'_w = d_w (p'_P - p'_W) \quad (\text{III.34})$$

avec :

$$d_w = \frac{A_w}{a_w} \quad (\text{III.35})$$

donc l'équation (III.30-2) devient :

$$\begin{cases} u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \\ u_w = u_w^* + d_w (p'_P - p'_W) \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

D'une manière similaire, on obtient l'équation de correction pour la composante  $v$  :

$$\begin{cases} v_n = v_n^* + d_n (p'_P - p'_N) \\ v_s = v_s^* + d_s (p'_P - p'_S) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

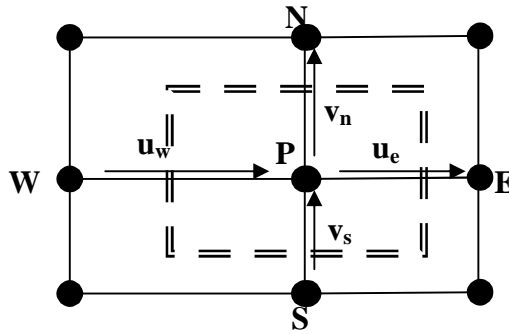
$$\begin{cases} d_n = \frac{A_n}{a_n} \\ d_s = \frac{A_s}{a_s} \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

### III.3.2- ÉQUATION DE CORRECTION DE PRESSION

L'équation de continuité s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (\text{III.39})$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle représenté sur la **Fig.(III-4)** autour du point P, nous donne :



**Fig.(III-4) : Représentation du volume de contrôle total.**

$$\{(\rho u)_e - (\rho u)_w\} \Delta y + \{(\rho v)_n - (\rho v)_s\} \Delta x = 0 \quad (\text{III.40})$$

En substituant dans l'équation (III.40) les vitesses données par les systèmes (III.36) et (III.37), on abouti à :

$$\begin{cases} \left\{ \rho_e (u_e^* + d_e (p_P^i - p_E^i)) - \rho_w (u_w^* + d_w (p_P^i - p_W^i)) \right\} \Delta y \\ + \left\{ \rho_n (v_n^* + d_n (p_P^i - p_N^i)) - \rho_s (v_s^* + d_s (p_P^i - p_S^i)) \right\} \Delta x = 0 \end{cases} \quad (\text{III.41})$$

où :

$$a_P p_P^i = a_E p_E^i + a_W p_W^i + a_N p_N^i + a_S p_S^i + b \quad (\text{III.42})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E = \rho_e \cdot d_e \cdot \Delta y \\ a_N = \rho_n \cdot d_n \cdot \Delta x \\ a_W = \rho_w \cdot d_w \cdot \Delta y \\ a_S = \rho_s \cdot d_s \cdot \Delta x \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \\ b = \left\{ (\rho u)_w^* - (\rho u)_e^* \right\} \Delta y + \left\{ (\rho v)_s^* - (\rho v)_n^* \right\} \Delta x \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

### Remarque

Cet algorithme comporte les étapes suivantes :

- 1- Choix du champ de pression Soit  $p^*$ .
- 2- Résolution des équations du mouvement discrétisées pour obtenir  $u^*$  et  $v^*$ .
- 3- Résolution des équations de correction de pression pour obtenir  $p'$ .
- 4- Correction des pressions  $p = p' + p^*$ .
- 5- Correction les vitesses  $u = u' + u^*$  et  $v = v' + v^*$ .
- 6-  $p$  sera la nouvelle valeur de  $p^*$  et le retour à l'étape 2.

Et le processus sera répété jusqu'à la convergence.

### COMMENT FAIT-ON LE CHOIX DES PRESSIONS ?

*Algorithme SIMPLER* (PATANKAR 1979), *SIMPLE Revised* [17] :

Pour permettre l'amélioration de la vitesse de la convergence le terme :  $\sum a_{nb} u_{nb}^*$

n'a pas été négligé.

### \*- EQUATION DE PRESSION

On fait un choix initial pour les vitesses  $u^*$  et  $v^*$ .

Soient les pseudo-vitesses :

$$\begin{cases} \hat{u} = \frac{\sum a_{nb} u_{nb}^*}{a_e} \\ \hat{v} = \frac{\sum a_{nb} v_{nb}^*}{a_n} \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

L'équation algébrique des vitesses (III.29) devient :

$$\begin{cases} u_e = \hat{u}_e + d_e(p_P - p_E) \\ u_w = \hat{u}_w + d_w(p_P - p_W) \\ v_n = \hat{v}_n + d_n(p_P - p_N) \\ v_s = \hat{v}_s + d_s(p_P - p_S) \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

En substituant les valeurs des vitesses  $u$  et  $v$  dans l'équation (III.40), on obtient l'équation de pression qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \left\{ \rho_e(\hat{u}_e + d_e(p_P - p_E)) - \rho_w(\hat{u}_w + d_w(p_P - p_W)) \right\} \Delta y \\ + \left\{ \rho_n(\hat{v}_n + d_n(p_P - p_N)) - \rho_s(\hat{v}_s + d_s(p_P - p_S)) \right\} \Delta x = 0 \end{cases} \quad (\text{III.46})$$

où encore :

$$a_P p_P = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + b \quad (\text{III.47})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E = \rho_e \cdot d_e \cdot \Delta y \\ a_N = \rho_n \cdot d_n \cdot \Delta x \\ a_W = \rho_w \cdot d_w \cdot \Delta y \\ a_S = \rho_s \cdot d_s \cdot \Delta x \\ a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \\ b = \left\{ (\rho \hat{u})_w - (\rho \hat{u})_e \right\} \Delta y + \left\{ (\rho \hat{v})_s - (\rho \hat{v})_n \right\} \Delta x \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Dans ce cas aucun terme n'a été négligé pour aboutir à l'équation algébrique de la pression (SIMPLER) et la pression n'est pas choisie arbitrairement.

### \*- EQUATION DE LA FONCTION DE COURANT

L'équation de base qui définit la fonction de courant dans un repère relatif [16], s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho \cdot B \cdot v \quad \rightarrow (1) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho \cdot B \cdot u \quad \rightarrow (2) \end{cases} \quad (\text{III.49})$$



$B=1$ . :épaisseur de la nappe de courant [16].

La première valeur de  $\psi$  dans la direction des  $x$ , est obtenue en intégrant l'équation (2) du système précédent par rapport à  $y$  :

$$\psi_P - \psi_S = \rho_s \cdot u_s \cdot \Delta y \rightarrow \psi_P = \psi_S + \rho_s \cdot u_s \cdot \Delta y$$

et le long de cette direction, l'intégration de l'équation (1) du système précédent s'effectue par rapport à  $x$  :

$$\psi_E - \psi_P = -\rho_e \cdot u_e \cdot \Delta x \rightarrow \psi_E = \psi_P - \rho_e \cdot u_e \cdot \Delta x$$

### REMARQUE

#### \*- densité et viscosité dynamique aux interfaces

Il s'agit d'exprimer les caractéristiques du fluide  $\mu_e$  et  $\rho_e$  en fonction de  $\mu_E$ ,  $\mu_P$  et  $\rho_E$ ,  $\rho_P$ , dans le cas où elles sont variables. D'après la référence [17]

$$\begin{cases} \mu_e = f_e \cdot \mu_E + (1 - f_e) \cdot \mu_P \\ \rho_e = f_e \cdot \rho_E + (1 - f_e) \cdot \rho_P \end{cases}$$

avec :

$$f_e = \frac{\Delta x}{2 \cdot (\delta x_e)}$$

### III.4- DIFFERENTES ETAPES DE L'ALGORITHME-SIMPLER-

1- Choix initial des vitesses :  $u^*$  ;  $v^*$ .

2- Calcul des coefficients des équations du mouvement et obtention des pseudo-

vitesses :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb}^*}{a_e}, \hat{u}_w = \frac{\sum a_{nb} u_{nb}^*}{a_w}, \hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb}^*}{a_n} \quad \text{et} \quad \hat{v}_s = \frac{\sum a_{nb} v_{nb}^*}{a_s}$$

3- Calcul des coefficients des équations de pression et résolution de l'équation (III.47) pour obtenir  $p$ .

4- Utilisation de cette pression comme choix initial  $p^*$  et résolution des équations du mouvement pour obtenir les vitesses  $u^*$ ,  $v^*$ .

5- Calcul du terme b, puis résolution de l'équation de correction pour obtenir  $p'$ .

6- Correction des valeurs des vitesses :  $u_i = u_i^* + d_i(p'_p - p'_i)$ .

7-On prend ces valeurs comme nouveau choix initial et on retourne à l'étape 2 et on reprend le processus jusqu'à la convergence.

### Test d'arrêt

Afin d'arrêter le calcul avec une précision donnée  $\epsilon$  sur des vitesses, on a défini dans le programme une erreur  $\Delta Q$  sous forme :

$$\Delta Q = \frac{1}{2} (|\Delta u| + |\Delta v|)$$

avec :

$$\Delta u = \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(S1)} (u^k(i,j) - u^{k+1}(i,j))$$

$$\Delta v = \sum_{(i,j)}^{(S1)} (v^k(i,j) - v^{k+1}(i,j))$$

$k$  : représente l'ordre d'une itération.

$k+1$  : représente l'ordre de l'itération suivante.

Lorsque  $\Delta Q$  devient inférieure ou égale à  $\epsilon$ , le calcul s'arrête.

Pour réduire les risques de divergence [17], on utilise souvent la sous-relaxation qui s'exprime par :

$$\begin{cases} u = u^* + \alpha \cdot u' \\ v = v^* + \alpha v' \\ p = p^* + \alpha_p \cdot p' \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

Généralement on prend d'après [17] :  $\alpha = 0,5$  et  $\alpha_p = 0,8$ .

### III.5- CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions à l'infini amont de l'écoulement sont supposées stationnaires, uniformes,  $V=V(U_e, 0)$  et la pression atmosphérique ( $P=P_{atm}$ ).

- Canal sans partie amont :

à l'entrée :

$$u = u_e, v = 0 \text{ (dans le cas du repos de la roue)}$$

$$u = u_e, v = R \cdot \omega \text{ pour tout le canal (quand la roue est en rotation N)}$$

$$\text{et } p = p_{at}$$

à la sortie :

$$u = u_{(\text{interface précédent})}, v = v_{(\text{interface précédent})} \text{ (écoulement axial)}$$

- Canal avec partie amont :

1/ partie amont :

à l'entrée :

$$u = u_e, v = 0 \text{ et } p = p_{at}$$

2/partie rotor :

à l'entrée :

$$u = u_{(\text{sotie amont})}, v = v_{(\text{sotie amont})} \text{ (dans le cas du repos de la roue)}$$

$$u = u_{(\text{sotie amont})}, v = R \cdot \omega \text{ pour tout le canal (quand la roue est en rotation N)}$$

$$p = p_{(\text{sotie amont})}$$

à la sortie :

$$u = u_{(\text{interface précédent})}, v = v_{(\text{interface précédent})} \text{ (écoulement axial)}$$

- Sur les surfaces d'aubages (intrados et extrados), les vitesses sont nulles,  $V=V(0,0)$ .
- La viscosité dynamique du fluide est constante ( $\mu=\mu_{(eau)}$ ).
- Pas d'écoulement à travers les aubes, donc d'après [17], ( $\mu \gg \mu_{(eau)}$ ). Dans notre cas, nous avons pris :  $\mu = 10^{30} \text{ Kg/m.s.}$

## INTRODUCTION

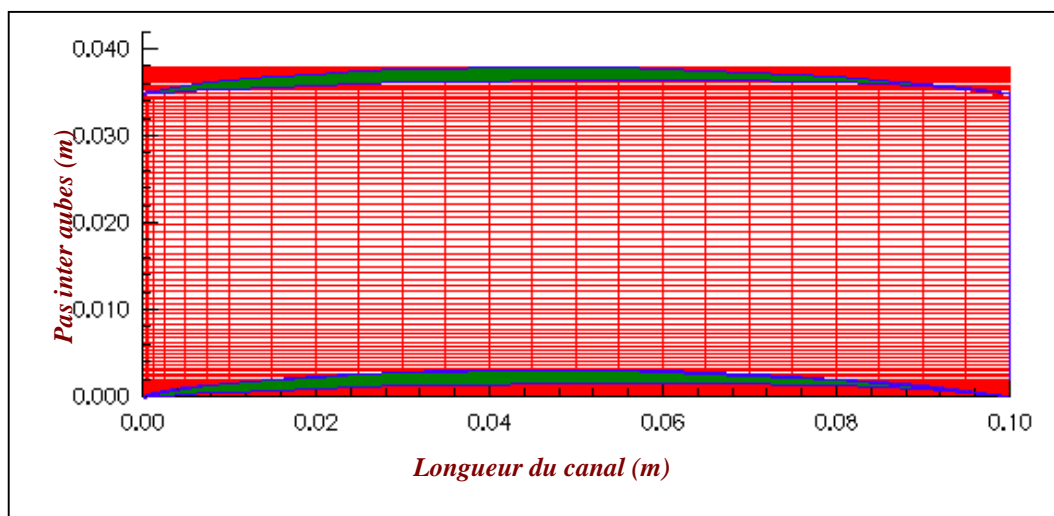
Nous allons maintenant appliquer la modélisation de WU[5,9,16,23] à l'écoulement visqueux entre les aubes d'une roue de pompe axiale en fluide incompressible. La forme géométrique de ces aubes est donnée par le logiciel « *POMPAX* » dans la phase du dimensionnement en résolvant le *problème inverse*. Nous avons ainsi pris comme exemple de calcul une pompe axiale de référence [25] ayant les caractéristiques définies dans l'Annexe-B.

Pour cela, notre travail a été consacré à l'adaptation du code de calcul *PATH* [Annexe-B] (écrit en langage FORTRAN) à notre cas en modifiant certaines procédures en fonction de nos besoins pour le calcul des champs de vitesse et de pression dans le plan (S1). Ce dernier étant discrétisé selon la méthode des volumes finis.

L'écoulement du fluide visqueux et incompressible (Ch.II.§.II.3.1.2) arrive à l'amont de la roue avec une vitesse débitante uniforme. Nous avons étudié l'écoulement aube-à-aube pour les cas où la roue est en rotation ou au repos, calée par rapport à la vitesse d'entrée ou non et pour deux cas de maillages (rectangulaire droit et incliné).

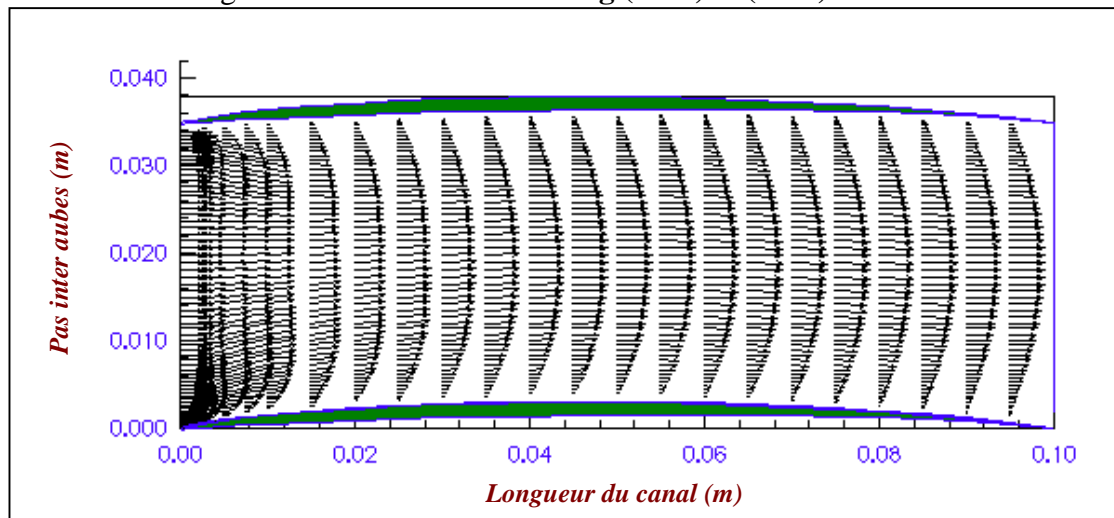
### IV.1- ECOULEMENT DANS UN CANAL NON CALÉ

Afin de mieux présenter le canal (S1) délimité par les profils de l'extrados de l'aube inférieure et l'intrados de l'aube supérieure et dans le but de valider notre programme, nous avons pris une échelle de 1/5 pour le pas inter-aubages du canal, **Fig.(IV-1)**. En effet, si nous prenons l'échelle réelle, les aubes seront presque plates car leurs épaisseurs sont négligeables devant le pas et, dans ce cas, nous n'allons constater aucune déviation.

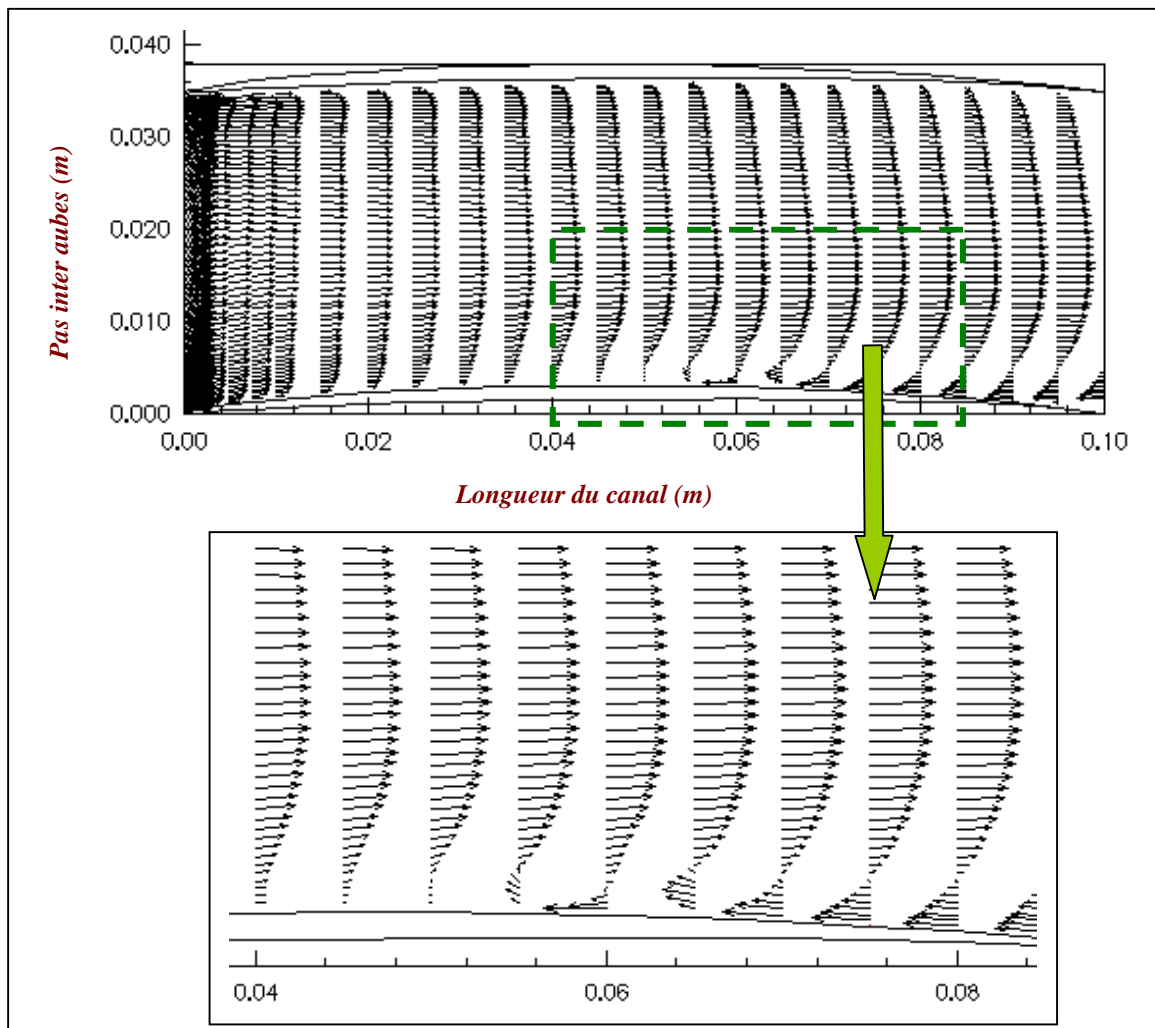


**Fig.(IV-1) : Maillage rectangulaire droit,  $R=0.1110$  m.**

L'étude cinématique de l'écoulement au rayon moyen est représentée par le champ de vitesses et les lignes de courant ci-dessous Fig.(IV-2) et (IV-3) :



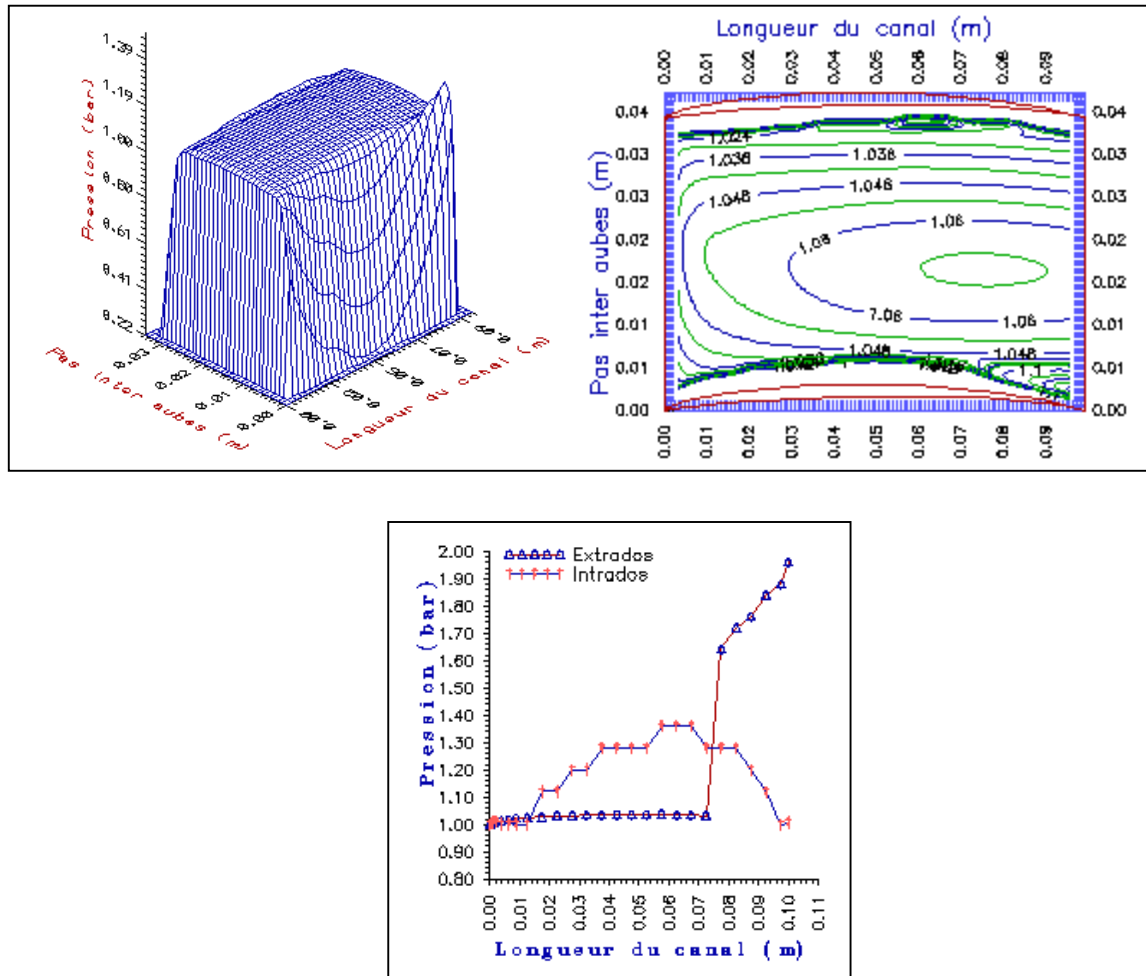
a-  $N=0.0$  tr/mn.



b-  $N=1450$  tr/mn.

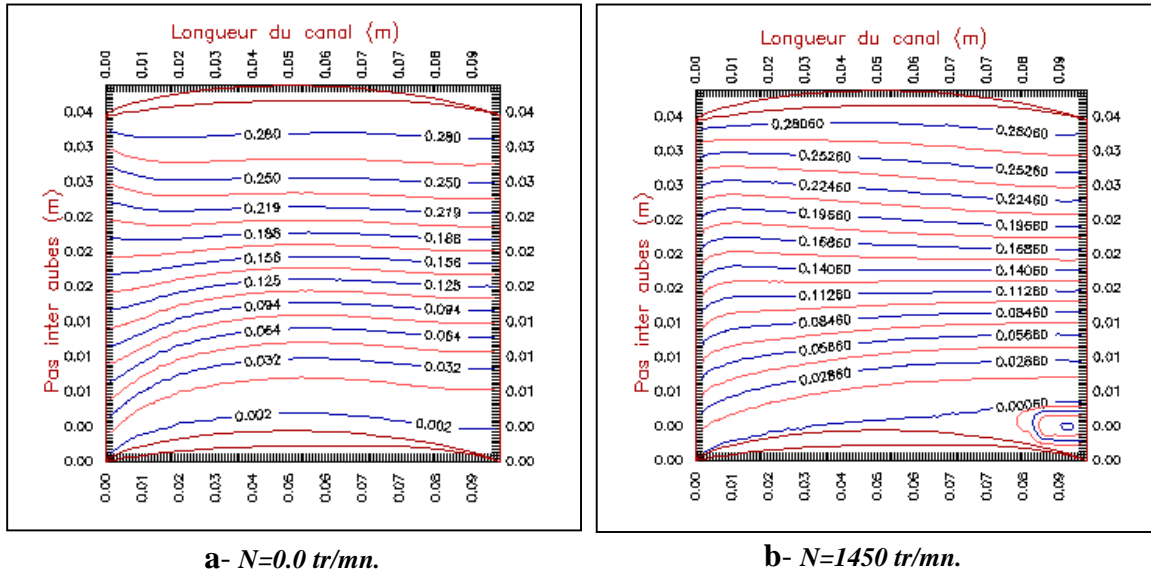
Fig.(IV-2-1) : Champ de vitesses dans le canal :

$R=0.1110$  m,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s.



**Fig.(IV-2-2) : Distribution de pressions dans le canal :**  
 $R=0.1110\text{ m}$ ,  $\mu=0.0089\text{ Kg/m.s}$ ,  $u_e=8.548\text{ m/s}$ ,  $N=1450\text{ tr/mn}$ .

Nous constatons sur les figures ci-dessus que, au fur et à mesure que le fluide avance dans le canal inter-aubes, le profil de vitesse s'établit progressivement dans le cas de repos. Dans le cas de la rotation, l'énergie cinétique du fluide augmente et provoque un renversement de l'écoulement au niveau de l'extrados due au gradient de pression défavorable **Fig.(IV-2-2)**. Ceci entraîne, d'après les lignes de courant, une recirculation du fluide dont l'ampleur dépend de la vitesse débitante ainsi que celle de rotation du rotor (§IV.2.1).

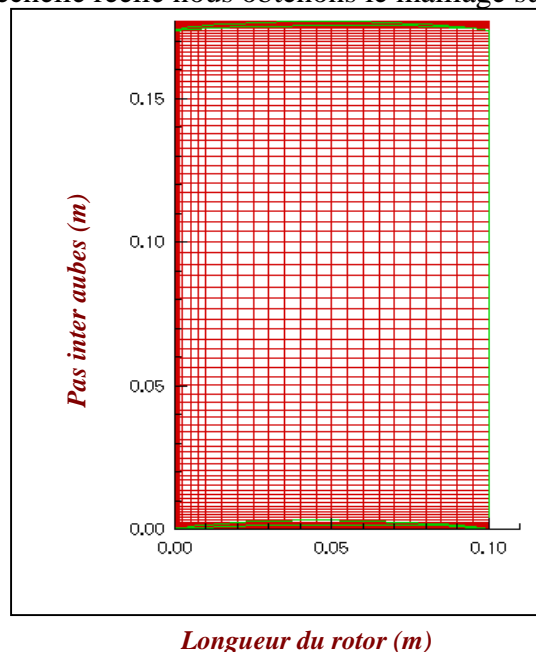


**Fig.(IV-3) : Distribution des lignes de courant dans le canal :**  
 $R=0.1110$  m,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s.

D'autre part, la distribution de pression nous montre que la pression au niveau de l'intrados est supérieure à celle de l'extrados à cause du contournement des particules de fluide du à la forme cambré du profil de l'aube (ce qui crée la portance). Quand le gradient de pression devient défavorable (à une distance d'environ 0.07 m à partir de l'entrée du canal), la pression sur l'extrados devient plus grande que celle de l'intrados à cause du ralentissement important du fluide.

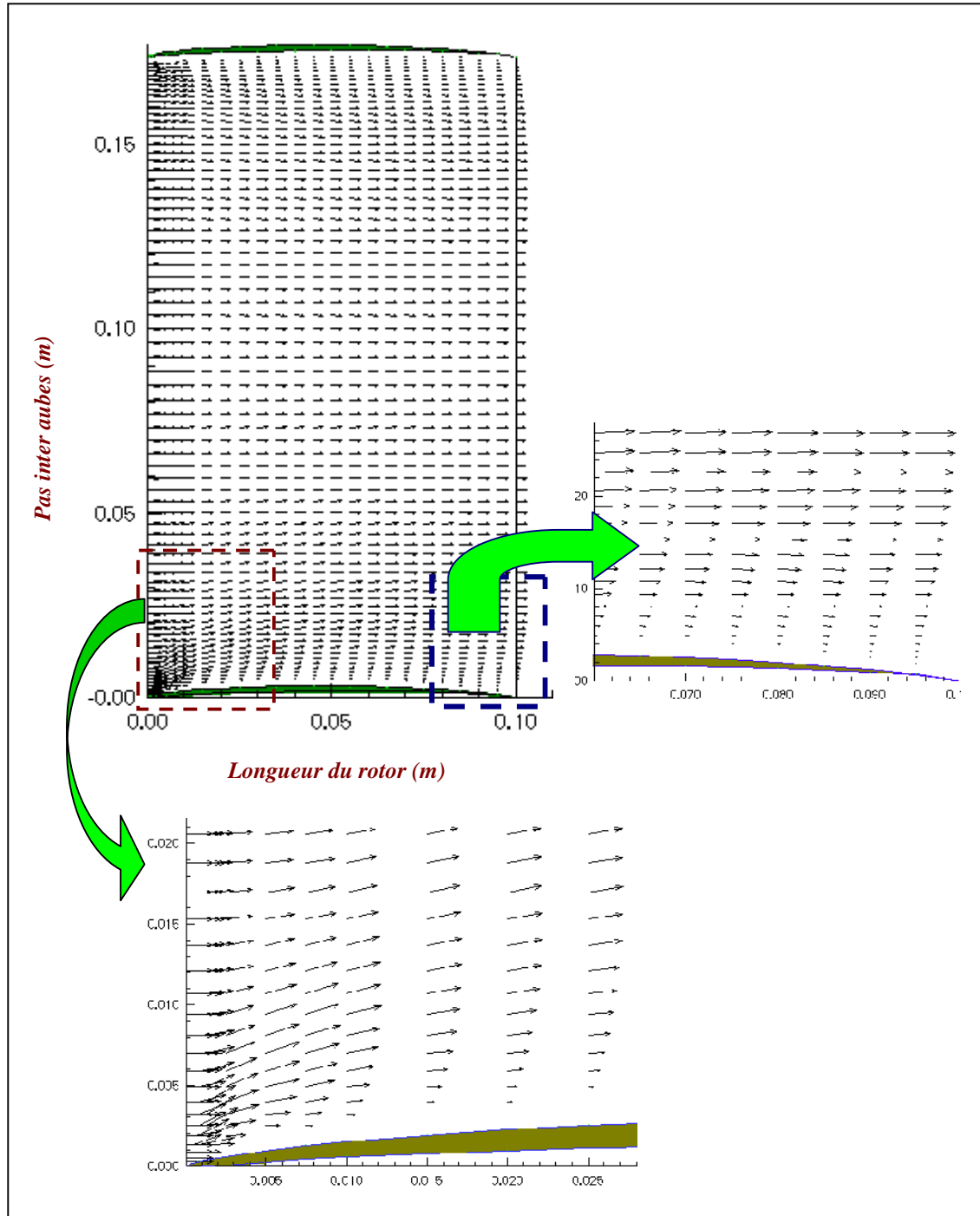
**IV.1.1- Ecoulement dans le rotor**

Avec une échelle réelle nous obtenons le maillage suivant :



**Fig.(IV-4) : Maillage pour une échelle réelle des aubes,  $R=0.1110$  m.**  
 44

L'étude cinématique de l'écoulement est représentée par le champ de vitesses et les lignes de courant ci-dessous, **Fig.(IV-5)** et **Fig.(IV-6)** :



$N=0.0 \text{ tr/mn.}$

**Fig.(IV-5) : Champ de vitesses dans le rotor :**

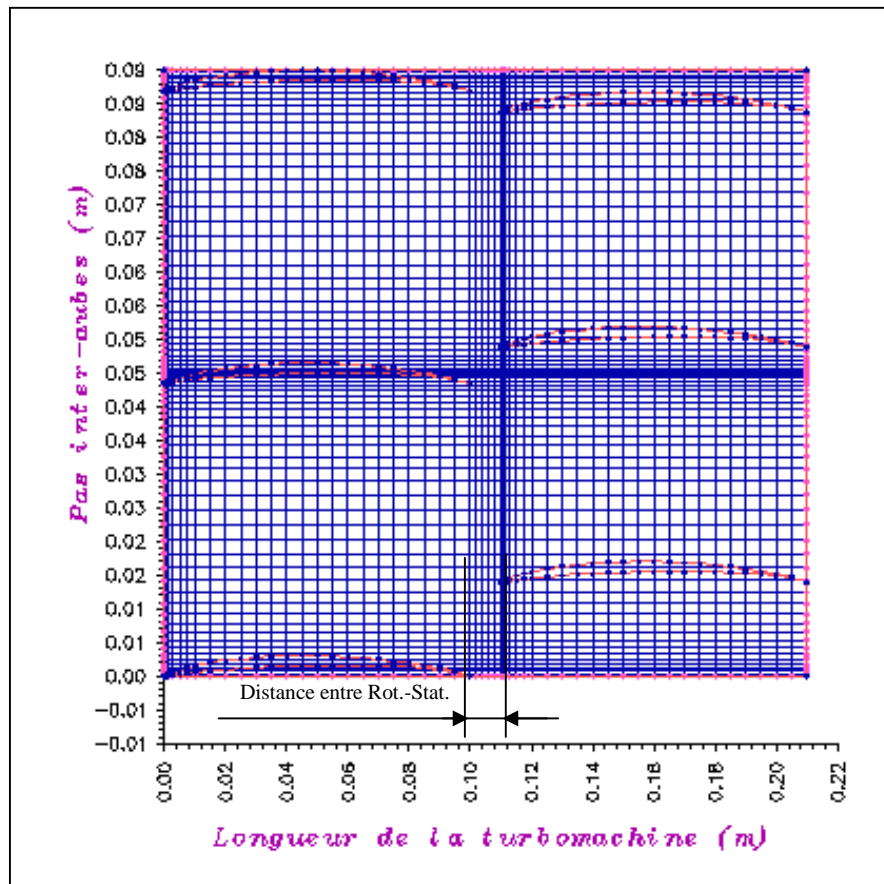
$R=0.1110 \text{ m, } \mu=0.0089 \text{ Kg/m.s, } u_e=8.548 \text{ m/s.}$





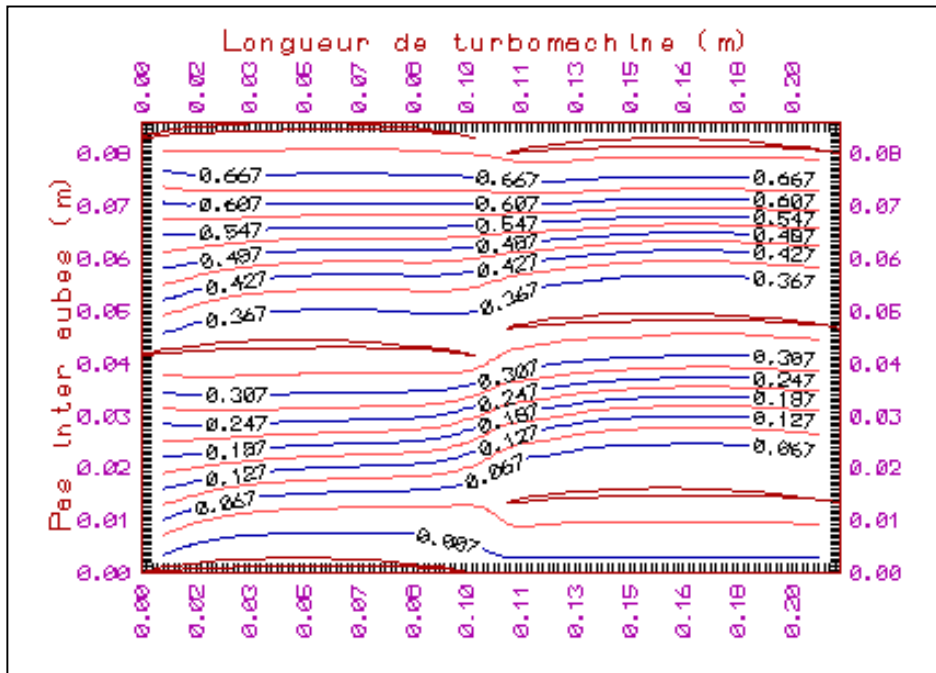


a/ Pour une distance de 5% de la corde du rotor, on a les résultats suivants :

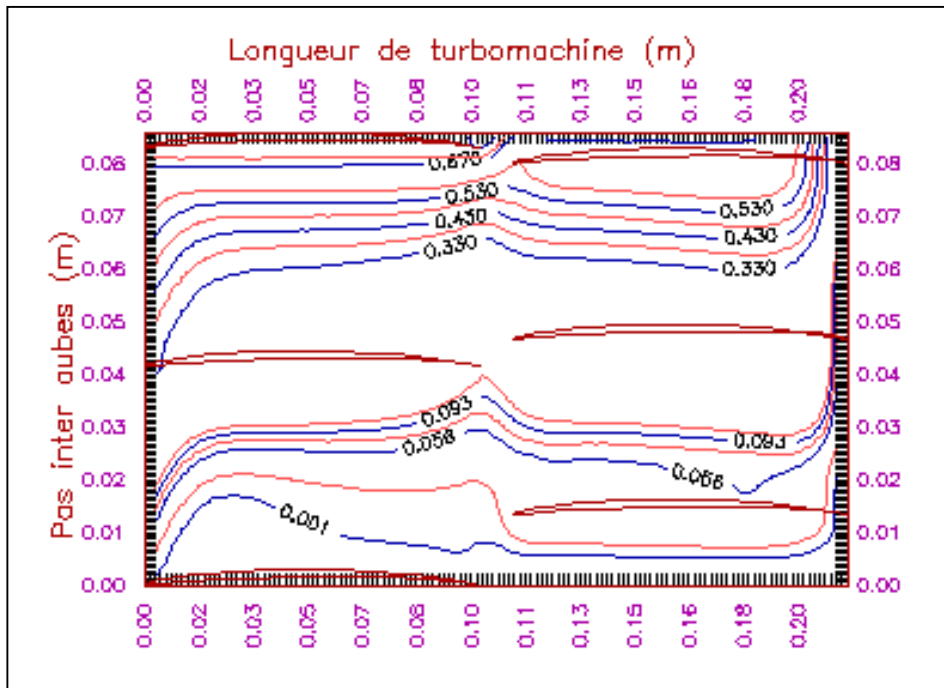


**Fig.(IV-8) : Maillage pour une distance de 5%,  $R=0.1110$  m.**

Nous présentons ci-dessous les lignes de courant ainsi que les isobars (ou champs de pressions) au rayon moyen de la pompe, **Fig.(IV-9 à IV-17)**.



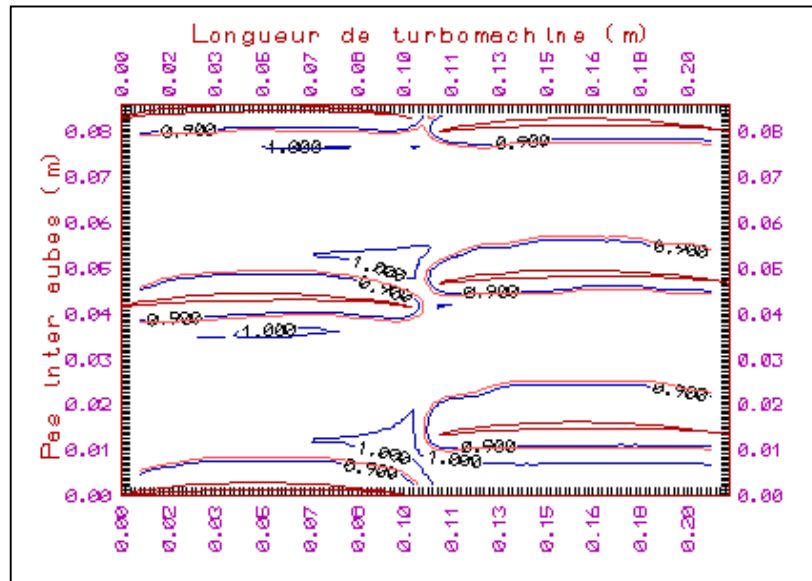
a-  $N=0.0$  tr/mn.



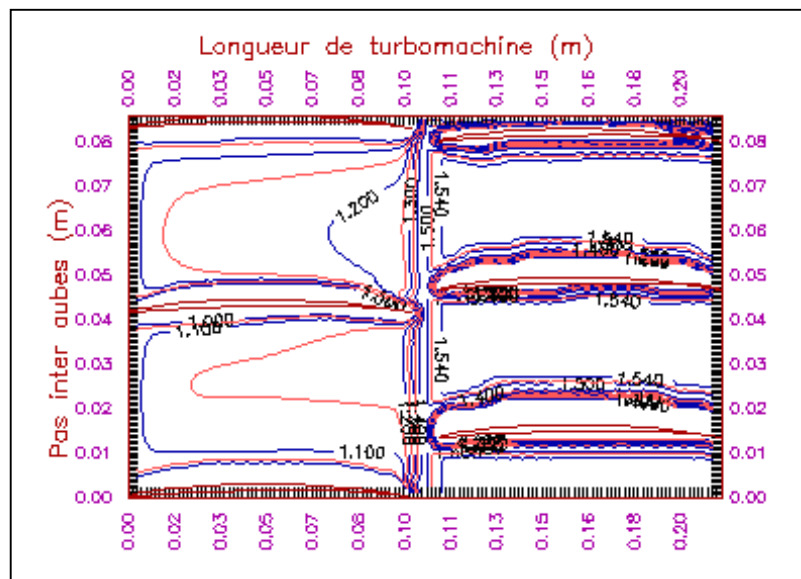
b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-9) : Distribution des lignes de courant dans la pompe :

$R=0.1110$  m,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s.



a-  $N=0.0$  tr/mn.



b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-10) : Distribution des isobars (en bar) dans la pompe :

$R=0.1110$  m,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s.

b/ pour une distance de 20% de la corde du rotor, la discrétisation du domaine devient :

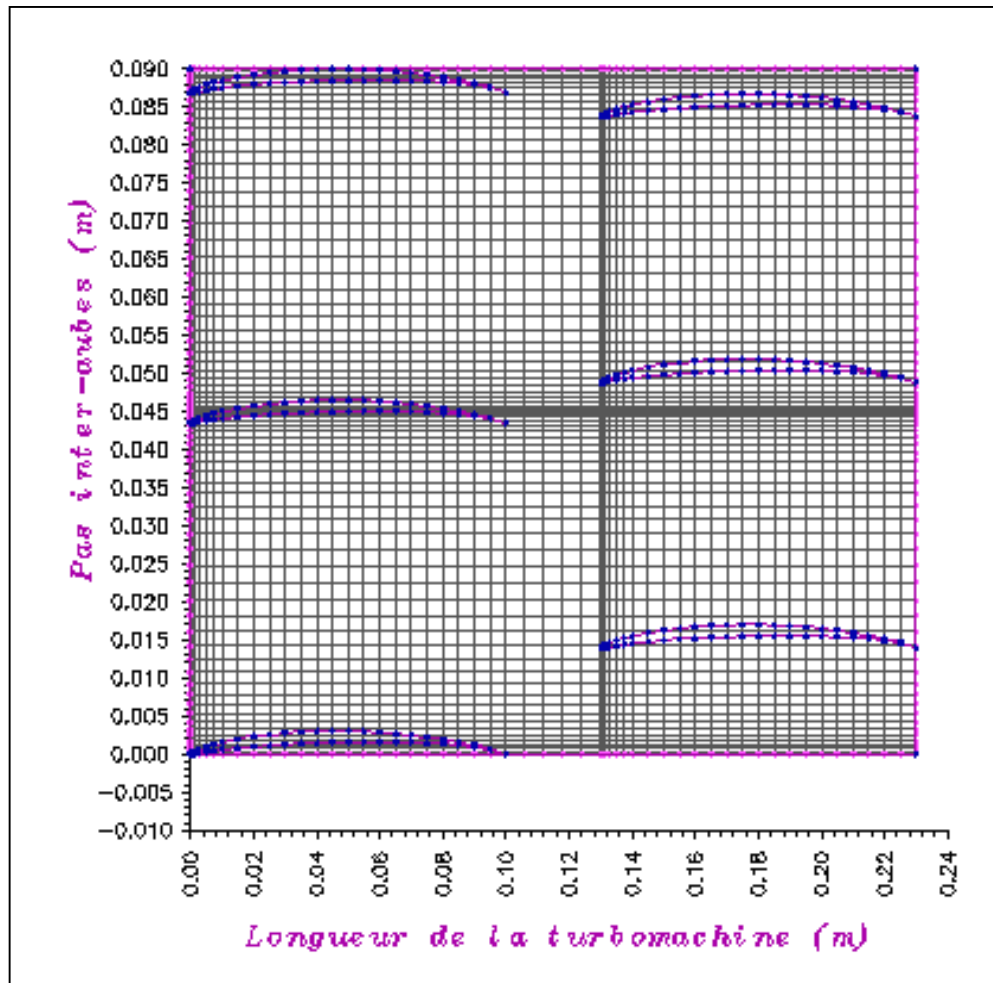
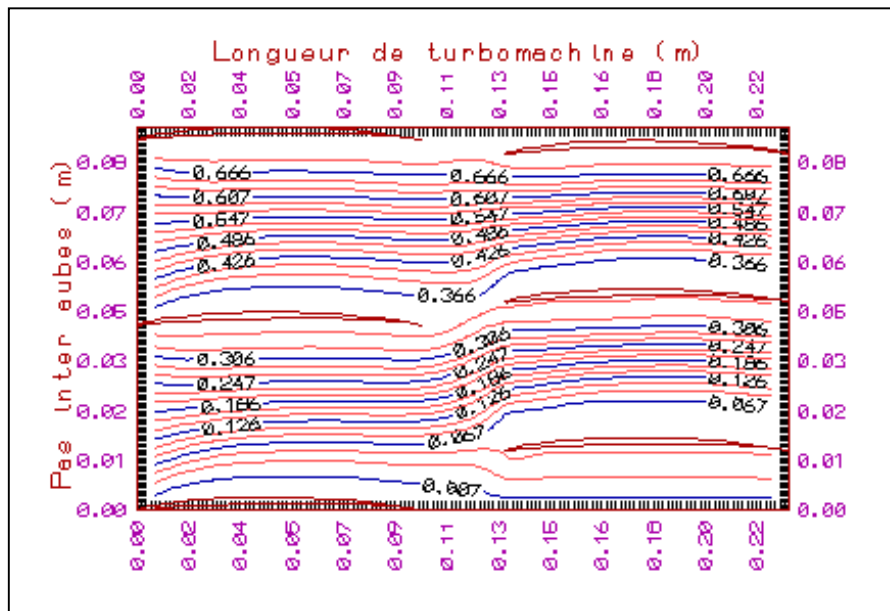
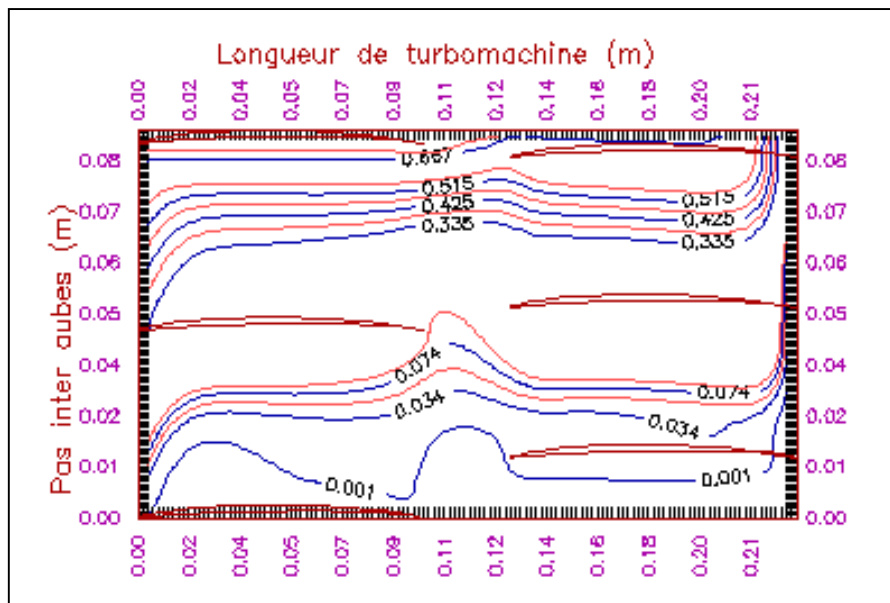


Fig.(IV-11) : Maillage pour une distance de 20%,  $R=0.1110$  m.



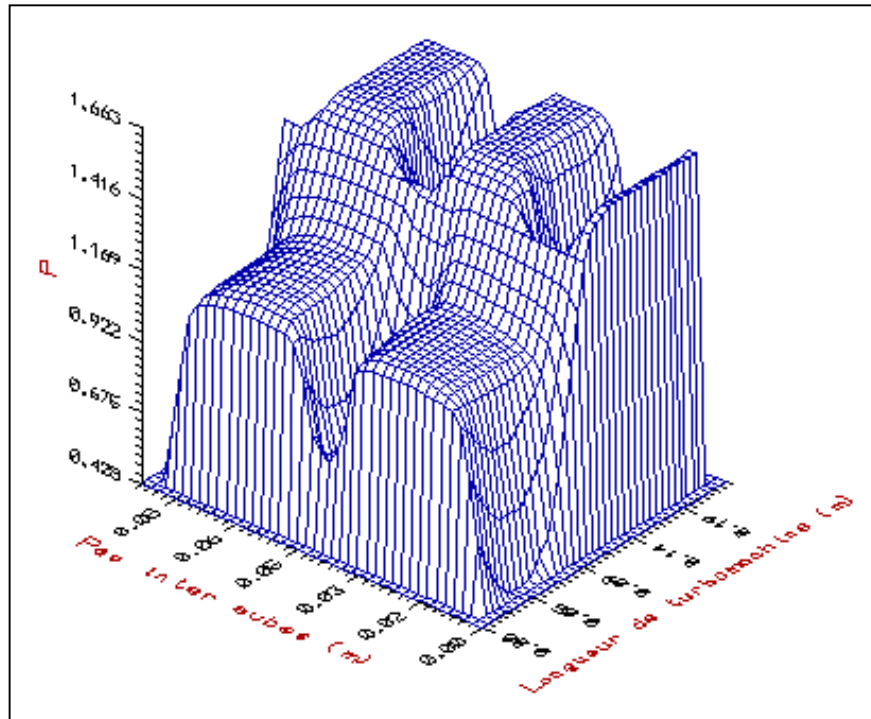
a-  $N=0.0$  tr/mn.



b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-12) : Distribution des lignes de courant dans la pompe :

$R=0.1110$  m,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s.



**Fig.(IV-13) :** *Champ de pression (en bar) dans la pompe :*  
 $R=0.1110\text{ m}$ ,  $\mu=0.0089\text{ Kg/m.s}$ ,  $u_e=8.548\text{ m/s}$ ,  $N=1450\text{ tr/mn}$ .



c/ pour une distance de 60% de la corde du rotor, la discrétisation du domaine devient :

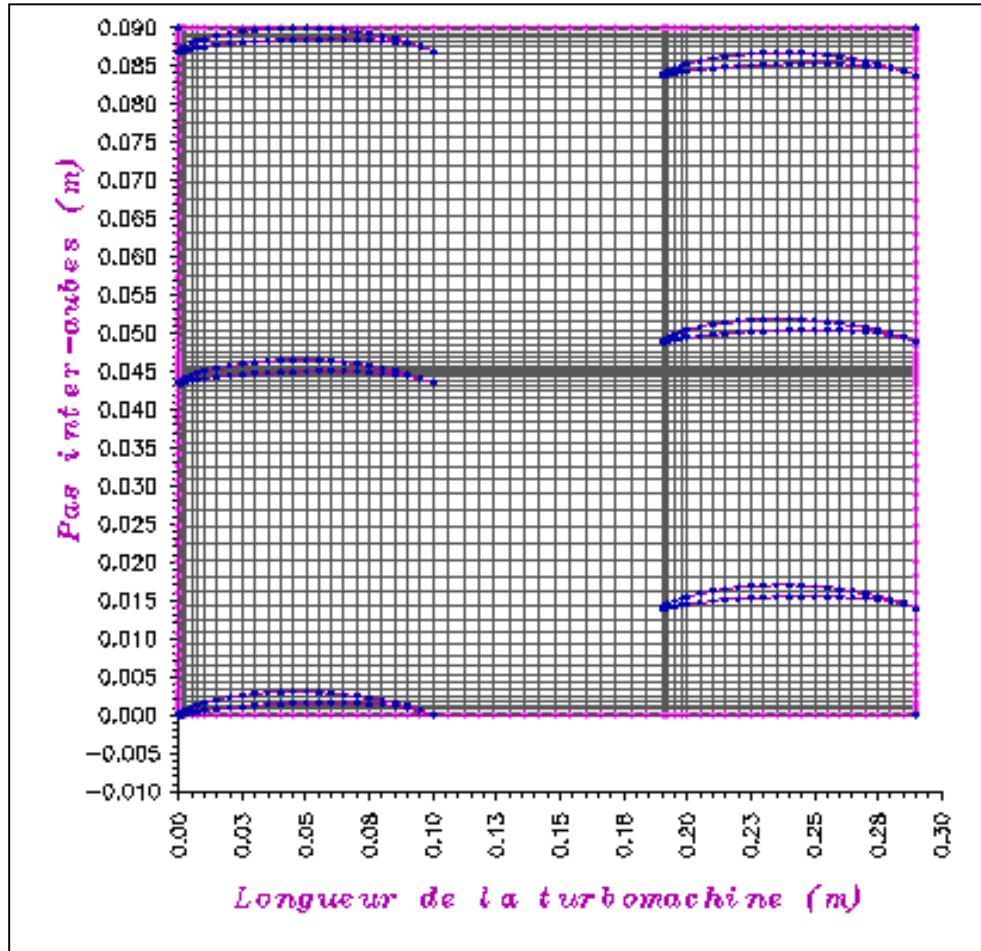
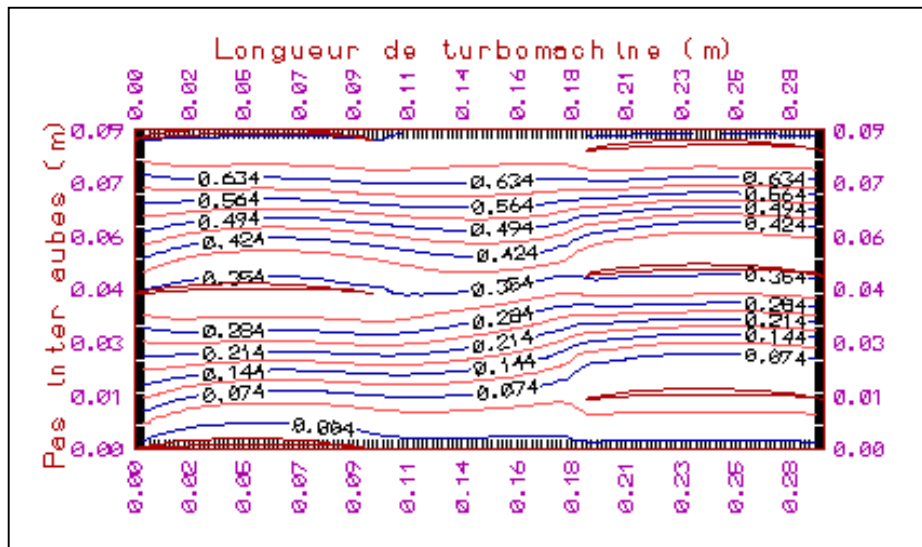
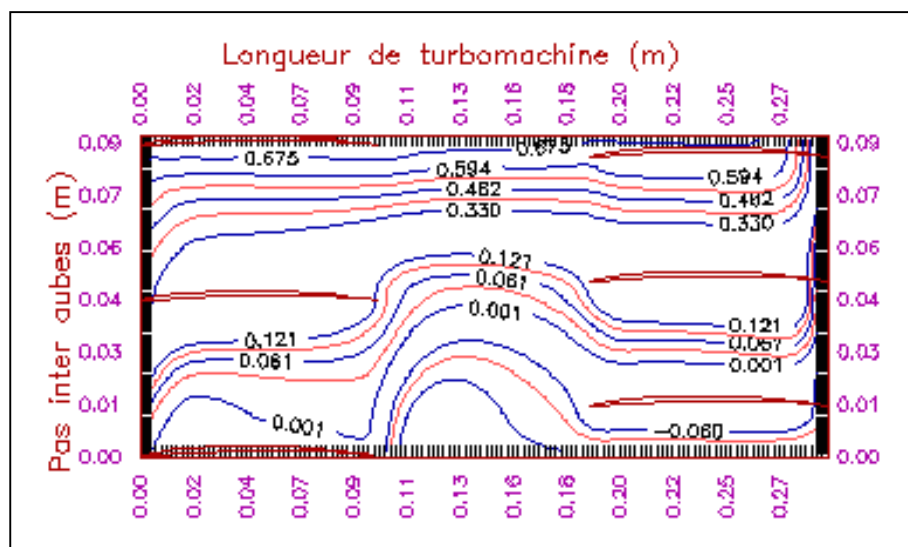


Fig.(IV-14) : Maillage pour une distance de 60%,  $R=0.1110$  m.



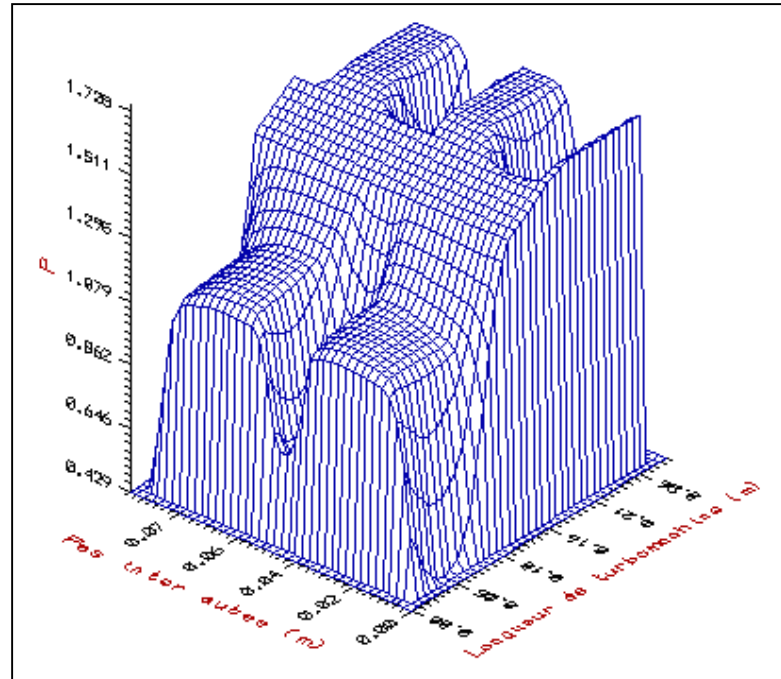
a-  $N=0.0$  tr/mn.



b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-15) : Distribution des lignes de courant dans la pompe :

$R=0.1110$  m,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s.



**Fig.(IV-16) : Champ de pression (en bar) dans la pompe :**

$R=0.1110 \text{ m}$ ,  $\mu=0.0089 \text{ Kg/m.s}$ ,  $u_c=8.548 \text{ m/s}$ ,  $N=1450 \text{ tr/mn}$ .

On remarque, au niveau des lignes de courant, une distribution uniforme dans le cas où le rotor serait au repos et l'augmentation de la distance entre le rotor et le stator n'est pas favorable à cause des frottements. Si ce dernier est en mouvement, on constate une augmentation du débit dû à l'aspiration de la pompe. L'effet de la rotation provoque aussi un déplacement des particules de fluide dans le sens de la rotation à la sortie du rotor. Avec l'augmentation de la distance entre le rotor et le stator, ces particules tendent à traverser ce passage et si cette distance est trop grande, les particules de fluide vont perdre leur plus grande partie d'énergie cinétique avant d'atteindre le stator. En effet, les lignes isobars et les champs de pression nous montrent bien que la pression est proportionnelle à la distance rotor/stator. Nous constatons aussi que le gradient de pression est plus important à cet endroit que celui dans le canal du rotor car, dans ce dernier, les particules de fluide reçoivent de l'énergie cinétique et la transformation en énergie de pression ne commence qu'à la sortie du rotor.

D'autre part, on constate que la pression reste presque constante dans le cas où la roue serait au repos et qu'elle augmente jusqu'à 1.57 bar (environs) à la sortie du stator quand la roue est en rotation.

## IV.2- ECOULEMENT DANS UN CANAL REEL

Dans le but de diriger axialement l'écoulement et de pouvoir appliquer les conditions aux limites, nous avons maillé une partie du canal avant l'entrée du rotor. Ce dernier étant calé avec un angle de calage (Annexe-B) indiqué sur chaque figure.

Le maillage du domaine de calcul est représenté comme suit :

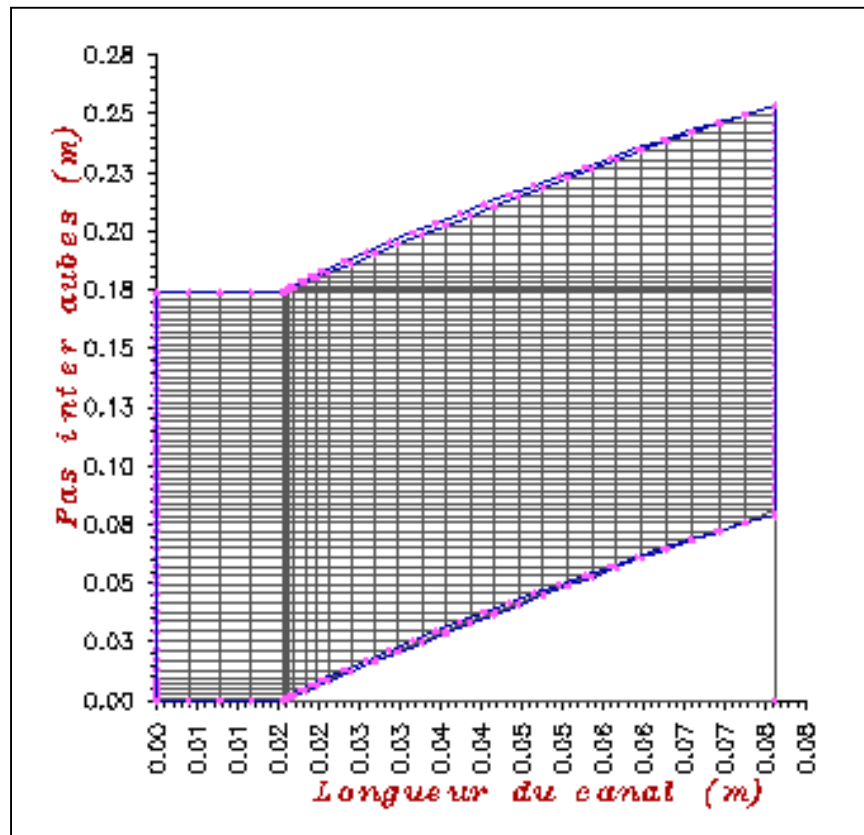


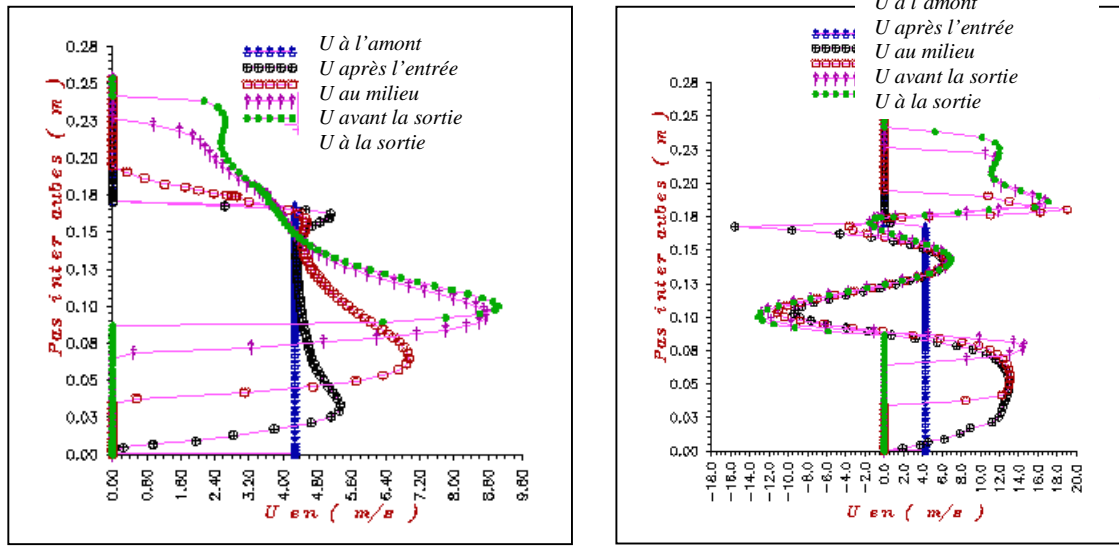
Fig.(IV-17) : Maillage rectangulaire droit,  $R=0.1110\text{ m}$ ,  $\gamma=52.67^\circ$ .

Nous avons commencé cette partie avec l'étude de l'influence de la vitesse d'entrée (vitesse débitante) sur les caractéristiques de l'écoulement entre les aubes.

### IV.2.1- Influence de la vitesse débitante

Nous avons pris des vitesses débitantes uniformes à l'amont du canal dont les valeurs sont  $u_1=u_e/2$ ,  $u_2=u_e$  et  $u_3=2u_e$  ( $u_e$  étant la vitesse débitante de la pompe de référence). Ceci nous a donné les profils des vitesses axiales dans les différentes zones indiquées sur les Fig.(IV-18 et IV-24). Nous présentons aussi les lignes de courant Fig.(IV-19, IV-22 et IV-25) et les lignes isobars Fig.(IV-20, IV-23 et IV-26) (ou champ de pression Fig.(IV-21)) au rayon moyen du rotor.

□ Avec une vitesse débitante uniforme :  $u_1 = u_0/2$ .

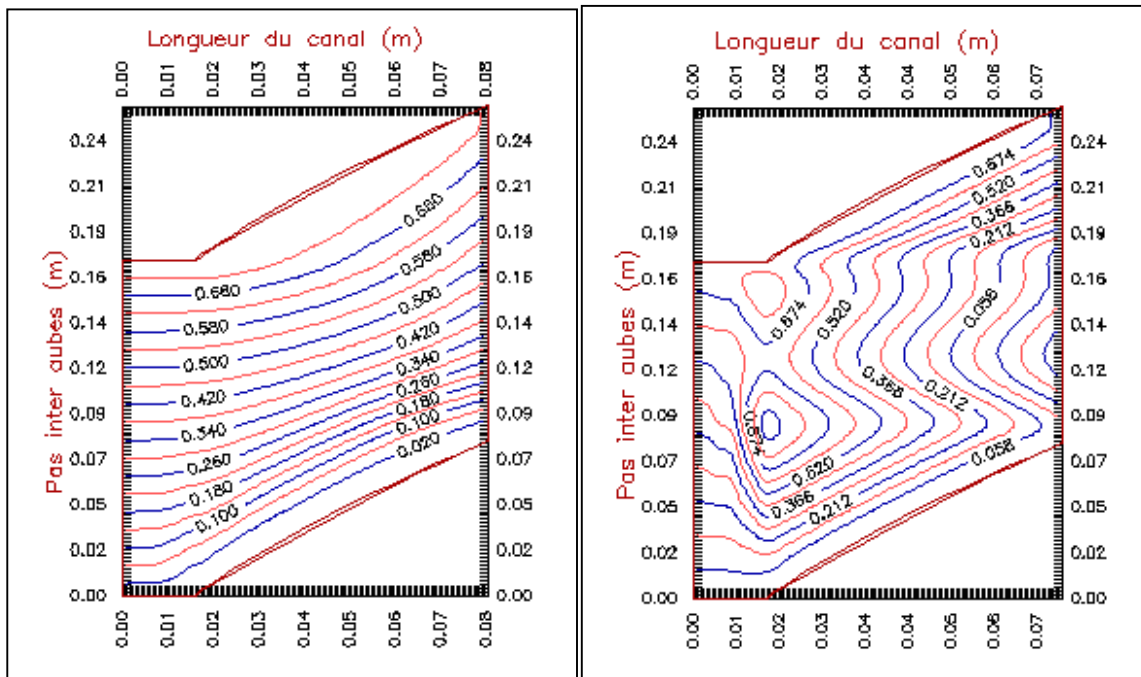


a-  $N=0.0$  tr/mn.

b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-18) : Profils de la vitesse axiale (en m/s) :

$R=0.1110$  m,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_1=4.274$  m/s.



a-  $N=0.0$  tr/mn.

b-  $N=1450$ tr/mn.

Fig.(IV-19) : Distribution des lignes de courant :

$R=0.1110$  m,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_1=4.274$  m/s.

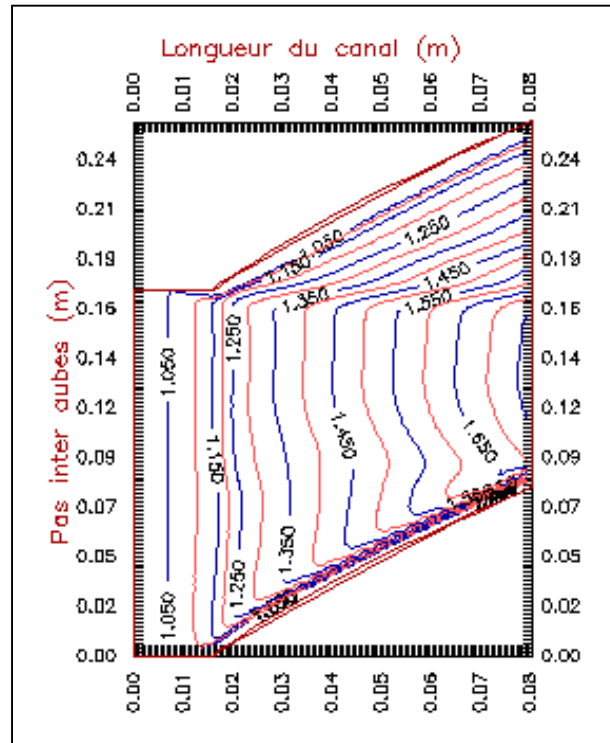


Fig.(IV-20) : Distribution des isobars (en bar) :

$R=0.1110\text{ m}$ ,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089\text{ Kg/m.s}$ ,  $u_1=4.274\text{ m/s}$ ,  $N=1450\text{ tr/mn}$ .

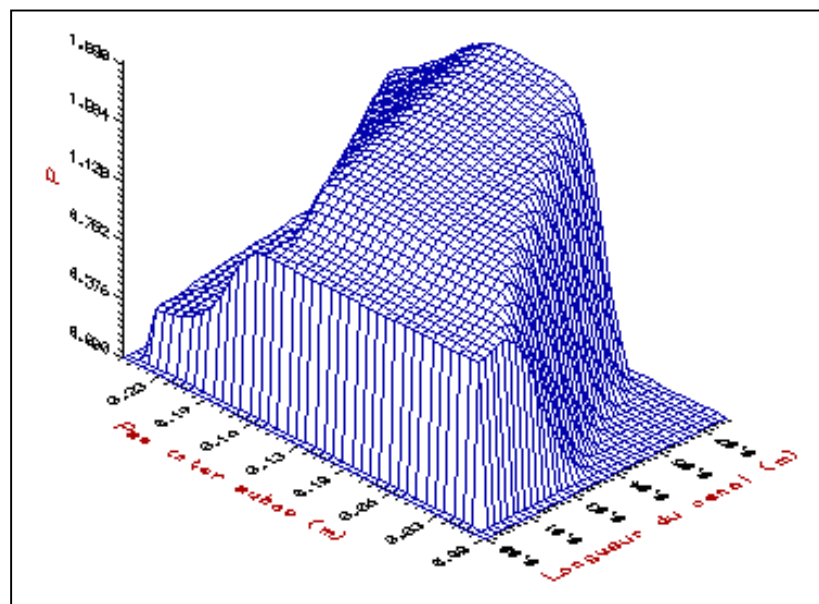
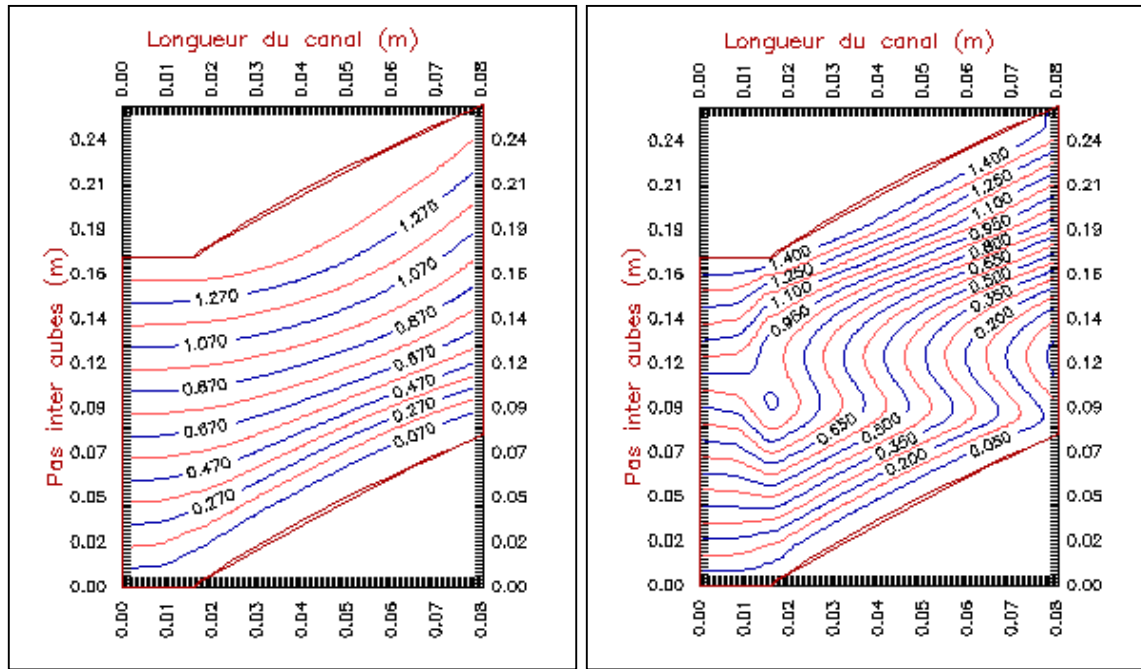


Fig.(IV-21) : Champ de pression (en bar) :

$R=0.1110\text{ m}$ ,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089\text{ Kg/m.s}$ ,  $u_1=4.274\text{ m/s}$ ,  $N=1450\text{ tr/mn}$ .

□ Avec une vitesse débitante uniforme :  $u_2 = u_e$ .



a-  $N=0.0$  tr/mn.

b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-22) : Distribution des lignes de courant :

$R=0.1110$  m,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s.

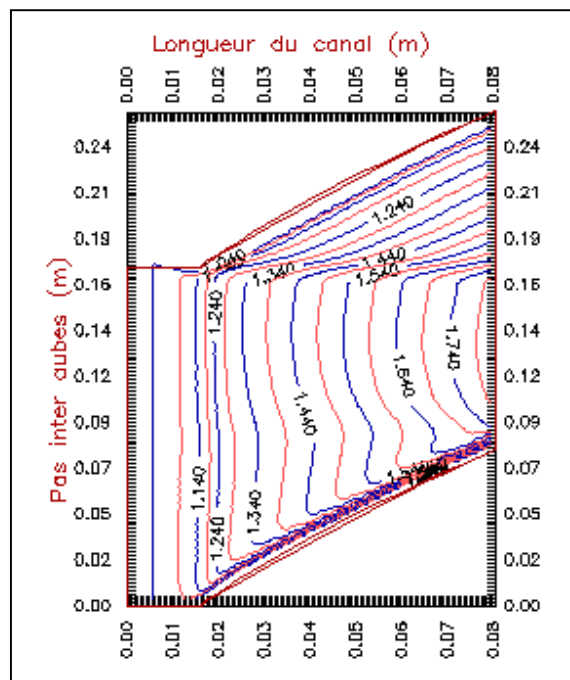
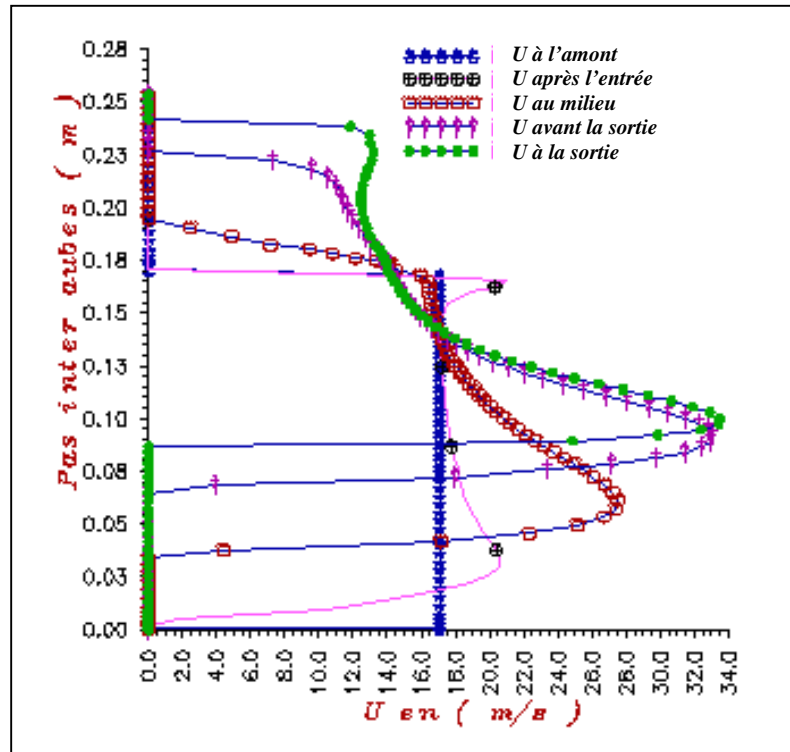


Fig.(IV-23) : Distribution des isobars (en bar) :

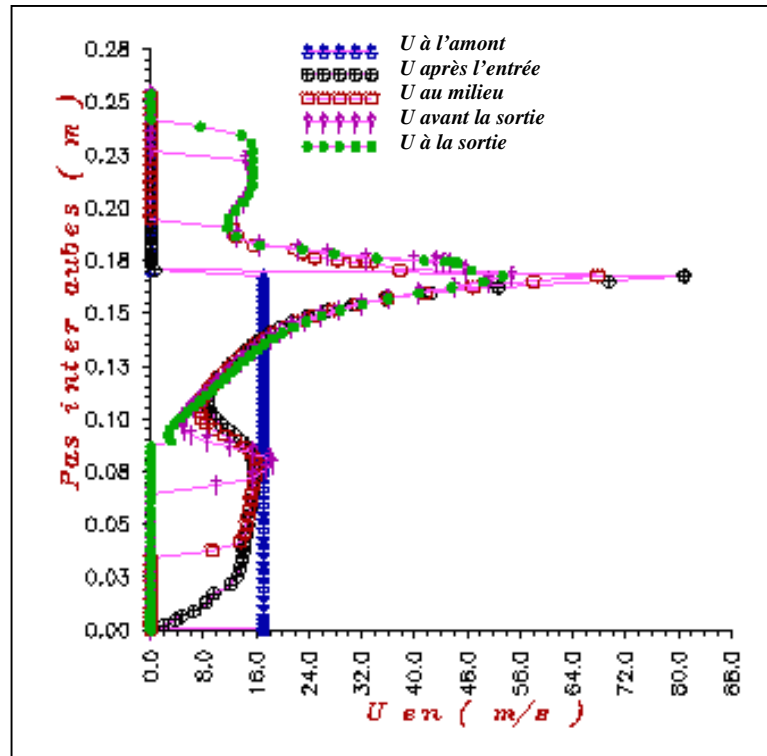
$R=0.1110$  m,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s,  $N=1450$  tr/mn.



- Avec une vitesse débitante uniforme :  $u_3 = 2u_e$ .



a-  $N=0.0$  tr/mn.

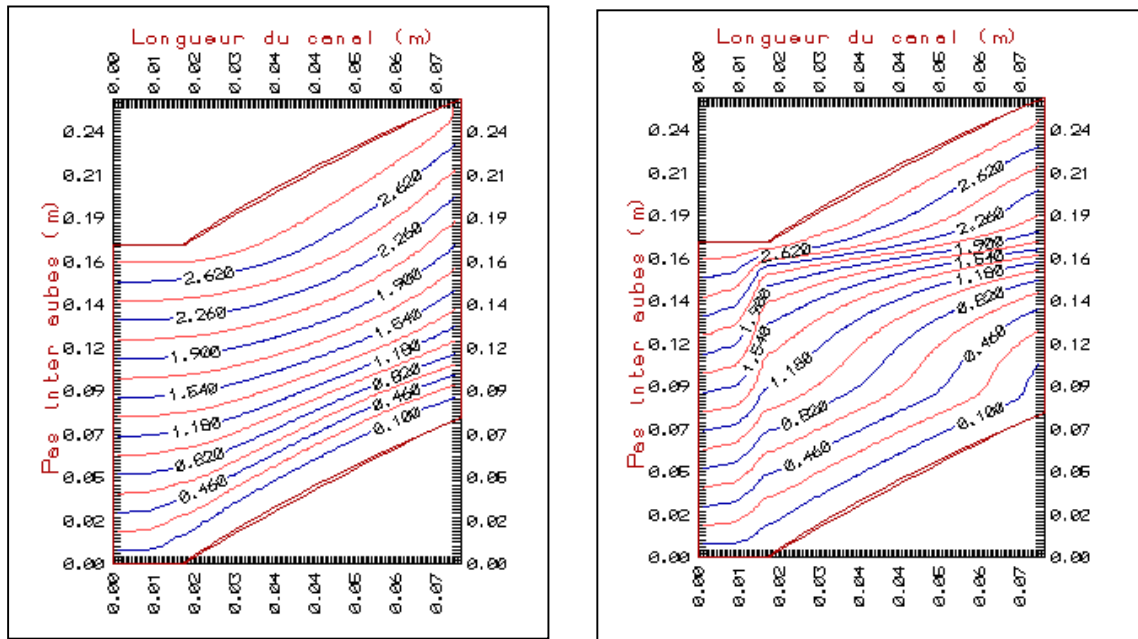


b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-24) : Profils de la vitesse axiale (en m/s) :

$R=0.1110$  m,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_3=17.10$  m/s.





a-  $N=0.0$  tr/mn.

b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-25) : Distribution des lignes de courant :

$R=0.1110$  m,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_3=17.10$  m/s.

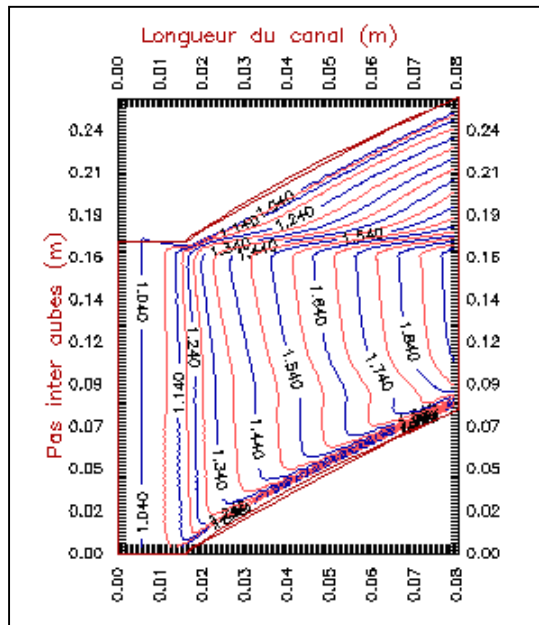


Fig.(IV-26) : Distribution des isobars (en bar) :

$R=0.1110$  m,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_3=17.10$  m/s,  $N=1450$  tr/mn.

Nous constatons en premier lieu que les lignes de courant **Fig.(IV-19, IV-22 et IV-25)** suivent la forme du canal (répartition uniforme) quand la roue est au repos. L'augmentation du débit est évidente puisque il est proportionnel à la vitesse débitante. Dans le cas de la rotation, la recirculation des particules de fluide à l'entrée du rotor est inversement proportionnelle, en nombre et en dimension, à la vitesse débitante. Cette recirculation est due au choc des particules avec l'extrados de l'aube à l'entrée du rotor si leurs vitesses axiales sont faibles par rapport à la vitesse périphérique (environ 17 m/s). D'autre part, nous remarquons bien l'augmentation du débit avec la vitesse débitante car la section du canal de passage est constante.

Les figures **Fig.(IV-18 et IV-24)** nous montrent qu'à l'amont du canal d'entrée, les profils des vitesses axiales sont uniformes et se déforment à l'intérieur du rotor tout en respectant la condition d'adhérence du fluide aux parois (vitesses nulles). On remarque aussi que le maximum de la vitesse est atteint à proximité de l'extrados à cause de la cambrure de l'aube.

Les lignes isobars représentées sur les figures **Fig.(IV-20, IV-23 et IV-26)** nous montrent une répartition presque uniforme de la pression au centre du canal inter-aubages. En effet, dans la pratique, il est souvent recherché une répartition uniforme dans chaque section du canal. Nous n'avons pas pu déterminer les caractéristiques de l'écoulement avec précision au niveau des couches limites car leurs épaisseurs sont négligeables devant le pas entre les aubes. Aussi, les résultats obtenus sont suffisant dans le cadre de notre étude. Nous constatons aussi que la pression augmente avec la vitesse débitante et, au milieu du canal, l'énergie potentielle augmente ce qui correspond à une diminution de l'énergie cinétique **Fig.(IV-18b et IV-20, IV-24b et IV-26)**.

#### IV.2.2- Etude de l'écoulement au niveau du moyeu et de la ceinture

Dans cette étape, nous avons essayé d'étudier les caractéristiques de l'écoulement au niveau du moyeu et de la ceinture à cause des différences de la géométrie et de la vitesse périphérique. En effet, au niveau du moyeu le rayon devient plus petit donc le pas inter aubes diminue et au niveau de la ceinture, le canal est plus proche du carter donc il devient plus large:

- Au niveau du moyeu, nous avons les résultats suivants :

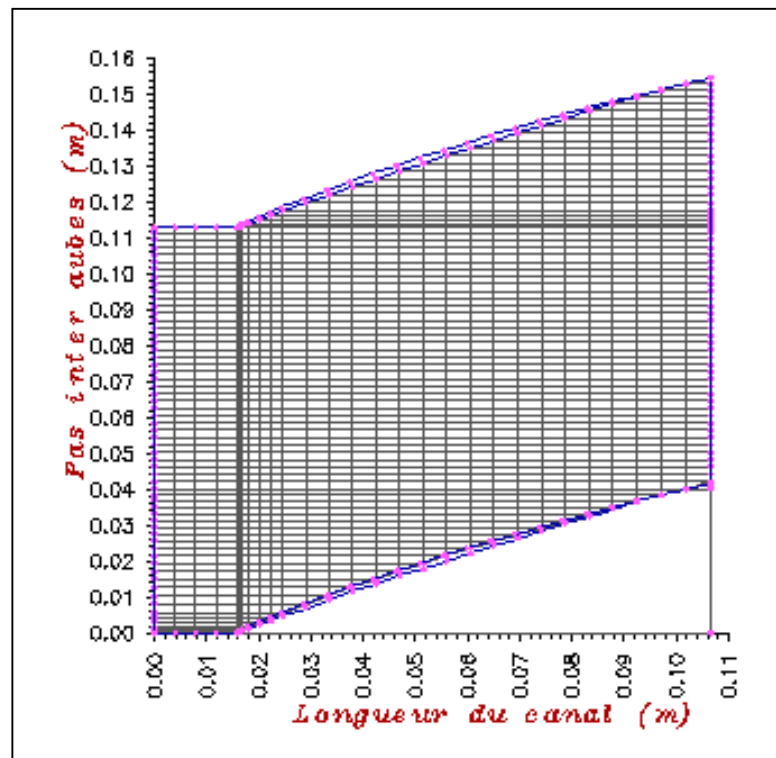
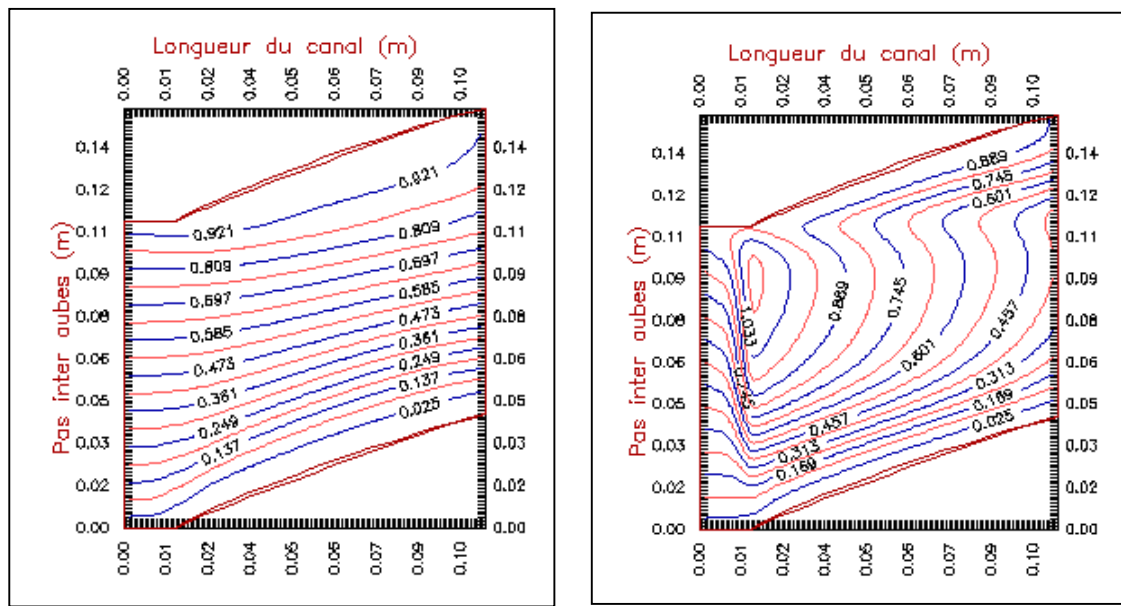


Fig.(IV-27) : Maillage rectangulaire droit au niveau du moyeu :

$$R=0.0727 \text{ m}, \gamma=24.61^\circ.$$



a-  $N=0.0$  tr/mn.

b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-28) : Distribution des lignes de courant :

$R=0.0727$  m,  $\gamma=24.61^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s.

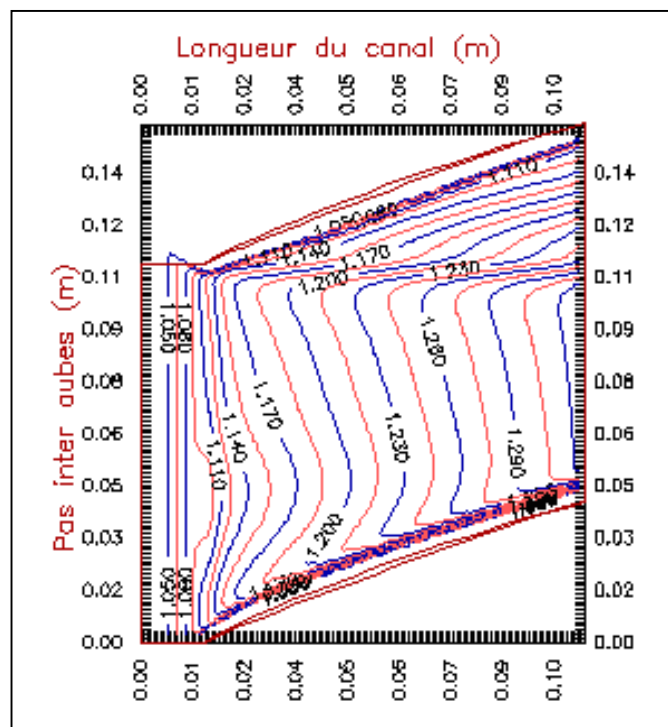
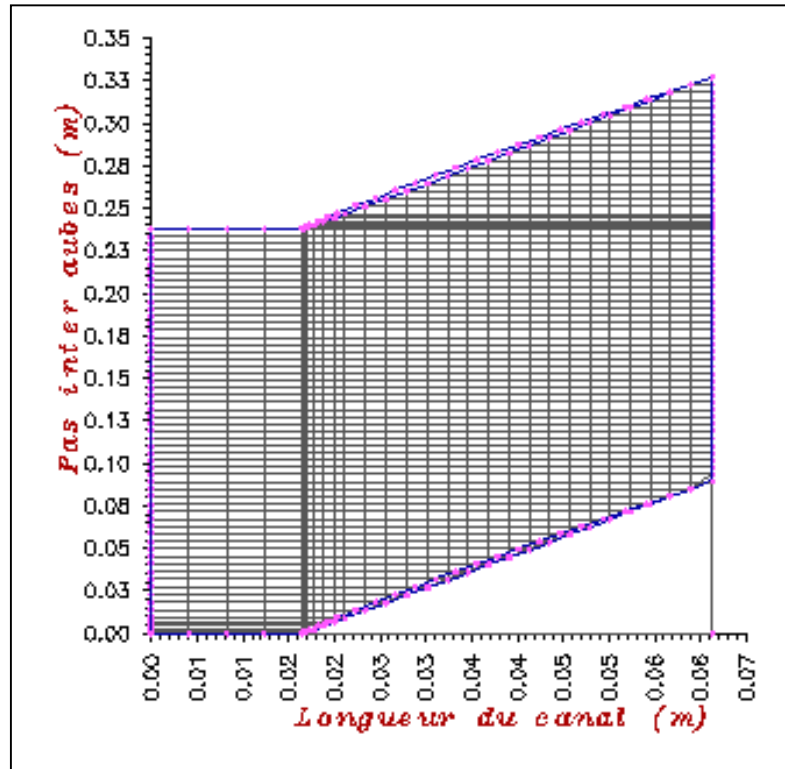


Fig.(IV-29) : Distribution des isobars (en bar) :

$R=0.0727$  m,  $\gamma=24.61^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s,  $N=1450$  tr/mn.

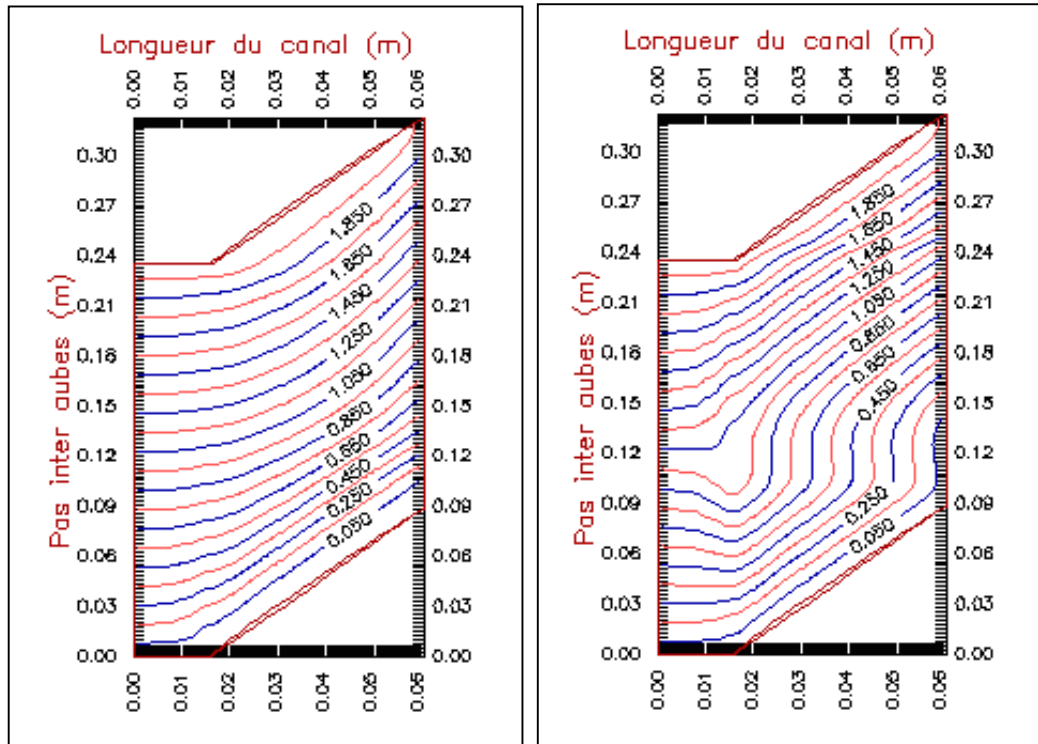
- Au niveau de la ceinture, nous avons les résultats suivants :



**Fig.(IV-30) : Maillage rectangulaire droit au niveau de la ceinture :**

$$R=0.1517 \text{ m}, \gamma=63.33^\circ.$$

Les figures **Fig.(IV-27 et IV-30)** nous montrent bien la différence géométrique des deux domaines d'étude (longueur, calage, pas et épaisseur des aubes). Les vues tridimensionnelles de la pompe de référence sur laquelle nous avons travaillé sont représentées en Annexe-B.



a-  $N=0.0$  tr/mn.

b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-31) : Distribution des lignes de courant :

$R=0.1517$  m,  $\gamma=63.33^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s.

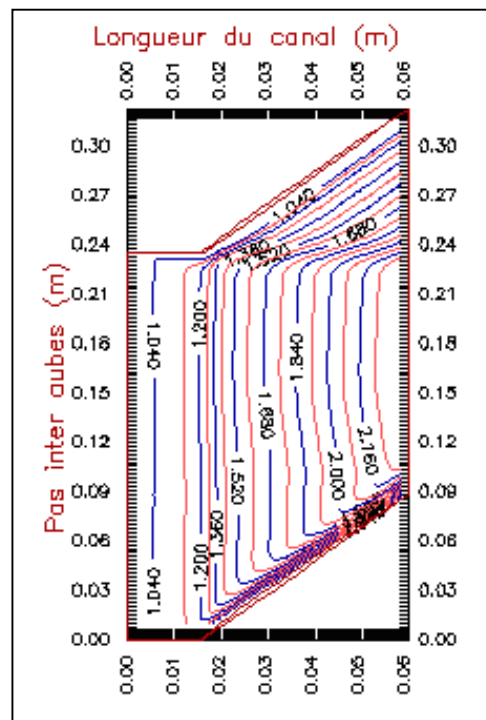


Fig.(IV-32) : Distribution des isobars (en bar) :

$R=0.1517$  m,  $\gamma=63.33^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s,  $N=1450$  tr/mn.

Quand la roue est au repos, nous remarquons que les lignes de courant **Fig.(IV-28 et IV-31)** suivent parfaitement la géométrie du canal et que le débit augmente au niveau de la ceinture puisque la section de passage est plus grande. Dans le cas du fonctionnement de la pompe, la recirculation des particules de fluide apparaît au niveau du moyeu. Ceci est dû à la cambrure de ce dernier qui est plus importante que celle au niveau de la ceinture. En effet, le choc des particules avec l'extrados de l'aube au niveau du moyeu est plus important que celui de la ceinture qui présente une cambrure presque plate et qui favorise le glissement des particules dans le sens de l'écoulement. Cette faible cambrure est obtenue dans la phase du dimensionnement en choisissant un coefficient de diffusion plus faible (0.15 à 0.25) au niveau de la ceinture afin de limiter le NPSH (charge minimale à l'aspiration au dessus de la pression de vapeur) et d'éviter ainsi la cavitation de la pompe [25].

Nous remarquons, dans le cas de la rotation, **Fig.(IV-29 et IV-32)**, que la pression à la sortie du canal au niveau de la ceinture est plus grande que celle au niveau du moyeu. Ceci est dû, d'une part, à ce que l'énergie cinétique acquise par les particules de fluide et transformée en énergie de pression est plus importante et, d'autre part, le calage du profil (de la coupe cylindrique) est plus grand. Dans ce cas, la compression du fluide est plus favorable au niveau de la ceinture.

Nous remarquons aussi que la distribution de pression est presque uniforme dans les sections de passage au niveau de la ceinture.

Nous présentons ci-dessous **Fig.(IV-32-1)** les profils de pression aux différents rayons du rotor. Le but de cette tentative est de vérifier la cavitation de la pompe (la pression ne doit pas descendre en dessous de la pression de vaporisation de l'eau). Nous remarquons que l'augmentation de la pression se fait d'une manière presque linéaire depuis le bout de pale jusqu'au point de fuite. Et puisqu'il n'y a pas de chute de pression au niveau de l'extrados (endroit où se manifeste la cavitation), théoriquement cette pompe ne cavitera pas.

Nous constatons de plus que la pression augmente avec l'angle de calage des différents profils de l'aube. Ceci est dû à la forte déviation causée par le profil qui a le calage le plus grand et qui provoque un ralentissement du fluide.

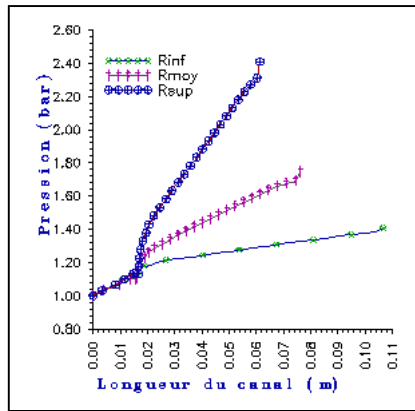


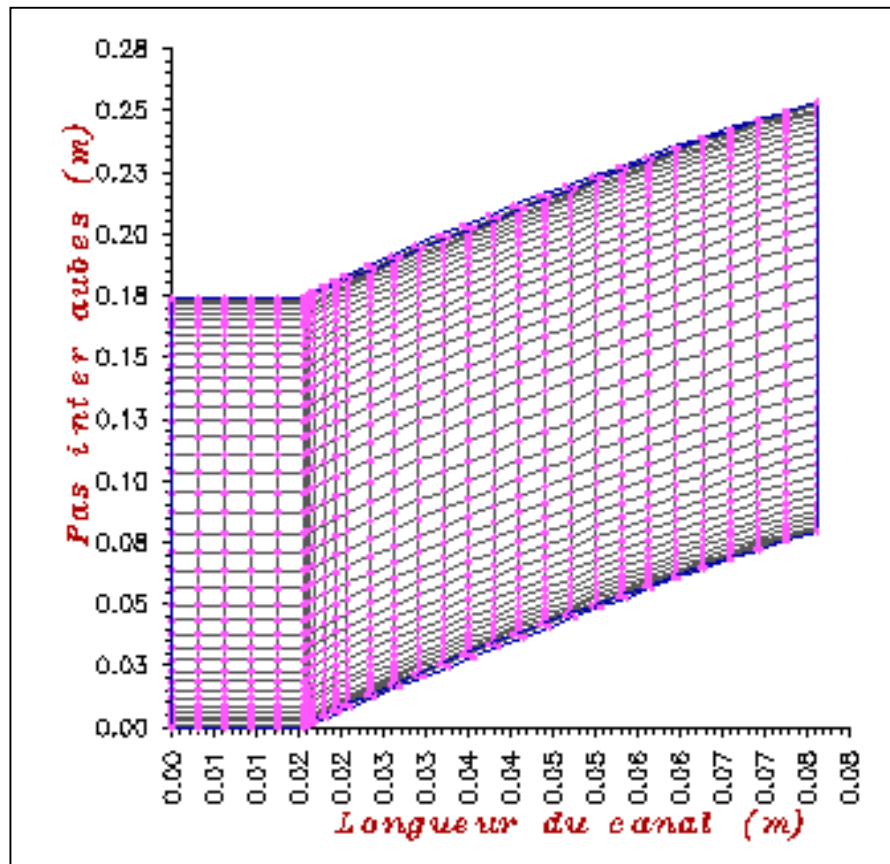
Fig.(IV-32-1) : *profils de pressions au niveau de l'extrados :*

$\mu=0.0089 \text{ Kg/m.s}$ ,  $u_e=8.548 \text{ m/s}$ ,  $N=1450 \text{ tr/mn}$ .



### IV.3- RAFFINAGE DU MAILLAGE

Pour rendre cette étude plus précise, nous avons essayé de raffiner le maillage **Fig.(IV-33-0)** dans le canal réel afin d'obtenir plus d'informations au voisinage des parois des aubes :



**Fig.(IV-33-0) : Maillage raffiné au rayon moyen :**

$$R=0.1110 \text{ m}, \gamma=52.67^\circ.$$

Les résultats de cette étude, au rayon moyen du rotor, nous ont donné le champ des vitesses, les lignes de courant, les isobars ainsi que le champ de pression qui sont représentés ci-dessous, **Fig.(IV-33 à IV-36)**.

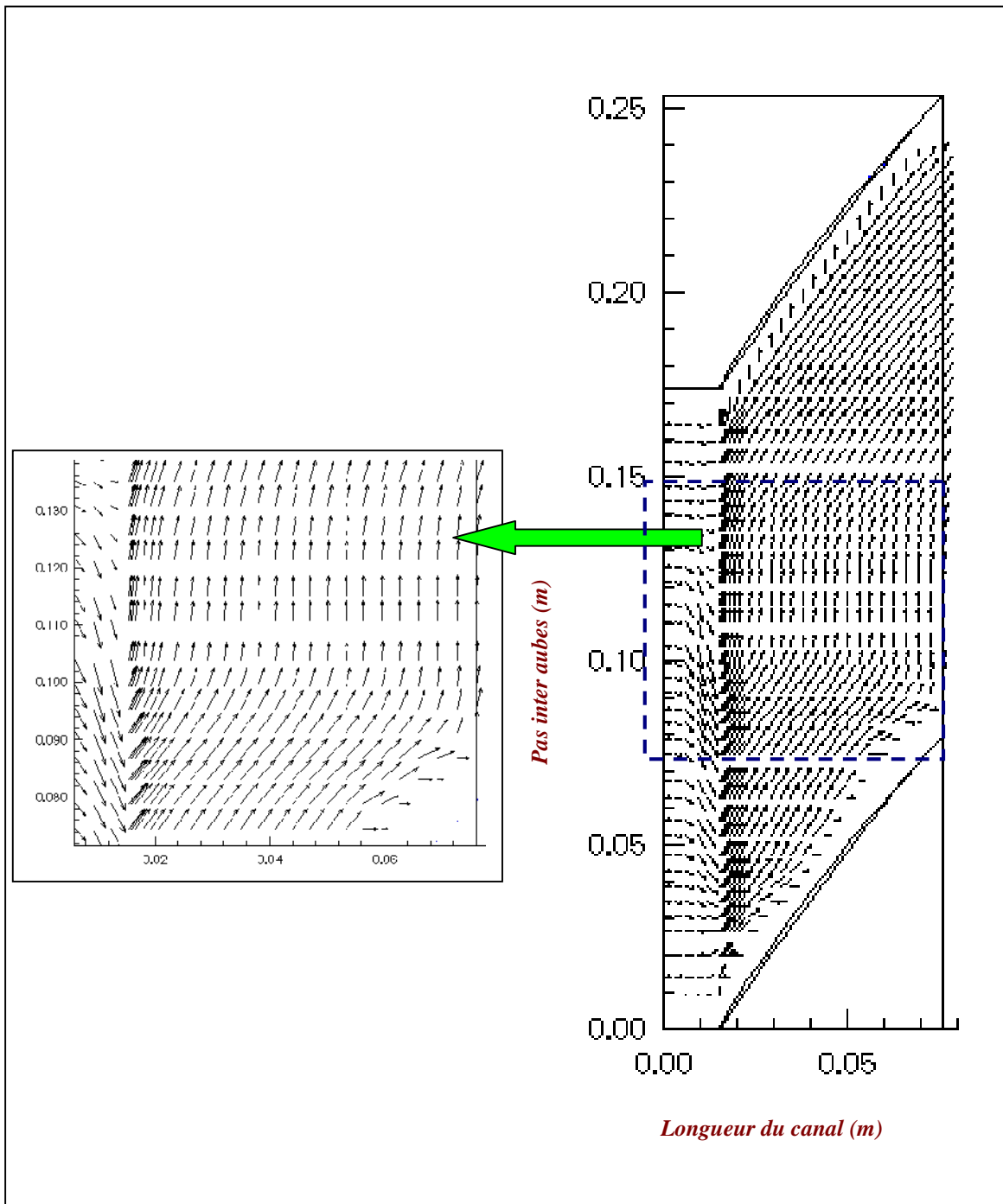
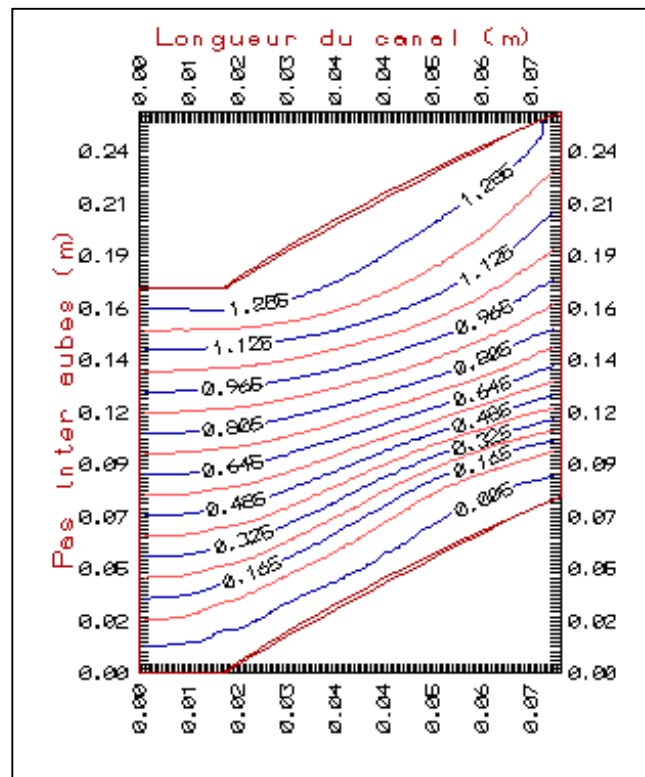
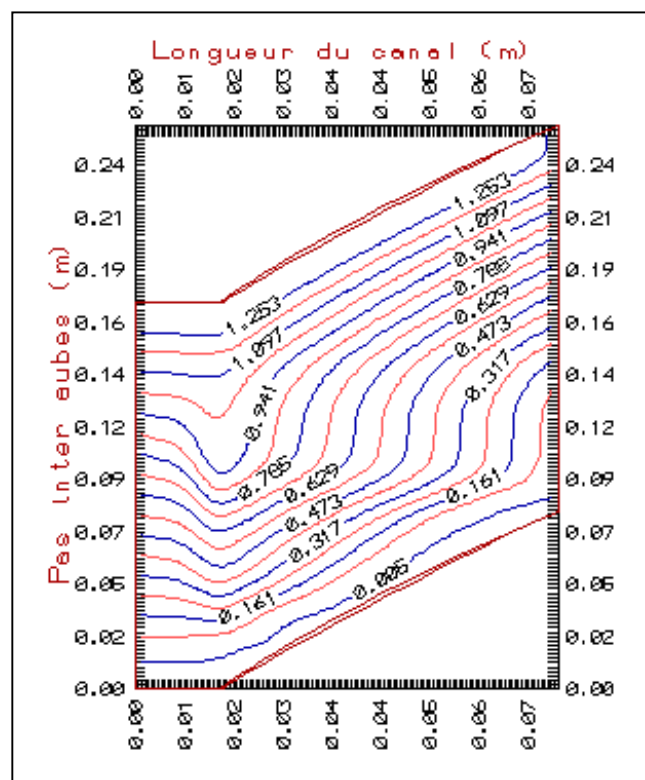


Fig.(IV-33) : Champ de vitesses dans le rotor :

$R=0.1110$  m,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s,  $N=1450$  tr/mn.



a-  $N=0.0$  tr/mn.



b-  $N=1450$  tr/mn.

Fig.(IV-34) : Distribution des lignes de courant :

$R=0.1110$  m,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089$  Kg/m.s,  $u_e=8.548$  m/s.

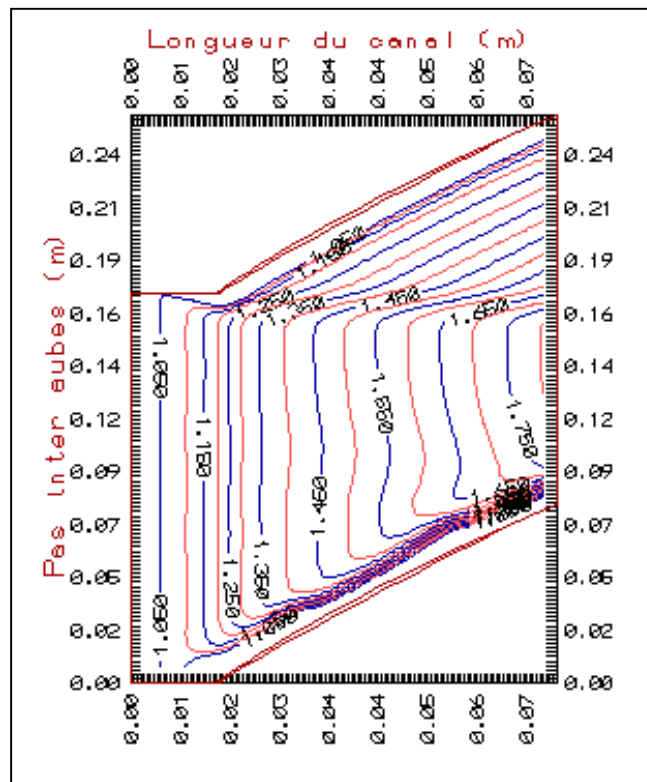


Fig.(IV-35) : Distribution des isobars (en bar) :

$R=0.1110\text{ m}$ ,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089\text{ Kg/m.s}$ ,  $u_e=8.548\text{ m/s}$ ,  $N=1450\text{ tr/mn}$ .

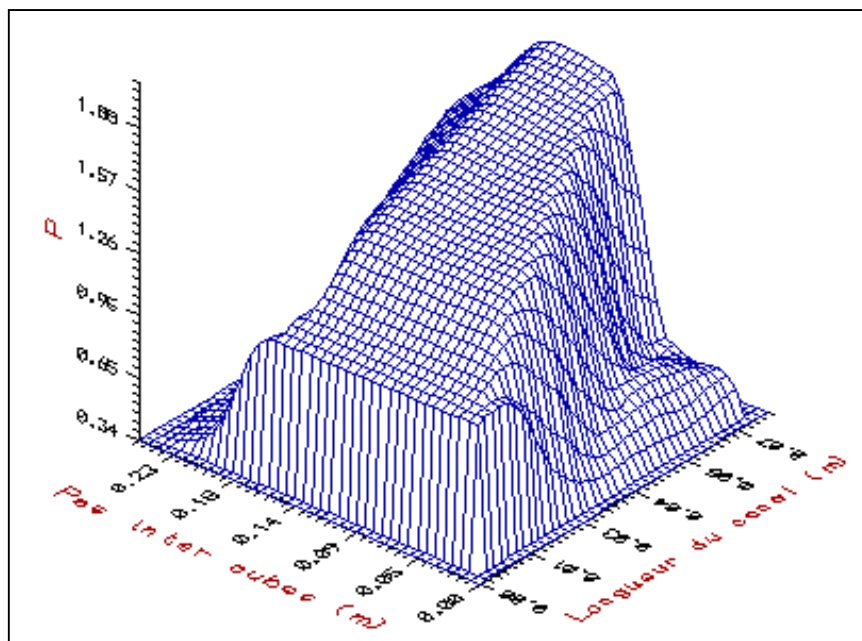


Fig.(IV-36) : Champ de pression (en bar) :

$R=0.1110\text{ m}$ ,  $\gamma=52.67^\circ$ ,  $\mu=0.0089\text{ Kg/m.s}$ ,  $u_e=8.548\text{ m/s}$ ,  $N=1450\text{ tr/mn}$ .

L'examen de toutes ces figures nous permet de dire qu'il n'y a pas une grande différence entre ces résultats et ceux obtenus précédemment par le maillage droit. Mais nous avons économiser du temps car le nombre de nœuds ont considérablement diminué de 2697 à 1829 (de 1h30 à 45mn sur un PC DX4 100 MHz).

Dans cette étude, nous nous n'intéressons pas aux couches limites car la modélisation utilisée ne permet pas de décrire exactement les phénomènes qui se passent à proximité des parois. C'est pour cette raison que le raffinement ne va apporter qu'une légère différence. Par exemple la comparaison des lignes de courant des figures **Fig.(IV-22 et IV-34)** nous montre qu'au voisinage de l'extrados, il existe une certaine perturbation des particules de fluide. D'autre part, la circulation du fluide à l'entrée du rotor n'est pas visible car le nombre de nœuds dans cet endroit est inférieur à celui du maillage rectangulaire droit. En effet, le raffinement nous impose à diminuer le pas au niveau des parois ce qui nous oblige à prendre un nombre de nœuds inférieur au centre du canal.

En ce qui concerne les pressions, nous n'avons pas constaté un changement considérable par rapport au maillage rectangulaire droit.

#### IV.4- ETUDE DE LA STABILITE

Nous avons défini, au niveau du programme, un test d'arrêt qui dépend d'une certaine précision donnée sur les vitesses par :

$$\Delta Q = \frac{1}{2} \sum_{(i,j)=(1,1)}^{(L1,M1)} \left\{ |u^k(i,j) - u^{k+1}(i,j)| + |v^k(i,j) - v^{k+1}(i,j)| \right\}$$

k : représente l'ordre d'une itération, k+1 : représente l'ordre de l'itération suivante.

Afin de minimiser encore le temps d'exécution du programme et d'aboutir à la convergence, nous avons calculé les composantes de la vitesse d'une particule de fluide située au milieu du canal pendant 1000 itérations. Nous avons obtenu les résultats suivants :

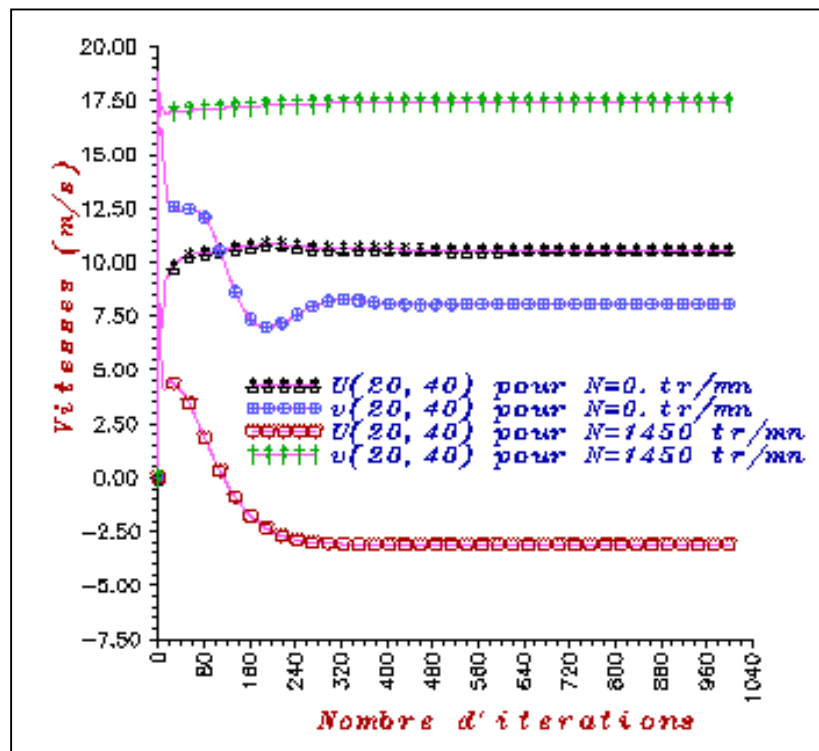
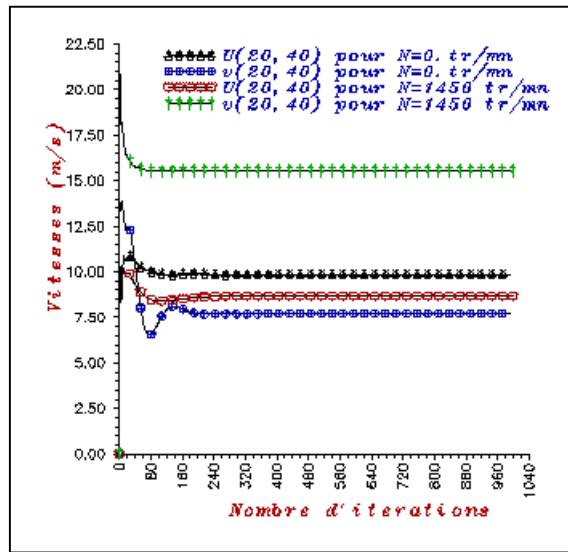


Fig.(IV-37) : Evolution de la stabilité dans le rotor. Maillage rectangulaire droit :

$$R=0.1110 \text{ m}, \gamma=52.67^\circ, \mu=0.0089 \text{ Kg/m.s}, u_e=8.548 \text{ m/s.}$$

Pour un canal réel, nous constatons qu'à partir de 480 itérations, les différentes vitesses des particules commencent à se stabiliser. De ce fait, le temps d'exécution est presque diminué de moitié avec les 480 itérations au lieu de 1000.

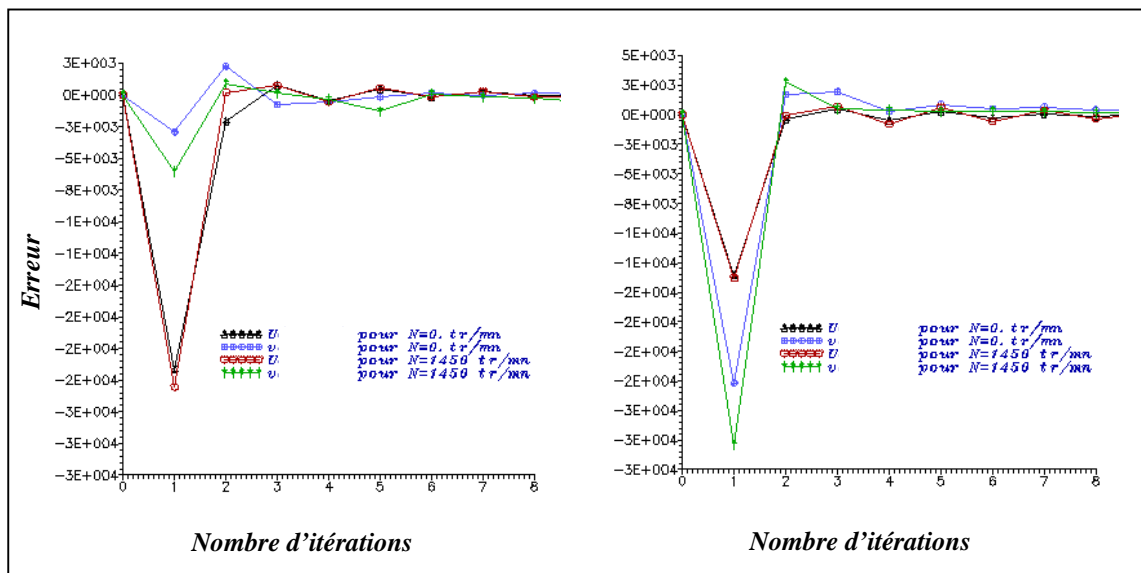
Dans le cas du raffinement du maillage **Fig.(IV-38)**, nous remarquons que la convergence est obtenue uniquement avec un nombre d'itérations égal à 250. Le temps d'exécution est d'environ 30 mn contre 45mn pour le cas du maillage rectangulaire droit.



**Fig.(IV-38) :** Evolution de la stabilité dans le canal. Maillage raffiné :

$$R=0.1110 \text{ m}, \gamma=52.67^\circ, \mu=0.0089 \text{ Kg/m.s}, u_e=8.548 \text{ m/s}.$$

On constate, sur la **Fig.(IV-39)**, que la convergence est plus rapide au cours des huit premières itérations, ce qui conforme avec l'algorithme SIMPLER.



Evolution de l'erreur dans la pompe.

Evolution de l'erreur dans le rotor, ( $\gamma=52.67^\circ$ ).

**Fig.(IV-39) :**  $R=0.1110 \text{ m}, \mu=0.0089 \text{ Kg/m.s}, u_e=8.548 \text{ m/s}.$

## CONCLUSION

Les équations de **NAVIER- STOKES** sont particulièrement pratiques pour la description des écoulements des fluides newtoniens incompressibles et visqueux. Ces équations constituent un système non linéaire aux dérivées partielles. Malgré les développements récents des moyens, Il n'existe pas de solutions analytiques à ces équations sauf pour le cas de certains écoulements très simples. Dans le cas général, leur résolution n'est pas facile et fait appel aux méthodes numériques.

En se référant à certaines publications sur les écoulements inter-aubages dans les turbomachines, nous avons essayé de valider les résultats obtenus par le programme en résolvant les équations précédentes pour un écoulement dans un canal axial (non calé) dans toute la pompe (rotor et stator). Ces équations sont discrétisées par la méthode des volumes finis que nous avons trouvé très pratique pour ce genre de problème. Nous avons choisi, pour cette méthode, le schéma **POWER-LAW** qui nous a donné entière satisfaction.

Cette étude nous a confirmé la bonne marche du programme vue que les résultats que nous avons obtenus, décrivent bien l'écoulement d'un fluide entre deux profils d'aubes dans le rotor et autour des profils d'aubes dans le stator. Nous avons alors saisi cette opportunité pour étudier l'influence de la distance entre le rotor et le stator afin de voir le comportement de l'écoulement. Les résultats partiels que nous avons trouvés nous montrent que cette distance doit être judicieusement choisie car d'une part, le rapprochement provoque des chocs au niveau du stator. Ces chocs sont dus aux effets des écoulements secondaires et surtout à la turbulence qui produit le sillage sur le stator. D'autre part, l'éloignement fait augmenter les pertes de charge du fluide dans cette zone et les performances globales de la machine se trouvent chutées.

Dans le but de simuler l'écoulement tridimensionnel (modélisation de **Ch. WU**) dans un rotor de pompe axiale, nous avons utilisé le programme précédent afin de calculer les caractéristiques de cet écoulement pour les différentes zones du canal (au rayon moyen, au niveau du moyeu et de la ceinture) ainsi que l'influence de la vitesse débitante sur ces caractéristiques au rayon moyen. Les résultats que nous avons obtenus concordent bien avec la réalité du phénomène physique. En effet, les profils des vitesses axiales montrent clairement le ralentissement des particules de fluide au niveau de l'extrados et de l'intrados



bien que nous n'avons pas utilisé les équations de la couche limite. Aussi, les valeurs des pressions obtenues à la sortie du rotor sont satisfaisantes et d'après les lignes isobars, la pression est presque uniforme dans les sections transversales du canal inter-aubes, ce qui est recherché dans une pompe.

Le programme que nous avons développé sera intégré au logiciel « *POMPAX* » déjà établi [25] et servira, au moment du dimensionnement de la machine, à la bonne connaissance de l'écoulement à l'intérieur et conduira notamment à de meilleurs résultats. En effet, ce logiciel a été optimisé pour donner rapidement les dimensions globales de la pompe seulement à partir du cahier des charges (H, Q, N). Durant la phase du dimensionnement nous agissons sur certains coefficients afin de favoriser, selon la demande de l'utilisateur, soit le rendement, soit la cavitation, soit le bruit ou encore la taille de la machine. Tout cela nous amène à des aubes différentes pour ces machines ce qui modifie l'écoulement aube-à-aube. De ce fait on dira que le dimensionnement est indirectement lié à l'étude de l'écoulement interne dans la machine.

Nous n'avons pas pu obtenir plus d'informations au niveau des parois des aubes car, d'une part, le rapport entre le pas et la longueur du canal est trop grand. D'autre part, nous nous sommes pas intéressés à la couche limite qui nécessite une étude plus poussée. Notre but, comme nous l'avons fait pour « *POMPAX* », est d'avoir globalement les caractéristiques de l'écoulement interne en un minimum de temps.

Du fait que l'épaisseur des aubes est plus faible devant le pas du maillage, nous n'avons pas pu simuler l'écoulement réel (avec des aubes calées) dans toute la pompe. En effet, cette contrainte nous a empêché d'appliquer les conditions aux limites sur ces parois.

L'étude de l'écoulement aube-à-aube seule, bien que généralement suffisante, ne suffit pas à expliquer tous les phénomènes qui interviennent du fait de la complexité de l'écoulement réel. Un couplage de cette étude pourra éventuellement être fait avec l'étude de l'écoulement sur les surfaces méridiennes (S2) pour pouvoir simuler l'écoulement quasi-tridimensionnel et apporter plus de réponses aux questions qui restent posées. Cette étude tridimensionnelle, utilisant cette fois-ci la méthode des éléments finis, est en cours de réalisation dans le cadre d'une thèse de Doctorat mené par G. MEBARKI qui a conçu la première version de « *POMPAX* ».

## BIBLIOGRAPHIE

[1] – A HONG. TUAN HA

*Etablissement d'un programme de calcul de l'écoulement « dans le plan méridien » d'une turbomachine radiale par la méthode des éléments finis.*

Journal de Mécanique Appliquée. Volume 3- 1979 N°:4.

[2] – Antoine FOURMAUX, Gilles BILLONNET, Georges MEAUZE

*Simulation numérique des écoulements tridimensionnels et instationnaire dans les turbomachines.*

Revue Française de Mécanique N°: 1988-4.

[3] – E. BONATAKI, P. CHAVIAROPOULOS, K. D. PAPAILIOU

*An inverse Inviscid Method for the design of Quasi- Three Dimensional Turbomachinery Cascades.*

Journal of Fluids Engineering MARCH 1993, Vol. 115 / 121.

[4] – L.CAMBIER, J. P. VEUILLOT et A. M. VEUILLOT

*Développements récents sur les méthodes de calcul d'écoulements internes par résolution des équations d' EULER où de NAVIER- STOKES.*

Revue Française de Mécanique N°: 1988-4.

[5] – H. DECONINK, Ch. HIRSCH

*Finite Element Method for Transonic Blade – to – Blade Calculation in Turbomachines.*

Journal of Engineering for Power (A S M E – 1981).

[6] –S.DJOUMAA

*Simulation numérique d'un écoulement compressible entre deux aubes d'une turbine axiale.*

Thèse de Magistère. Institut de Mécanique, Université de BATNA. Octobre 1996.

[7] –M.FENAIN

*Méthodes de relaxation pour la résolution des équations elliptiques dans les domaines de frontières quelconques.*

Journal de Mécanique Appliquée Vol 1. N° 1.1977.

[8] –H.HOLLANDERS et W.RAVALASON

*Résolution des équations de NAVIER-STOKES en fluide compressible par méthode implicite.*

La Recherche Aérospatiale. Année 1986 N°1 (Janvier - Février P.23 à 46).

- [9] –F.Leboeuf, A.Vouillarmet, P.Ferrand  
*Aérothermodynamique des turbomachines* Tome 1.  
 Cours de D.E.A Turbm. Ecole centrale de LYON Année 1989-1990.
- [10] –G.MEAUSE , R.SOVRANO et Y.BIRAND  
*Synthèse des méthodes numériques développés à l'ONERA, applicables aux calcul des écoulements dans les turbomachines.* T-P N°1984-28.
- [11] – G.L.MELLOR and G.M.WOOD  
*An axial compressor end – wall boundary layer.*  
 Journal of turbomachinery 1973.
- [12] –PATRIK J.ROACHE  
*Computational fluide dynamics.*  
 Jaanese Edition, Kozokeikaku, Tokyo 1978 Russian Edition, Mir, MOSKOW. 1980
- [13] – REUBEN M. OLSON  
*Essentials of Engineering Fluid Mechanics* Third Edition.  
 Intext Educational Publishers NEW YORK 1973.
- [14] – ROLLAND DAT  
*Turbomachines – progès récents des études théoriques et expérimentales.*  
*Modern calculation methods for turbomachineriy flows.*  
 Revue française de mécanique N°: 1988-4.
- [15] – A. SEBESTYEN, E. STECK, K.O.FELSCH  
*Comparison two methods for calculating the velocity distribution in rotating cascades.*
- [16] – SERAM – Dossier N°:13.271  
*Champs des caractéristiques d'éléments de turbopompes.*  
*(ETAT DES METHODES DE CALCUL).. Enquête sur les programmes de calcul.*  
 Société d'Etude et de Recherches de l'École Nationale Supérieure D'Arts et Métiers. Dossier N° 13.271.
- [17] –SUHAS V.PATANKAR  
*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.*  
 Series in Computational, methods in mechanics and thermal sciences - 1978.
- [18] – I. TREBINJAC, F. LEOEUF, A. VOUILLARMET, G. BOIS  
*Etat Actuel de la Théorie des écoulements secondaires et vérifications expérimentales.*  
 Revue Française de Mécanique N°: 1988-4.

- [19] – VAVRA  
*Aero-thermodynamics and flow in turbomachines.*  
France –1962.
- [20] –J.P. VEUILLOT  
*Calcul numérique de l'écoulement transsonique d'un fluide parfait dans une grille d'aubes.*  
ONERA N° 6.1977.
- [21] –J.P.VEUILLOT  
*Calcul de l'écoulement moyen dans une roue de turbomachine axiale.*  
Office Nationale d'Études et des Recherches Aérospatiale 1973.
- [22] –WAGDI G. HABASHI  
*Numerical methods of turbomachinery.*  
Concordia, University, Montreal. Canada.
- [23] – Wu. Ch  
*A general theory of three dimensional in subsonic and supersonic turbomachines of axial, radial or mixed types.*  
N.A.C.A TN 2604, 1952
- [24] – M.BOUDJEMAA  
*Expérimentation sur le contrôle passif de la couche limite.*  
Thèse de Magistère. Institut de Mécanique E.N.P Alger-1993.
- [25] – G.MEBARKI  
*Etablissement d'un logiciel de dimensionnement, de prédiction des caractéristiques hydrauliques et l'analyse des performances d'une turbomachine axiale de compression.*  
Thèse de Magistère. Institut de Mécanique. Université de BATNA 1997.
- [26] – Encyclopædia Universalis France S.A.Tous.  
droits de propriété intellectuelle et industrielle réservés. 1995.
- [27] – H. MARSH  
*A digital computer program for the through- flow mechanics in an arbitrary turbomachine using a matrix method.*  
National gas turbine establishment report /N°R. 282.

## INTRODUCTION

La détermination numérique des écoulements dans la roue d'une turbomachine - à travers des zones aubées - est extrêmement compliquée. L'approche consiste à résoudre les équations de **NAVIER-STOKES** pour les écoulements stationnaires plans en utilisant la méthode d'intégration dans l'espace qui est la méthode des volumes finis [8,17,22,23]. Nous allons développer la méthode des volumes finis pour notre cas et l'appliquer ainsi à la résolution des équations de mouvement après les avoir transformées en équations algébriques.

Le phénomène théorique est représenté par l'équation mathématique d'une variable  $\phi$ .

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) + s \quad i=1, 2 \quad (\text{A.1})$$

où  $\phi = u, v$ .

$s =$  gradient de pression + forces de volumes + Forces visqueuses.

En introduisant l'équation de continuité qui s'exprime par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad i=1, 2 \quad (\text{A.2})$$

dans l'équation (A.1), on abouti à l'équation :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu \frac{\partial \phi}{\partial x_i}) + s; \quad i=1, 2 \quad (\text{A.3})$$

### A.1- DÉFINITION

Cette méthode est basée sur trois étapes principales :

**a/** On place un certain nombre de nœuds dans le domaine d'étude et un volume de contrôle, délimité par des interfaces, est construit autour de chaque nœud.

**b/** L'équation aux dérivées partielles est intégrée sur chaque volume de contrôle.

**c/** Un profil de variation de la quantité  $\phi$  est choisi consécutif pour pouvoir évoluer les dérivées à l'interface.

## A.2- RÈGLES DE BASE À SATISFAIRE

**Règle N°1 :** Règle de l'unicité des flux aux interfaces :

Le flux sortant d'un volume de contrôle par une face doit être le même que celui entrant par la face du volume de contrôle voisin.

**Règle N°2 :** Règle des coefficients positifs : l'équation algébrique, dans le cas d'un régime unidimensionnel, s'écrit :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (\text{A.4})$$

ou bien sous la forme :

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (\text{A.5})$$

$a_p$  et  $a_{nb}$  doivent être tout positifs.

**Règle N°3 :** Règle de la pente négative : lors de la linéarisation du terme source :

$$\bar{s} = s_c + s_p \phi_p \quad (\text{A.6})$$

On doit avoir  $s_p \leq 0$ .

**Règle N°4 :** Règle de la somme des coefficients  $a_{nb} = a_p$

$$a_p = \sum a_{nb} \quad (\text{A.7})$$

D'une manière générale, lorsqu'il y a un terme source on a :

$$a_p \geq \sum a_{nb} \quad (\text{A.8})$$

## A.3- FORMULATION

### III.3.1- Cas d'un régime unidimensionnel stationnaire

L'équation de continuité ainsi que celle du mouvement, ( $s=0$ ), s'écrivent respectivement :

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (\text{A.9})$$

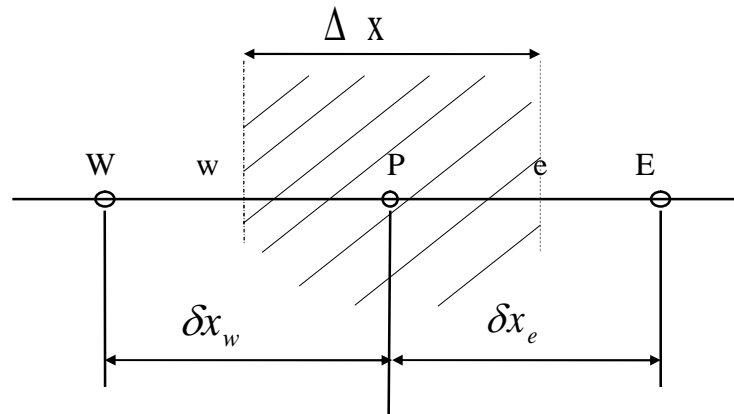
$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\mu \frac{d\phi}{dx}\right) \quad (\text{A.10})$$

L'intégration respective des équations (A.9) et (A.10) dans le volume de contrôle qui est représenté sur la **Fig.(A-1)** nous donne :

$$(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left( \mu \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \mu \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (\text{A.11})$$

et

$$\rho u = c_{te} \quad (\text{A.12})$$



**Fig.(A-1) : Représentation du volume de contrôle.**

Afin de satisfaire les règles de cette méthode, il est nécessaire de choisir un profil de variation de la variable  $\phi$ . Il existe plusieurs types de profils qui sont définis ci-dessous :

### A.3.2- Différents schémas

**1- Schéma centré (Profil linéaire) :** La variable  $\phi$  dans les interfaces est exprimée par :

$$\phi_e = \frac{1}{2} (\phi_E + \phi_P) \quad (\text{A.13})$$

$$\phi_w = \frac{1}{2} (\phi_P + \phi_W) \quad (\text{A.14})$$

En substituant les équations (A.13) et (A.14) dans l'équation (A.12), on obtient :

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\phi_W + \phi_P) = \frac{\mu_e(\phi_E - \phi_P)}{\delta x_e} - \frac{\mu_w(\phi_P - \phi_W)}{\delta x_w} \quad (\text{A.15})$$

L'équation discrétisée devient :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{A.16})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \\ a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \\ a_P = D_e + \frac{F_e}{2} + D_w - \frac{F_w}{2} = a_E + a_W + (F_e - F_w) \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

$F = \rho u$  : débit par unité de surface (peut être positif ou négatif).

$D = \frac{\mu}{\delta x}$  : viscosité par unité de longueur (ne peut prendre que des valeurs positives).

L'équation de continuité ( $\rho u = c_{te}$ ), donne lieu à  $F_e = F_w$ , d'où :

$$a_P = a_E + a_W \quad (\text{A.18})$$

**\*Inconvénient :**

Pour que les résultats aient un sens physique,  $a_E$  doit être positif. Donc le schéma des différences centrées est limité à des faibles valeurs du rapport  $|F| / D$ :

$$\frac{|F|}{D} < 2 \quad (\text{A.19})$$

$F / D$  : représente le nombre de **REYNOLDS**.

## 2- Schéma décentré "Upwind"

Ce schéma propose la valeur à l'interface égale celle de l'amont :

$$\begin{cases} \phi_e = \phi_P \rightarrow \text{si } F_e > 0. \\ \phi_e = \phi_E \rightarrow \text{si } F_e < 0. \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

$$\begin{cases} \phi_w = \phi_W \rightarrow \text{si } F_w > 0. \\ \phi_w = \phi_P \rightarrow \text{si } F_w < 0. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Soit :  $\llbracket a, b \rrbracket = \max(a, b)$



Schéma **Upwind** se résume alors :

$$\begin{cases} F_e \phi_e = \phi_P [F_e, 0] - \phi_E [-F_e, 0] \\ F_w \phi_w = \phi_W [F_w, 0] - \phi_P [-F_w, 0] \end{cases}$$

L'équation discrétisée s'écrit alors :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{A.22})$$

Avec :

$$a_E = D_e + [-F_e, 0] \quad (\text{A.23})$$

$$a_W = D_w + [F_w, 0] \quad (\text{A.24})$$

$$a_P = D_e + [F_e, 0] + D_w + [-F_w, 0] \quad (\text{A.25})$$

Tous les coefficients sont positifs.

*\*Inconvénient :*

-Non approprié pour les faibles valeurs de  $|R_e|$ .

-Pour les grandes valeurs de  $|R_e|$ , la diffusion est surestimée (normalement

$$\frac{d\phi}{dx} \rightarrow 0)$$

### 3- Schéma Exact

L'intégration de l'équation (A.10) sur le volume de contrôle pour  $0 \leq x \leq L$ , avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi(x=0) \\ \phi_L &= \phi(x=L) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

nous donne :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\text{Exp}(R_e \cdot x) - 1}{\text{Exp}(R_e) - 1} \quad (\text{A.27})$$

Avec :  $R_e = \frac{\rho u L}{\mu} = \frac{\rho u}{(\mu/L)} = \frac{F}{D}$  est le nombre de **REYNOLDS** :

On peut donc représenter les variations de  $\phi(x)$  pour différentes valeurs de  $R_e$ .

- Pour  $R_e = 0$ , ( $u = 0$ ), pas de terme convectif (problème de diffusion).

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0 \rightarrow \phi \text{ a un profil linéaire.}$$

- Pour les valeurs élevées et positives de  $R_e$ , la valeur de  $\phi$  est proche de  $\phi_0$ .

- Pour les valeurs élevées et négatives de  $R_e$ , la valeur de  $\phi$  est proche de  $\phi_L$ .

Ceci est illustré sur la figure (Fig.A-2) ci-dessous :

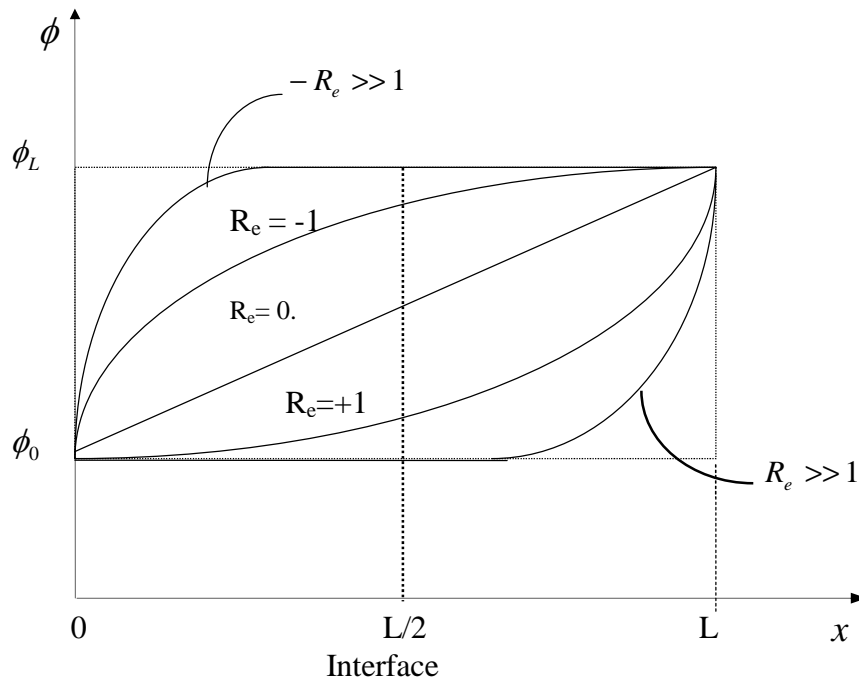


Fig.(A-2) : Profil du schéma exact.

\*Inconvénient :

Lorsque  $|R_e|$  prend des valeurs élevées alors :

$\frac{d\phi}{dx} = 0$  ; a  $x = \frac{L}{2} \Rightarrow$  pas de diffusion, alors qu'avec un schéma Upwind, un profil linéaire

est utilisé pour la diffusion. Donc la diffusion est surestimée.

#### 4- Schéma Exponentiel

Soit le flux total  $J$  comprenant la convection et la diffusion :

$$J = \rho u \phi - \mu \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{A.28})$$

$\rho u \phi$  : est le flux convectif.

$-\mu \frac{d\phi}{dx}$  : est le flux par diffusion.

L'équation (A.10) devient :

$$\frac{dJ}{dx} = 0 \quad (\text{A.29})$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle **Fig.(A-1)**, nous donne :

$$J_e - J_w = 0 \quad (\text{A.30})$$

et avec un profil exact :

$$\phi = \phi_0 + (\phi_L - \phi_0) \left\{ \frac{\text{Exp}(R_e x / L) - 1}{\text{Exp}(R_e) - 1} \right\} \quad (\text{A.31})$$

pour :

$$\left. \begin{array}{l} \phi_0 = \phi_W \\ \phi_L = \phi_P \\ L = \delta x_w \end{array} \right\} \rightarrow J_w = F_w \left( \phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\text{Exp}(R_{e_w}) - 1} \right) \quad (\text{A.32})$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi_0 = \phi_P \\ \phi_L = \phi_E \\ L = \delta x_e \end{array} \right\} \rightarrow J_e = F_e \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\text{Exp}(R_{e_e}) - 1} \right) \quad (\text{A.33})$$

Donc l'équation (A.30) devient :

$$F_e \left( \phi_P + \frac{\phi_P - \phi_E}{\text{Exp}(R_{e_e}) - 1} \right) - F_w \left( \phi_W + \frac{\phi_W - \phi_P}{\text{Exp}(R_{e_w}) - 1} \right) = 0 \quad (\text{A.34})$$

Où encore :

$$a_p \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{A.35})$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E = \frac{F_e}{\text{Exp}(R_{e_e}) - 1} \\ a_W = \frac{F_w \cdot \text{Exp}(R_{e_w})}{\text{Exp}(R_{e_w}) - 1} \\ a_P = a_E + a_W \end{array} \right. \quad (\text{A.36})$$

**\*Inconvénient :**

Le schéma paraît approprié mais n'est pas assez utilisé car :

- Le calcul des exponentielles revient chère numériquement.

- Le schéma n'est pas exact pour les situations 2D et 3D avec le terme source.

### 5- Schéma Hybride

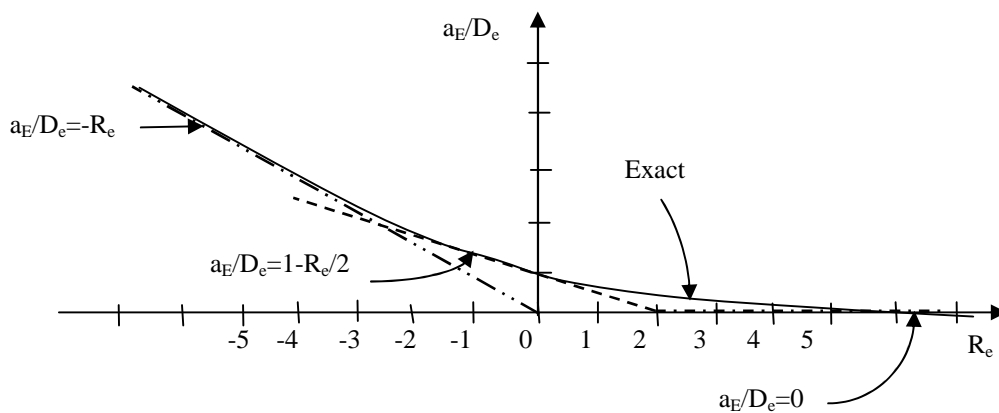
C'est un schéma ayant les qualités du schéma exponentiel, avec des expressions simples dont le calcul n'est pas cher (expressions algébriques).

A partir du schéma exponentiel :

$$a_E = \frac{F_e}{\text{Exp}(R_{ee}) - 1} \quad (\text{A.37})$$

Ou bien :

$$\frac{a_E}{D_e} = \frac{R_{ee}}{\text{Exp}(R_{ee}) - 1} \quad (\text{A.38})$$



**Fig.(A-3) :** variations de  $a_E/D_e$  en fonction de  $R_e$ .

La solution simple qui approche la variation exacte est :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ pour } R_{ee} < -2 \rightarrow \frac{a_E}{D_e} = -R_{ee} \\ * \text{ pour } -2 \leq R_{ee} \leq 2 \rightarrow \frac{a_E}{D_e} = 1 - \frac{R_{ee}}{2} \\ * \text{ pour } R_{ee} > 2 \rightarrow \frac{a_E}{D_e} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.39})$$

qui s'écrit encore sous forme compactée :

$$a_E = D_e \left[ -R_{ee}, \left(1 - \frac{R_{ee}}{2}\right), 0 \right] \quad (\text{A.40})$$

$$\text{où } a_E = \left[ -F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2}\right), 0 \right] \quad (\text{A.41})$$

1- Ce schéma est identique au schéma centré si  $|R_e| \leq 2$ .

2- Ce schéma est identique au schéma décentré (**Upwind**) si  $|R_e| > 2$ .

*\*Inconvénient :*

Avec le schéma Hybride, l'erreur est maximale au voisinage de  $|R_e| \approx 2$ .

### 6- Schéma Power Law

La loi en puissance ou polynomiale améliore l'enveloppe de la variation exponentielle. Les coefficients sont exprimés sous la forme compacte suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ pour } R_e \leq -10 \quad ; \quad \frac{a_E}{D_e} = -R_e \\ * \text{ pour } -10 < R_e \leq 0 \quad ; \quad \frac{a_E}{D_e} = (1 + 0,1.R_e)^5 - R_e \\ * \text{ pour } 0 < R_e \leq 10 \quad ; \quad \frac{a_E}{D_e} = (1 - 0,1.R_e)^5 \\ * \text{ pour } R_e > 10 \quad ; \quad \frac{a_E}{D_e} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.42})$$

Où sous forme compact :

$$a_E = D_e \left[ \left[ 0, \left( 1 - \frac{0,1 \cdot |F_e|}{D_e} \right)^5 \right] \right] + [0, -F_e] \quad (\text{A.43})$$

$$a_W = D_w \left[ \left[ 0, \left( 1 - \frac{0,1 \cdot |F_w|}{D_w} \right)^5 \right] \right] + [F_w, 0] \quad (\text{A.44})$$

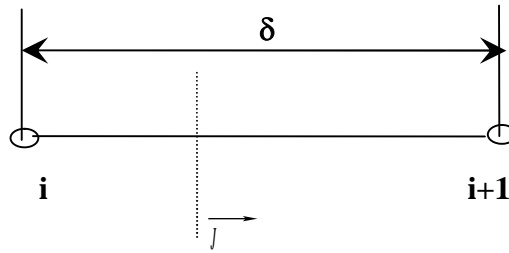
$$a_P = a_E + a_W \quad (\text{A.45})$$

Ce schéma est recommandé pour les situations de convection - diffusion.

### 7- Forme générale

On combine les différents schémas en une seule forme compacte.

Soit un flux **J** qui rentre par la face *i* et sort par la face (*i*+1), **Fig.(A-4)** :



**Fig.(A-4) : Représentation du volume de contrôle (Forme générale).**

Evolution du flux totale  $\vec{J}$  à l'interface :

$$J = \rho u \phi - \mu \cdot \frac{d\phi}{dx} \quad (\text{A.46})$$

soit :

$$\mathbf{J}^* = \frac{J \cdot \delta}{\mu} = R_e \cdot \phi - \frac{d\phi}{d(x/\delta)} \quad (\text{A.47})$$

avec :

$$R_e = \rho \frac{u\delta}{\mu} \quad (\text{A.48})$$

La valeur de  $\phi$  à l'interface est considérée comme une moyenne pondérée entre  $\phi_i$  et  $\phi_{i+1}$  [17]

Le gradient  $\frac{d\phi}{d(x/\delta)}$  est proportionnel à  $(\phi_{i+1} - \phi_i)$ . donc d'après [17],  $\mathbf{J}^*$  est exprimé par :

$$\mathbf{J}^* = R_e \{ \alpha \phi_i + (1 - \alpha) \phi_{i+1} \} - \beta \{ \phi_{i+1} - \phi_i \} \quad (\text{A.49})$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des facteurs dépendant de  $R_e$ .

l'équation précédente devient :

$$\mathbf{J}^* = (\alpha R_e + \beta) \phi_i - \{ -(1 - \alpha) R_e + \beta \} \phi_{i+1} \quad (\text{A.50})$$

où encore :

$$\mathbf{J}^* = B \cdot \phi_i - A \phi_{i+1} \quad (\text{A.51})$$

où A et B sont des fonctions de  $R_e$ .

\* PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS A ET B :

Si  $\phi_{i+1} = \phi_i$  :  $\mathbf{J}^* = (B - A) \phi_i$  et  $\frac{d\phi}{d(x/\delta)} = 0$  ;  $\mathbf{J}^* = R_e \cdot \phi$

d'où  $B - A = R_e$

\* EXPRESSION DES FONCTIONS A ET B :

Avec les variations exponentielles, on a :

$$J_e = F_e \left( \phi_p + \frac{\phi_p - \phi_E}{\exp(R_{ee}) - 1} \right) \quad (\text{A.52})$$

$$J_e = \left\{ \frac{F_e \cdot \exp(R_{ee})}{\exp(R_{ee}) - 1} \right\} \phi_p - \left\{ \frac{F_e}{\exp(R_{ee}) - 1} \right\} \phi_E \quad (\text{A.53})$$

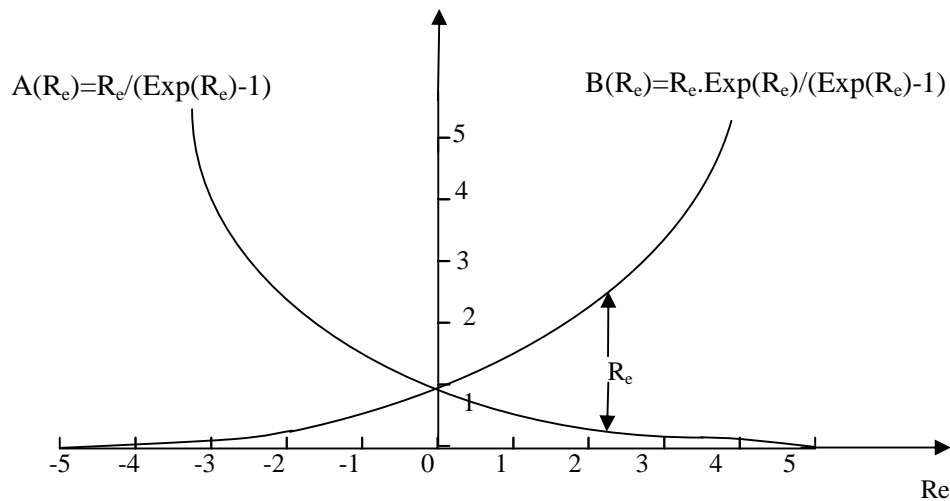
avec :  $J^* = \frac{J \cdot \delta}{\mu}$  et (nœud P  $\equiv$  nœud i, nœud E  $\equiv$  nœud i+1) donc :

$$J^* = \left\{ \frac{R_e \cdot \exp(R_e)}{\exp(R_e) - 1} \right\} \phi_i - \left\{ \frac{R_e}{\exp(R_e) - 1} \right\} \phi_{i+1} \quad (\text{A.54})$$

et d'après l'équation (A.51), on aura :

$$\begin{cases} A(R_e) = \frac{R_e}{\exp(R_e) - 1} \\ B(R_e) = \frac{R_e \cdot \exp(R_e)}{\exp(R_e) - 1} \end{cases} \quad (\text{A.55})$$

Les expressions de A(R<sub>e</sub>) et B(R<sub>e</sub>) sont représentées ci-dessous :



**Fig.(A-5) :** Courbes des fonctions A(R<sub>e</sub>) et B(R<sub>e</sub>).

Si l'axe R<sub>e</sub> est inversé (R<sub>e</sub> devient -R<sub>e</sub>), les rôles de A et B seront permutés donc on écrit :

$$\begin{cases} A(-R_e) = B(R_e) \\ B(-R_e) = A(R_e) \end{cases}$$

D'après la **Fig.(A-5)**, on a :

$$\text{Pour } R_e > 0 \rightarrow A(R_e) = A(-R_e) - R_e$$

$$\text{Pour } R_e < 0 \rightarrow A(R_e) = A(|R_e|) - R_e$$

Où bien pour toutes valeurs de  $R_e$

$$\begin{cases} A(R_e) = A(|R_e|) + [-R_e, 0.] \\ B(R_e) = A(|R_e|) + [R_e, 0.] \end{cases} \quad (\text{A.56})$$

L'intégration de l'équation différentielle (A.46) sur le volume de contrôle représenté sur la **Fig.(A-4)**, nous donne :

$$J_e - J_w = 0 \quad (\text{A.57})$$

$$J = J \cdot \frac{\delta}{\mu} = \frac{J}{D} \rightarrow J = J^* \cdot D \rightarrow \begin{cases} J_w = J_w^* \cdot D_w \\ J_e = J_e^* \cdot D_e \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

D'où l'équation (A.57) devient :

$$D_e J_e^* - D_w J_w^* = 0. \quad (\text{A.59})$$

$$D_e \{B_e \phi_P - A_e \phi_E\} - D_w \{B_w \phi_W - A_w \phi_P\} = 0 \quad (\text{A.60})$$

$$\{D_e B_e + D_w A_w\} \phi_P = \{D_e A_e\} \phi_E + \{D_w B_w\} \phi_W \quad (\text{A.61})$$

donc on obtient l'équation discrétisée :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W \quad (\text{A.62})$$

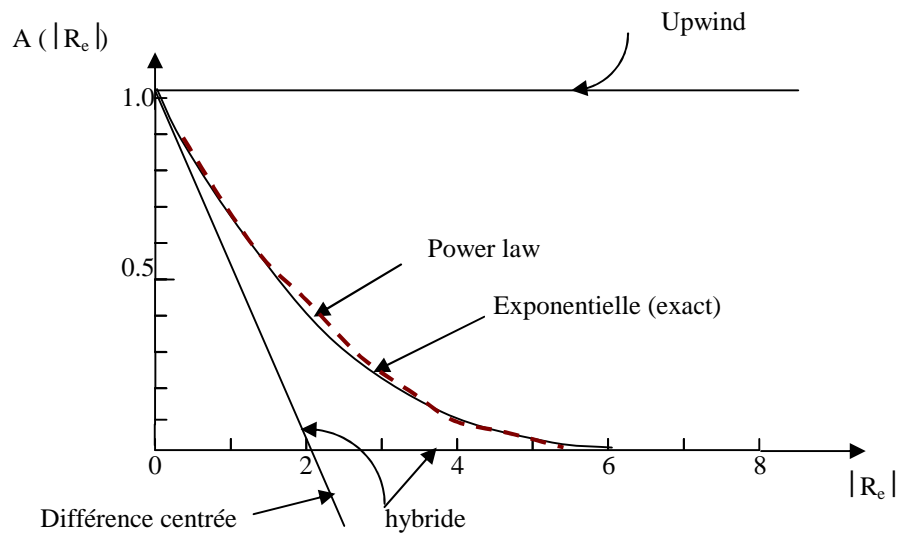
avec :

$$\begin{cases} a_E = D_e \cdot A(|R_{ee}|) + [-F_e, 0] \\ a_W = D_w \cdot A(|R_{ew}|) + [F_w, 0] \\ a_P = a_E + a_W \end{cases} \quad (\text{A.63})$$

Avec  $A(|R_e|)$  qui prendra une fonction selon le schéma choisi et qui est récapitulée dans le tableau suivant :



Schéma	$A( R_e )$
Différence centré	$1 - 0,5 \cdot  R_e $
Upwind	1.
Hybride	$\left[0, (1 - 0.5 R_e )\right]$
Exponentiel	$\frac{ R_e }{\{\exp( R_e ) - 1\}}$
Power- Law	$\left[0, (1 - 0.1 R_e )^5\right]$



**Fig.(A-6) :** Fonction  $A(|R_e|)$  du schéma variable.

### A.3.3- Cas d'un régime stationnaire bidimensionnel

Soit :

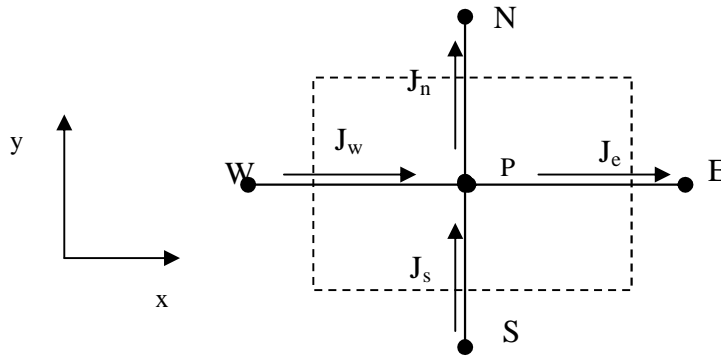
$$\begin{cases} J_x = \rho u \phi - \mu \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ J_y = \rho v \phi - \mu \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{A.64})$$

Donc, l'équation de continuité ainsi que celle du mouvement s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.65})$$

$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = s \quad (\text{A.66})$$

où  $u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse suivant les axes  $x$  et  $y$ .



**Fig.(A-7) : Représentation du volume de contrôle.**

L'intégration des équations (A.65) et (A.66) respectivement dans le volume de contrôle représenté dans la **Fig.(A-7)**, nous conduit à :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (\text{A.67})$$

$$J_e - J_w + J_n - J_s = s \cdot \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{A.68})$$

Avec :

$$\begin{cases} F_w = (\rho u)_w \Delta y \\ F_e = (\rho u)_e \Delta y \\ F_n = (\rho v)_n \Delta x \\ F_s = (\rho v)_s \Delta x \end{cases} \quad (\text{A.69})$$

$$\begin{cases} J_w = (\rho u \cdot \phi - \mu \frac{\partial \phi}{\partial x})_w \Delta y \\ J_e = (\rho u \cdot \phi - \mu \frac{\partial \phi}{\partial x})_e \Delta y \\ J_n = (\rho v \cdot \phi - \mu \frac{\partial \phi}{\partial y})_n \Delta x \\ J_s = (\rho v \cdot \phi - \mu \frac{\partial \phi}{\partial y})_s \Delta x \end{cases} \quad (\text{A.70})$$

La combinaison entre les équations : (A.68) et (A.68) qui est multipliée par  $\phi_p$ , nous donne la relation :

$$(J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p) + (J_n - F_n \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p) = s \Delta x \cdot \Delta y \quad (\text{A.71})$$

sachant que, (équation (A.58)) :

$$J_e - F_e \phi_p = D_e (J_e^* - R_e \phi_p) = D_e (B_e \cdot \phi_p - A_e \cdot \phi_E - R_e \phi_p) = D_e (A_e \cdot \phi_p - A_e \cdot \phi_E) \quad (\text{A.72})$$

Avec :  $A_e = A(R_e)$ ,  $B_e = B(R_e)$

Donc on aura :

$$\begin{cases} J_e - F_e \phi_p = a_E (\phi_p - \phi_E) \\ J_w - F_w \phi_p = a_W (\phi_w - \phi_p) \\ J_n - F_n \phi_p = a_N (\phi_p - \phi_N) \\ J_s - F_s \phi_p = a_S (\phi_p - \phi_S) \end{cases} \quad (\text{A.73})$$

substituant ces quantités dans l'équation (A.71), On obtient finalement l'équation discrétisée :

$$a_p \phi_p = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (\text{A.74})$$

Avec :

$$\begin{cases} a_W = D_w \cdot A(|R_{ew}|) + [F_w, 0] \\ a_E = D_e \cdot A(|R_{ee}|) + [-F_e, 0] \\ a_S = D_s \cdot A(|R_{es}|) + [F_s, 0] \\ a_N = D_n \cdot A(|R_{en}|) + [-F_n, 0] \\ b = s \cdot \Delta x \cdot \Delta y \\ a_p = a_W + a_E + a_S + a_N \end{cases} \quad (\text{A.75})$$

et

$$\begin{cases} D_e = \left( \frac{\mu_e}{\delta x_e} \right) \Delta y \\ D_w = \left( \frac{\mu_w}{\delta x_w} \right) \Delta y \\ D_n = \left( \frac{\mu_n}{\delta y_n} \right) \Delta x \\ D_s = \left( \frac{\mu_s}{\delta y_s} \right) \Delta x \end{cases} \quad (\text{A.76})$$

## A.4- RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÈBRIQUES

La résolution de ces équations se fait par des méthodes itératives qui sont moins coûteuses en temps machine et conviennent mieux aux systèmes non linéaires.

### A.4.1- MÉTHODE DE T.D.M.A

L'équation algébrique s'écrit :

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (\text{A.77})$$

Les règles de base de la méthode des volumes finis permettent de satisfaire le critère de SCARBOROUGH, qui s'exprime par :

Une condition suffisante pour avoir la convergence de cette méthode, est :

$$\frac{\sum |a_{nb0}|}{a_p} \begin{cases} \leq 1: & \text{pour toutes les équations} \\ < 1: & \text{pour au moins une équation} \end{cases} \quad (\text{A.78})$$

### A.4.2- RELAXATION PAR BLOC

Souvent, avec les méthodes itératives, en présence de non-linéarités, on veut accélérer les variations de la variable considérée d'une itération à une autre.

Le processus est appelé sous-relaxation.

La sous-relaxation est souvent utilisée pour éviter la divergence des problèmes fortement non linéaires.

L'équation algébrique s'écrit :

avec :

$$\phi_p = \phi_p^* + \left\{ \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \right\} \quad (\text{A.79})$$

Soit l'équation :

$$\phi_p' = \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \quad (\text{A.80})$$

où :

$\phi_p'$  : variation de  $\phi_p$  en une itération.

$\phi_p^*$  : valeur de  $\phi_p$  à l'itération précédente.



La somme des équation du système précédent, donne :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_1^L [A_{i,1} - B_{i,1} - C_{i,1}] \phi'_1 &= \sum_1^L D_{i,1} \cdot \phi'_2 + \sum_1^L E_{i,1} \cdot [ \quad ] + \\ &\left\{ \sum_1^L (B_{i,1} \cdot \phi_{i+1,1}^* + C_{i,1} \cdot \phi_{i-1,1}^* + D_{i,1} \cdot \phi_{i,2}^* + E_{i,1} \cdot [ \quad ] - A_{i,1} \phi_{i,1}^*) \right\} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.86})$$

pour un bloc j :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_1^L [A_{i,j} - B_{i,j} - C_{i,j}] \phi'_j &= \sum_1^L D_{i,j} \cdot \phi'_{j+1} + \sum_1^L E_{i,j} \cdot \phi'_{j-1} + \\ &\left\{ \sum_1^L (B_{i,j} \cdot \phi_{i+1,j}^* + C_{i,j} \cdot \phi_{i-1,j}^* + D_{i,j} \cdot \phi_{i,j+1}^* + E_{i,j} \cdot \phi_{i,j-1}^* - A_{i,j} \phi_{i,j}^*) \right\} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.87})$$

soit :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_j &= \sum_1^L [A_{i,j} - B_{i,j} - C_{i,j}] \\ \beta_j &= \sum_1^L E_{i,j} \\ \gamma_j &= \sum_1^L D_{i,j} \\ \delta_j &= \left\{ \sum_1^L (B_{i,j} \cdot \phi_{i+1,j}^* + C_{i,j} \cdot \phi_{i-1,j}^* + D_{i,j} \cdot \phi_{i,j+1}^* + E_{i,j} \cdot \phi_{i,j-1}^* - A_{i,j} \phi_{i,j}^*) \right\} \end{aligned} \right. \quad (\text{A.88})$$

le système obtenu est un système tridiagonal (T.D.M.A)

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1 \cdot \phi'_1 &= \beta_1 \cdot [ \quad ] + \gamma_1 \cdot \phi'_2 + \delta_1 \\ \alpha_2 \cdot \phi'_2 &= \beta_2 \cdot \phi'_1 + \gamma_2 \cdot \phi'_3 + \delta_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{M-1} \cdot \phi'_{M-1} &= \beta_{M-1} \cdot \phi'_{M-2} + \gamma_{M-1} \cdot \phi'_M + \delta_{M-1} \\ \alpha_M \cdot \phi'_M &= \beta_M \cdot \phi'_{M-1} + \gamma_M \cdot [ \quad ] + \delta_M \end{aligned} \right. \quad (\text{A.89})$$

## RESOLUTION DE T.D.M.A

Formule de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi'_j = P_j \cdot \phi'_{j+1} + Q_j \\ \text{où :} \\ P_j = \frac{\gamma_j}{\alpha_j - \beta_j \cdot P_{j-1}} \\ Q_j = \frac{\delta_j + \beta_j \cdot Q_{j-1}}{\alpha_j - \beta_j \cdot P_{j-1}} \end{array} \right. \quad (\text{A.90})$$

algorithme de T.D.M.A :

- 1- Calculer  $P_1$  et  $Q_1$  ( $P_1 = \gamma_1/\alpha_1$ ,  $Q_1 = \delta_1/\alpha_1$ )
- 2- Calculer de  $P_j$  et  $Q_j$  pour  $j=2, M-1$ , ( $\gamma_M=0$ ,  $P_M=0$ )
- 3- Obtenir  $\phi'_M = Q_M$
- 4- Utiliser l'équation de récurrence pour obtenir  $\phi'_{M-1}$ ,  $\phi'_{M-2}$ , .....  $\phi'_1$ .

## CONCLUSION

A cause du maillage décalé adapté à la méthode des volumes finis, on constate qu'elle a un avantage majeur qui permet d'éviter la discontinuité entre les caractéristiques du fluide (densité, viscosité,...) et les parois (aubes dans notre cas) pour permettre l'application correcte des conditions aux limites.

## B.1- CARACTERISTIQUES DE LA POMPE DE RÉFÉRENCE

- Débit :  $Q=0.5160 \text{ m}^3/\text{s}$ .
- Vitesse débitante à l'entrée :  $U=8.548 \text{ m/s}$ .
- Vitesse de rotation du moteur :  $N=1450 \text{ tr/mn}$ .
- Nombre d'aubes du rotor :  $Nr=4$ .
- Nombre d'aubes du stator :  $Ns=5$ .

Les caractéristiques géométriques sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

	Rotor			Stator		
Rayon (m)	Corde(m)	$\gamma$ (°)	$\delta$	Corde(m)	$\gamma$ (°)	$\delta$
$R_i=0.0727$	0.1569	24.61	1.39	0.1360	20.68	1.50
$R_m=0.1110$	0.1547	52.67	0.89	0.1353	16.23	0.97
$R_s=0.1517$	0.1641	63.33	0.69	0.1564	12.57	0.83

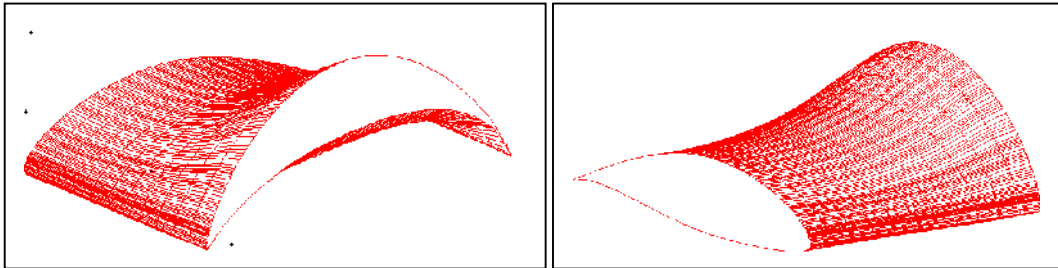
$R_i$  : rayon inférieur

$R_m$  : rayon moyen

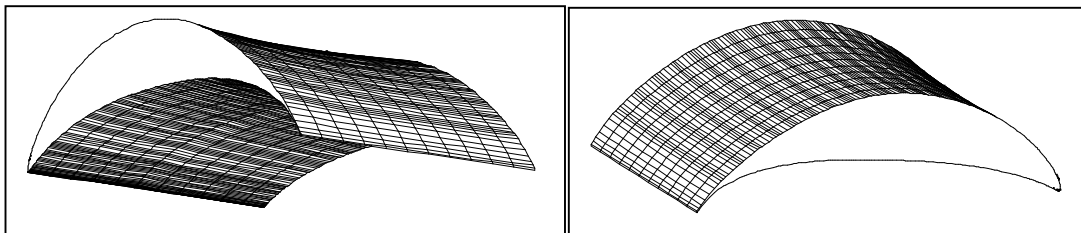
$R_s$  : rayon supérieur.

$\gamma$  : angle du calage d'aubes

$\delta$  : coefficient de serrage des aubes.



Vues 3D d'une aube de rotor calculée avec " POMPAX "



Vues 3D d'une aube de stator calculée avec " POMPAX "

Fig.(B-1) : Vues tridimensionnelles des aubes de la pompe.



## B.2- DESCRIPTION DU PROGRAMME

Le programme que nous avons développé est écrit en langage Fortran (Fvwb32) et comporte environ 1500 lignes pour la version qui traite l'écoulement réel et environ 2000 lignes pour celle qui traite la pompe entière avec des aubes non calées. Ces programmes ne présentent aucune interface de communication avec l'utilisateur du fait qu'ils vont être intégrés dans le logiciel " POMPAX ".

### B.2.1- HYPOTHÈSES

- Ecoulement incompressible, visqueux et stationnaire dans un canal.

### B.2.2- ALGORITHME

La subroutine principale **USER** contient les différentes sous-routines suivantes:

**GRID** : - Lecture des données des caractéristiques de la pompe.

- Initialisation des variables géométriques du canal.
- Détermination des interfaces et des nœuds.
- Tracé du domaine d'étude.

**DENSE** :- Initialisation de la densité.

**BOUND** :- Initialisation des conditions aux limites pour les deux composantes des vitesses et de la pression.

**GAMSOR** :- Initialisation des coefficients de viscosité dynamique.

**OUTPUT** :- Transfert des résultats dans les fichiers de sorties.

**SETUP(1)** :- Calcul des quantités géométriques.

- Initialisation des caractéristiques de l'écoulement.

**SETUP(2)** :- Calcul des coefficients des équations pour les différentes variables.

**DIFFLOW** :- Calcul des valeurs de  $A$  ( $|R_e|$ ), en utilisant le schéma convenable.

**SOLVE** :- Résolution des équations algébriques.

L'organigramme de fonctionnement du programme est décrit ci-dessous, **Fig.(B-2)** :

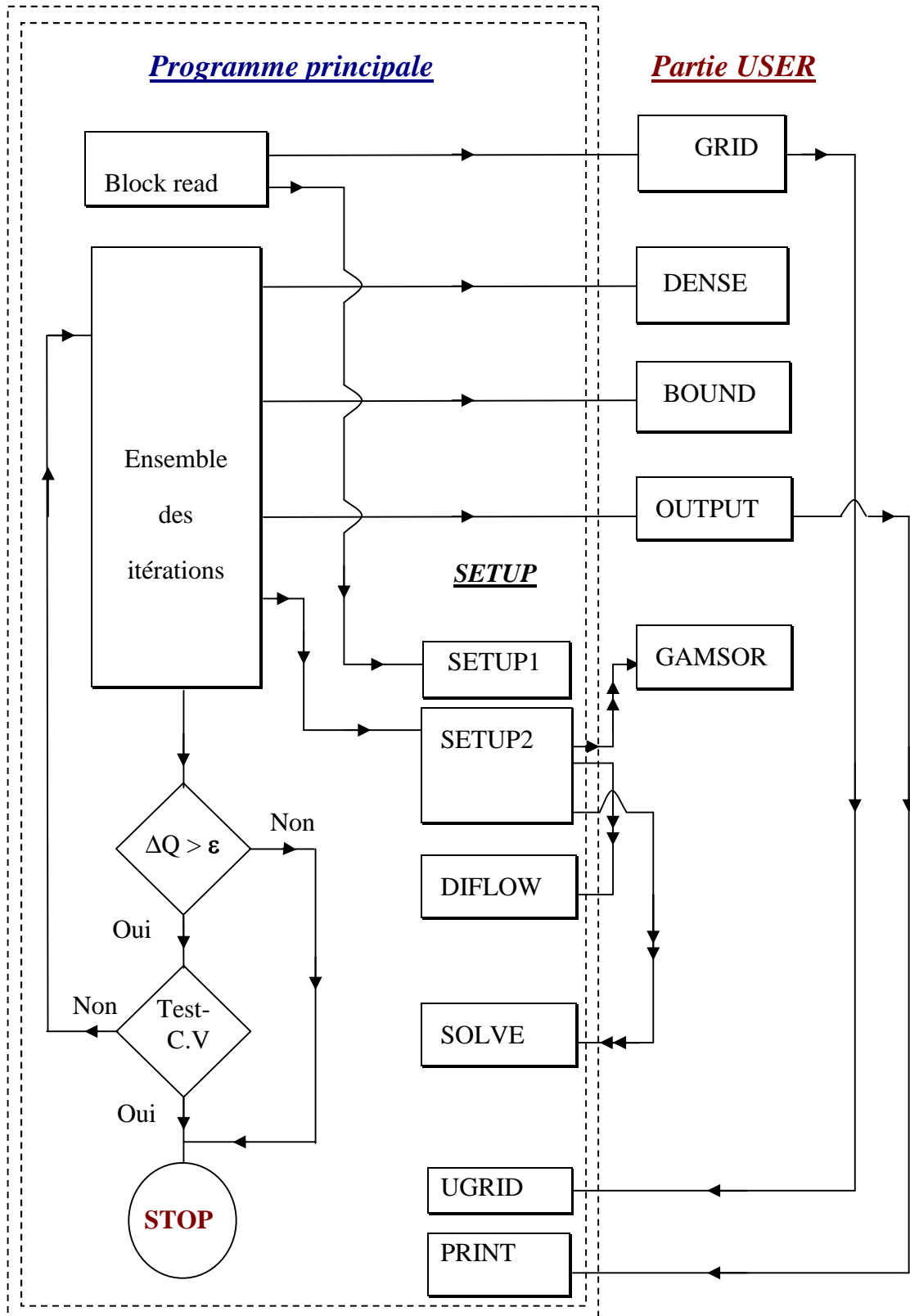


Fig.(B-2) : Organigramme de simulation de l'écoulement -S1-.

**Remarque**

Le pas est calculé, d'après [25], par :

$$Pas = \frac{corde}{sigma}$$

		$u_e=4.274 \text{ m/s}$		$u_e=17.097 \text{ m/s}$	
Rayon (m)	Pas (m)	$R_e$	$q \text{ (m}^2\text{/s)}$	$R_e$	$q \text{ (m}^2\text{/s)}$
$R_i=0.0727$	0.1129	54217	0.4825	216869	1.9301
$R_m=0.1110$	0.1738	83463	0.4728	333852	2.9712
$R_s=0.1517$	0.2378	114197	1.0164	456790	4.0654

$q$  : est le débit par unité de profondeur.

**B.3- INITIALISATION**

Sélection des données suivant que l'on est à la première itération.

**B.4- SORTIES**

Les résultats sont stockés dans des fichiers formatés pour la visualisation du champ de vitesses, des isobares, du champ de pression et les lignes de courant en utilisant les logiciels "Surfer", "Grapher" et "Tecplot".