

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BATNA

INSTITUT DE MECANIQUE

THESE

PRESENTEE POUR OBTENIR LE DIPLOME DE

MAGISTERE

DE

L'UNIVERSITE DE BATNA

Spécialité : MECANIQUE

(Option: Construction Mécanique)

PAR

Djemoui MOHAMDI

**ETUDE D'UN PALIER HYDRODYNAMIQUE
CYLINDRIQUE LISSE EN REGIME LAMINAIRE
PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS**

Soutenue le 1998, devant le jury d'examen :

MM.	A. CHARIF, Professeur, Université de Batna	Président
	C. ABELHAMID, Chargé de Cours, Université de Batna	Examineur
	T. OUTTAS, Maître Assistant, Université de Batna	Rapporteur
	L. MESSAOUDI, Maître Assistant, Université de Batna	Rapporteur
	B. BARKAT, Maître Assistant, Université de Biskra	Invité

INTRODUCTION

Afin de réduire le frottement entre deux surfaces en mouvement relatif il est intéressant de les séparer par un film fluide lubrifiant. Celui-ci peut être un liquide ou un gaz.

La portance nécessaire pour séparer les deux surfaces peut être créée:

- Soit par le mouvement relatif des surfaces formant un espace convergent (portance hydrodynamique).
- Soit par une source de pression extérieure au mécanisme (portance hydrostatique).

Quel que soit le phénomène mis en jeu, l'épaisseur minimale du film doit être plus grande que la hauteur des aspérités des surfaces, si non on est en présence de lubrification mixte.

La détermination des caractéristiques de fonctionnement des paliers hydrodynamiques pour un cahier des charges donné est une opération délicate. Il intervient en effet un nombre important de paramètres tant géométriques, dynamiques que physiques. En particulier la viscosité du fluide joue un rôle déterminant car elle varie considérablement avec la température et la pression. Par ailleurs le régime d'écoulement laminaire ou turbulent, caractérisé par le nombre de Reynolds, est aussi à prendre en considération.

Nous limiterons notre étude à la lubrification isotherme (viscosité uniforme à l'intérieur du film) en régime laminaire. Nous nous appliquerons à dégager les principes qui régissent les phénomènes de lubrification hydrodynamique.

L'étude de la lubrification s'insère dans ce qu'il est convenu d'appeler la mécanique des films minces visqueux. La détermination de la pression au sein du film, facteur essentiel de la portance, est fondée sur la résolution de l'équation mise au point par Osborne Reynolds.

Dans le premier chapitre de cette étude, nous présentons une étude bibliographique résumant les principales et les travaux les plus significatifs sur lesquels sont basées les hypothèses et les définitions que nous avons adoptées.

Le second chapitre, présente des informations sur la lubrification hydrodynamique et l'hypothèse des films minces visqueux qui nous permettent de déduire l'équation de la mécanique des films minces visqueux qui s'appelle équation de Reynolds.

Aux chapitre trois, nous développons une approche semi-analytique du calcul des caractéristiques statiques et dynamiques pour:

- un palier lisse de longueur infiniment long, en régime laminaire, avec différentes conditions aux limites.

- un palier lisse de longueur infiniment petit ($L/D=0$), en régime laminaire.

Dans tous ces cas nous supposons que le fluide est incompressible. Nous établissons des relations assez simple pour le calcul des coefficients dynamiques.

Dans le chapitre quatre nous allons exposer une méthode de résolution de l'équation de Reynolds permettant d'obtenir les caractéristiques statiques et dynamique d'un palier lisse de longueur finie.

Enfin dans le chapitre cinq, nous présentons les résultats obtenus.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

L'histoire de la lubrification est très représentative de l'évolution d'une technique vers une discipline scientifique. Les premiers écrits recensés en bibliothèque sont ceux de VON PAULI, il déterminait l'importance de la nature des matériaux constituant les paliers, la finalité était de limiter l'énergie dissipée. Les faibles vitesses linéaires des surfaces en regard ne permettaient pas d'espérer un film hydrodynamique, la lubrification était du type mixte c'est-à-dire que le film fluide séparant les deux surfaces était discontinu, il existait des zones où les deux solides étaient en contact, d'où le bien fondé de ces travaux.

Dans une seconde étape de cette évolution Hirn étudia l'influence du fluide lubrifiant donc déjà les contemporains comprenaient l'importance du rôle, du troisième corps et du coefficient de viscosité dynamique qui lui est associé.

Dans ces deux étapes nous voyons apparaître les trois corps précédemment cités, il s'agit de technique de recherche de solutions permettant de limiter l'énergie dissipée au contact de deux corps glissant l'un sur l'autre.

Enfin il faut attendre l'expérience accidentelle de Beauchamp de Tower, les travaux de Rayleigh qui suivirent et la mise en place d'une théorie par Reynolds pour que s'impose la notion de force portante qui existe dans les films hydrodynamiques.

Dans le cas des paliers, on a un déplacement de deux surfaces cylindriques. On peut toujours assimiler ses surfaces à une succession de surfaces planes élémentaires d'orientation variables; l'assimilation est d'autant plus licite, dans le cas qui nous intéresse, que l'équation de Reynolds ne postule pas que les surfaces planes.

L'avantage principal d'un palier hydrodynamique c'est qu'on a pas besoin d'un système d'alimentation, cela démunie le coût et l'encombrement.

Par contre les inconvénients de ses paliers sont:

- les deux surfaces ne sont pas toujours séparées par un film lubrifiant;

- une petite raideur si la vitesse est faible;
- une existence de concentration de pression, la pression n'est pas distribuée sur une grande surface.

Sommerfeld en 1904 a résolu cette équation en négligeant l'écoulement axial (hypothèse du palier long). Une autre solution unidimensionnelle, moins satisfaisante du point de vue analytique mais plus représentative du point de vue physique, cas où la longueur du palier est très faible devant son diamètre (hypothèse du palier court), a été proposé pour la première fois en 1929 par Michell puis a été reprise et développée en 1953 par Oc Virk et Dubois. Pour les paliers de longueur finie, différentes méthodes de calcul ont été proposées. En 1980 Rohde et Li ont proposé une approche qui permet de réduire l'équation de Reynolds à une équation différentielle du second ordre en x . Utilisant le fait que la répartition de pression dans la direction axiale est parabolique dans le cas du palier court et reste encore quasi parabolique dans le cas du palier de longueur finie, ils posent:

$$P(\theta, Z) = f(\theta) \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{Z}{L} \right)^2 \right]$$

et reportent cette relation dans la fonctionnelle associée à l'équation de Reynolds. Cette approche donne d'excellents résultats dans le cas des paliers circulaires.

Si l'on souhaite une plus grande précision ou si la géométrie ne permet pas de faire l'hypothèse d'une pression parabolique, il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques. La plus simple est la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis est employée.

Le calcul des coefficients dynamiques peut être traité par une différentiation numérique, méthode la plus couramment utilisée car simple à mettre en oeuvre, ou à partir d'une méthode de perturbation. La méthode de perturbation entraîne des calculs analytiques supplémentaires mais elle permet de déterminer les coefficients dynamiques du palier sans avoir à se fixer des valeurs pour les incréments de déplacement et de vitesse.

LES FORCES D'INERTIE DANS LES PALIERS EN REGIME LAMINAIRE

II.1-Ordre de grandeur des forces d'inertie dans le film

L'équation de la mécanique des films minces visqueux en régime laminaire, ou l'équation de Reynolds, est déduite des équations de la mécanique des milieux continus écrites pour un fluide Newtonien en tenant compte de la forme particulière des écoulements étudiés en lubrification pour lesquels l'épaisseur du film est très faible devant sa longueur et sa largeur. On montre [1,2,3] que dans un palier le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité est donné par le nombre sans dimension:

$$\frac{\rho V C}{\mu} \frac{C}{R} = \Re \frac{C}{R}$$

où ρ et μ sont respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide, R et C le rayon et le jeu radial et V la vitesse linéaire de l'axe en rotation. $\Re = \rho V C / \mu$: Le groupement est le nombre de Reynolds moyen du palier et C/R le jeu relatif, est de l'ordre de 10^{-3} . Lorsque ce nombre est de l'ordre de 1 les forces d'inertie dans le film sont du même ordre que les forces de viscosité et de pression. Remarquons que pour les paliers, cette valeur correspond à un nombre de Reynolds compris entre 300 et 1000.

II.2-Effet des forces d'inertie sur les caractéristiques du palier

Différentes études [3,4,5], tant théoriques qu'expérimentales, ont été effectuées afin de préciser l'effet des forces d'inertie sur les caractéristiques de fonctionnement des mécanismes étudiés en lubrification et particulièrement sur la valeur de la pression dans le film lubrifiant d'un palier.

Les résultats obtenus par DI PRIMA et STUART [4] en négligeant d'une part et d'autre part en tenant compte des forces d'inertie montrent que lorsque l'épaisseur du film est très petite, les forces d'inertie ne modifient particulièrement pas les champs des vitesses et de pression dans le fluide.

LE REGIME DES TOURBILLONS DE TAYLOR

Structure de l'écoulement

Les tourbillons de Taylor forment des tores régulièrement superposés suivant la direction des génératrices de l'arbre et du coussinet. L'apparition de ces tourbillons est liée aux forces d'inertie engendrées par la rotation de l'arbre. Ces instabilités se développent lorsque, à l'intérieur du film, les forces centripètes ne sont plus équilibrées par les forces de viscosité et de pression. En fait, la nature et la forme de ces tourbillons sont dues aux forces d'accélération de Coriolis qui existent à l'intérieur du fluide.

Dans un palier, en raison de la faible valeur du jeu radial, l'écoulement comprend un grand nombre de tourbillons superposés, qui sont plus ou moins déformés car l'arbre est excentré par rapport au coussinet sous l'application de la charge. On montre récemment [6,7] que ces tourbillons se développaient d'abord dans la zone où le jeu est maximal et qu'ils n'existaient pas forcément sur toute la circonférence des cylindres.

Transition entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor

Pour définir les critères de transition qui marquent la fin du régime laminaire, il faut considérer deux cas:

- le palier est non chargé, c'est l'écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux.
- le palier chargé, les cylindres sont excentrés.

Palier non chargé

Depuis les travaux de Taylor, on sait que, pour deux cylindres coaxiaux, [8] les tourbillons se développent dans le film lorsque le nombre de Taylor défini par:

atteint la valeur de 41.2. Cette valeur donne dans le cas du palier non chargé la transitions entre le régime laminaire et le régime des tourbillons de Taylor.

Palier chargé

Dans le cas du palier chargé, on remarque que le nombre de Taylor critique varie avec l'excentricité relative. Plusieurs études théoriques ont été proposées récemment, en supposant le rapport C/R faible, le cylindre extérieur immobile et la longueur des cylindres infinis:

- Dans la première DI PRIMA [9] a calculé, pour un écoulement entre deux cylindres coaxiaux, la valeur du nombre de Taylor critique en superposant au champ de vitesse créé par la rotation du cylindre intérieur, le champ de vitesse dû à un gradient de pression ; ce gradient de pression étant celui calculé en chaque point et pour chaque excentricité du palier infiniment long en régime laminaire. Il obtient ainsi un nombre de Taylor critique qui varie avec l'excentricité relative mais qui dépend aussi du point de considéré dans le palier.

- En 1968, RITCHIE [10] considère le cas réel du palier excentré et pour faciliter les calculs utilise les coordonnées bipolaires. Il détermine ainsi la

valeur du nombre de Taylor critique en fonction de l'excentricité relative. Les résultats obtenus dépendent de la forme des perturbations initiales. Dans cette première série d'étude, les auteurs utilisent la notion de «stabilité locale» qui permet de négliger la composante radiale de la vitesse moyenne du fluide. Ils montrent également que les tourbillons apparaissent d'abord là où le jeu est maximum.

- En 1972, DI PRIMA et STUART [11] développent une théorie de «stabilité non locale» ou «stabilité globale» qui tient compte de la composante radiale de la vitesse moyenne du fluide. Ils montrent, en utilisant la théorie linéaire et les coordonnées bipolaires, que lorsque le cylindre extérieur est immobile la valeur du nombre de Taylor critique croît régulièrement avec l'excentricité relative. Par ailleurs, la zone de plus forte intensité tourbillonnaire est située à 90° en aval du point où le jeu est maximum. Très récemment, DI PRIMA et STUART ont développé cette étude pour des excentricités relatives inférieures à 0.5 en utilisant la théorie non linéaire. Ils expriment les perturbations de vitesse sous forme d'un développement en série de l'excentricité relative. Ils calculent ainsi la force et le couple de frottement et montrent que la zone de plus fortes intensité tourbillonnaire n'est plus située à 90° en aval du point où le jeu est maximum, mais dans l'intervalle compris entre 0 et 90° . La position de cette zone de plus forte intensité est à la fois fonction du jeu relatif C/R et de l'excentricité relative ε .

Caractéristiques de fonctionnement du palier

Il n'existe pas de théorie complète qui permette de calculer les caractéristiques de fonctionnement d'un palier lisse en régime de tourbillon de Taylor. Cependant, DI PRIMA et STUART, à partir de l'étude sur la stabilité de l'écoulement entre deux cylindres excentrés, ont calculé des coefficients qui permettent de connaître la charge et le couple de frottement d'un palier long fonctionnant à faible excentricités et juste au delà de la transition qui marque la fin du régime laminaire. Par ailleurs COSTANTINESCU, PAN et HSING[15] ont proposé une méthode empirique basée sur la théorie applicable en régime turbulent. Cette méthode [16] permet de calculer les caractéristiques d'un palier fonctionnant en régime des tourbillons de Taylor.

IV -Le régime turbulent

La turbulence est un phénomène aléatoire; toutes les grandeurs physiques qui caractérisent l'écoulement présentent des fluctuations qui, si

l'écoulement est stationnaire, se situent autour d'une valeur moyenne. Dans un palier en régime turbulent, subsiste encore des traces de la structure des tourbillons de Taylor.

IV-1- Transition entre le régime des tourbillons de Taylor et le régime turbulent

PAN et VOHR [5] ont présenté un schéma qui caractérise les différentes zones de fonctionnement d'un palier lisse non chargé. Ils ont posé, par analogie avec l'apparition de la turbulence dans les écoulements en conduite que le régime turbulent s'établit lorsque le nombre de Reynolds moyen de l'écoulement est compris entre 1000 et 2000. Cette hypothèse suppose négligeable l'influence des forces d'inertie dues à la courbure du film or, ces forces d'inertie sont dans un palier suffisamment importantes pour créer les tourbillons de Taylor et modifier, Avant la naissance de la turbulence, la structure de l'écoulement. On doit donc admettre que ces tourbillons vont avoir une influence sur l'apparition du régime turbulent qui ne serait pas seulement fonction du nombre de Reynolds, mais aussi du rapport C/R. Les mesures qui sont effectuées [17] ont montré que l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux de rayons très voisins ($C/R=0.0024$) pouvait être considéré comme entièrement turbulent lorsque le nombre de Taylor de l'écoulement est égal à deux fois la valeur du nombre de Taylor critique T_c qui marque la fin du régime laminaire.

IV-2- Théorie des paliers en régime turbulent

Plusieurs méthodes essentiellement empiriques ont été proposées pour le calcul des paliers en régime turbulent. Nous nous bornerons à citer les études remarquables de CONSTANTINESCU et de NG.PAN et ELROD [18 à 21]. Dans le cas des films minces visqueux, la valeur du gradient de pression est donnée par:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}$$

où p est la pression et τ_{xy} et τ_{zy} les contraintes totales de cisaillement dans le film.

En régime turbulent, il n'existe pas de relations exactes qui permettent comme en régime laminaire, de lier les contraintes de cisaillement au gradient de vitesse; les valeurs de τ_{xy} et τ_{zy} seront donc obtenues à partir de relations empiriques. En 1959, CONSTANTINESCU [18] a utilisé pour caractériser les

contraintes totales de cisaillement les lois de longueur de mélange de PRANDTL, il obtient ainsi les fonctions de vitesse dans le film. En linéarisant ces relations et en les reportant dans l'équation de continuité, il peut écrire une équation de la même forme que l'équation de Reynolds.

En 1965, NG et PAN [19] définissent les contraintes totales de cisaillement à partir des lois universelles de variation de vitesse moyenne au voisinage d'une paroi; ils déterminent ainsi les fonctions de vitesse dans le film. Ces fonctions reportées dans l'équation de continuité permettent d'écrire la relation:

où G_x et G_z sont des fonctions qui ne dépendent pas seulement du nombre de Reynolds local, mais aussi du gradient de pression. Il est à remarquer que l'équation de CONSTANTINESCU et l'équation de NG et PAN ont une forme identique, seule la valeur donnée aux fonctions k_x et k_z , G_x et G_z est différente. En 1970, CONSTANTINESCU, PAN, SMALLEY et VOHR [21] proposent pour ces différentes fonctions les valeurs empiriques suivantes:

A partir de ces relations, il est possible de calculer la pression dans le film et la charge que peut supporter un palier en régime turbulent. Pour le calcul du couple de frottement CONSTANTINESCU [22] propose d'utiliser pour la contrainte à la paroi l'expression suivante:

Par ailleurs le débit est calculé à partir des débits élémentaires q_x et q_z à travers les sections de hauteur h et de largeur unité qui s'expriment par les relations:

IV-3-Calcul d'un palier en régime transition

IV-4- Effets thermiques en regime non laminaire

Le calcul des caractéristiques d'un palier fonctionnant en régime turbulent, compte tenu des effets thermiques dans le film, a été abordé récemment [22,27,28]. La solution ne peut être obtenue que grâce à de nombreuses hypothèses qui restreignent considérablement sa généralité. HUEBNER [29] constate que les effets thermiques ont une importance plus faible en régime turbulent qu'en régime laminaire et que ces effets peuvent être bénéfiques en régime turbulent car dans certains cas ils ont tendance à augmenter la capacité de charge du palier. En effet, la diminution de la

viscosité cinématique du fluide due à l'élévation de la température, augmente l'intensité de la turbulence car le nombre de Reynolds est inversement proportionnel à cette viscosité. Ainsi, en régime turbulent la viscosité apparente du fluide est peu modifiée lorsque la température augmente.

Les résultats expérimentaux obtenus par différents chercheurs sur des paliers [29,30,31] montrent que le changement de régime dans le film se traduit par une augmentation importante du couple de frottement et de l'énergie dissipée dans le contact. Cependant, ce changement de régime a un effet bénéfique sur la température maximale du grain mobile du palier. On constate ainsi que cette température diminue sensiblement après le changement de régime.

CHAPITRE II

LUBRIFICATION

HYDRODYNAMIQUE

II.1- INTRODUCTION

La lubrification est un chapitre de la tribologie, elle s'intéresse aux contacts pour lesquels un film de fluide visqueux est intercalé entre les surfaces en présence. Ce fluide peut être un liquide, pratiquement incompressible; tel que l'huile, l'eau ou même un métal fondu; il peut être aussi un gaz compressible. Le plus souvent de l'air dont la masse volumique varie très sensiblement avec la pression .

Par ailleurs ce film de fluide peut séparer totalement les surfaces du contact, ce qui suppose que les aspérités et les défauts de forme des surfaces aient des dimensions inférieures à l'épaisseur du film. Dans le cas contraire, il y aura par endroits contact entre les deux surfaces .

La formation et le maintien d'un film de fluide impose l'existence d'une pression dans ce film afin d'équilibrer la charge appliquée entre les deux surfaces du mécanisme. Cette pression peut être créée par un système extérieur au contact, une pompe ou un compresseur par exemple c'est le cas des glissières de machines-outils et de certains paliers. On conviendra d'appeler ce type de lubrification, la lubrification hydrostatique . Cette pression peut aussi être générée par le déplacement relatif des surfaces; c'est le cas des butées et des paliers fluides. On parlera alors de lubrification hydrodynamique. Dans ce dernier cas, la génération de pression peut être dûe aux phénomènes d'entraînement ou coin d'huile, à l'effet d'écrasement lorsque les surfaces se rapprochent et à celui d'étirement lorsque ces mêmes surfaces se déforment dans la direction du mouvement.

Dans tous les mécanismes étudiés en lubrification, il faut généralement déterminer les paramètres suivants :

- la charge que peut supporter le contact,
- le débit de fluide nécessaire au fonctionnement du mécanisme,
- la force ou le couple de frottement,
- l'énergie dissipée dans le mécanisme,
- la température maximale dans le contact.

II.2-EQUATION GENERALISEE DE LA MICANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX

Les équations générales de la lubrification hydrodynamique pour un fluide newtonien prennent différentes formes selon les hypothèses effectuées. Dans ce cas, au risque de compliquer la présentation, nous démontrons la forme la plus générale de ces équations. Puis à la suite d'hypothèses plus restrictives, nous en déduisons des formes simplifiées spécifiques à l'étude de problèmes particuliers en lubrification.

Les équations générales de la mécanique des films minces visqueux permettent, compte tenu des conditions géométriques et cinématiques, de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince et en particulier sa portance. Elles sont déduites des équations de la mécanique des milieux continus, appliquées à un fluide newtonien et qui peuvent s'écrire sous la forme suivante :

- Loi de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i) = 0 \quad [\text{II-1}]$$

- Loi fondamentale de la dynamique :

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad [\text{II-2}]$$

- Loi de comportement rhéologique qui pour un fluide newtonien s'écrit

:

$$\sigma_{ij} = (-P + \lambda \theta) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad [\text{II-3}]$$

- Loi de conservation de l'énergie pour un fluide newtonien:

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = \alpha T \frac{dP}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \lambda \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right)^2 + \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad [\text{II-4}]$$

Dans ces expressions x_i et t sont les variables d'espace et de temps, U_i les composantes de la vitesse, ρ la masse volumique du fluide, F_i les forces massiques extérieures, σ_{ij} le tenseur des contraintes, k le coefficient de conductibilité thermique du fluide, T sa température, P la pression, ε_{ij} le tenseur des déformations, θ le taux de dilatation cubique $\theta = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$, δ_{ij} le symbole de Kronicker et où λ et μ , coefficients de Navier, sont des fonctions de l'espace et du temps, C_p est la chaleur massique à pression constante et $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)$ est le coefficient de dilatation calorimétrique à pression constante.

En reportant l'équation de comportement rhéologique (II-3) dans l'équation de la dynamique (II-2) et en négligeant les forces massiques extérieures, on obtient les équations de Navier en écoulement laminaire qui s'écrivent :

$$\rho \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \mu}{\partial x_j}$$

[II-5]

5]

En mécanique des films minces visqueux, la dimension suivant l'épaisseur du film (O, \vec{x}_2) est très faible par rapport aux deux autres. Pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation (II-5), nous pouvons adimensionnaliser les variables de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{L} \quad , \quad \bar{x}_2 = \frac{x_2}{H} \quad , \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{L} \quad , \quad \bar{t} = \frac{tV}{L} \\ \bar{U}_1 &= \frac{U_1}{V} \quad , \quad \bar{U}_2 = \frac{U_2 L}{VH} \quad , \quad \bar{U}_3 = \frac{U_3}{V} \\ \bar{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} \quad , \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0} \end{aligned}$$

Dans ces expressions L et V sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristique selon les axes (O, \vec{x}_1) et (O, \vec{x}_3), H et VH/L celles suivant (O, \vec{x}_2), L/V , μ_0 et λ_0 définissent l'ordre de grandeur du temps et des coefficients de Navier. Nous supposons que ces deux coefficients sont du même ordre de grandeur. Ce changement de variable conduit à poser:

$$\bar{P} = P \frac{H^2}{\mu_0 VL}$$

Remarquons que la vitesse caractéristique V peut être définie de plusieurs façons; en hydrodynamique, V sera la vitesse d'une des parois du contact. Si les parois du contact sont immobiles, le contact est hydrostatique, on définit alors la pression sans dimension par $\bar{P} = P/P_s$ où P_s est par exemple la pression d'alimentation et la vitesse caractéristique est :

$$V = \frac{P_s H^2}{\mu_0 L}$$

Compte tenu de ces changements de variables l'équation (II-5) devient:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_1} &= \varepsilon \left[-\Re \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \left(\bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\mu}_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_3^2} \right) \right] + \\
&+ \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_2^2} + \varepsilon^2 \left[\frac{\lambda_0}{\bar{\mu}_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial \bar{x}_1} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1} \right) \\
\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_2} &= \varepsilon^2 \left\{ \varepsilon \left[-\Re \left(\frac{\partial \bar{U}_2}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_3^2} \right) \right] + \left(\bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\mu}_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \right. \\
&+ \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\lambda_0}{\bar{\mu}_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_1} \right) + \\
&\left. + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \left(\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial \bar{x}_3} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_3} \right) \right\} \\
\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_3} &= \varepsilon \left[-\Re \left(\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \left(\bar{\mu} + \bar{\lambda} \frac{\bar{\lambda}_0}{\bar{\mu}_0} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{x}_3} \left(\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_j} \right) + \varepsilon \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \bar{U}_3}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}_3}{\partial \bar{x}_3^2} \right) \right] + \\
&+ \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{U}_3}{\partial \bar{x}_3^2} + \varepsilon^2 \left[\frac{\lambda_0}{\bar{\mu}_0} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial \bar{x}_j} + 2 \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial \bar{x}_3} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_1} \left(\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial \bar{x}_3} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \left(\frac{\partial \bar{U}_3}{\partial \bar{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \bar{x}_3} \right)
\end{aligned}$$

où $\Re = \rho_0 \frac{VH}{\mu_0}$ est le nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur de l'écoulement et où $\varepsilon = H/L$, paramètre d'échelle, est en mécanique des films minces visqueux de l'ordre de 10^{-3} . En négligeant les termes multipliés soit par ε^2 , soit par $\varepsilon^3 \Re$ il reste :

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_i} &= -\varepsilon \Re \left[\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_j} \right] + \bar{\mu} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial \bar{x}_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{x}_2} \quad (i=1 \text{ et } 3) \\
\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}_2} &= 0
\end{aligned} \right\} \quad [\text{II-7}]$$

Les termes en $\varepsilon \Re$, ou termes d'inertie, de l'équation (II-7) seront négligeables devant les termes de viscosité quand $\varepsilon \Re \ll 1$; ce qui est vérifié dans la plupart des écoulements rencontrés en lubrification.

Si par hypothèse on néglige les forces d'inerties il vient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} &= \mu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial x_2} \quad (i=1 \text{ et } 3) \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-8}]$$

et on revenant aux variables dimensionnées :

$$9) \left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-9}]$$

Ces équations auxquelles s'ajoutent l'équation de conservation de la masse (II.1) et l'équation de conservation de l'énergie (II.4) permettent formellement de connaître, compte tenu des conditions aux limites après intégration, le champ de vitesse, la pression et les contraintes de cisaillement dans le film .

Pour intégrer les équations (II-9) il faut connaître les conditions aux limites sur la vitesse (figure II-1). Si on suppose qu'il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact. Ces conditions peuvent s'écrire :

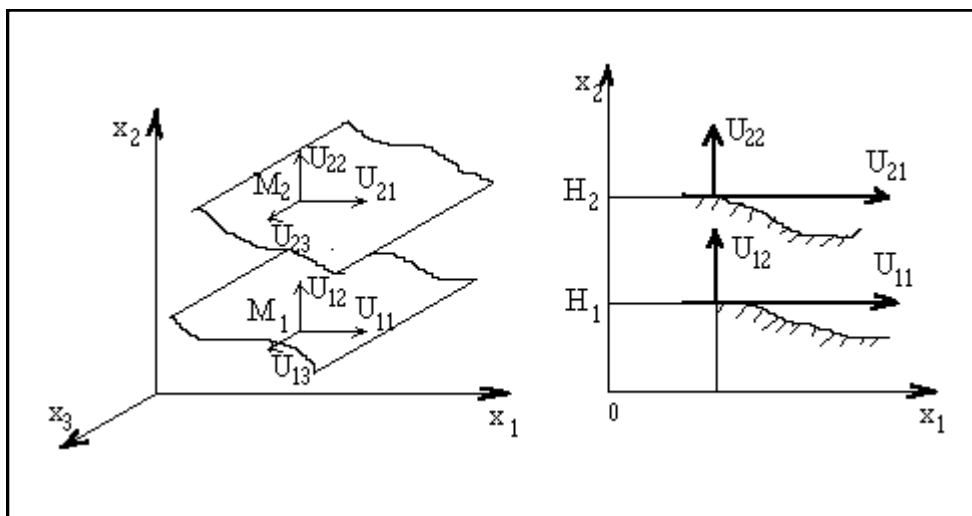


Fig.(II-1) Condition aux limites sur les vitesses

$$\begin{aligned} U_1 = U_{11} \quad , \quad U_2 = U_{12} \quad , \quad U_3 = U_{13} \quad \text{pour} \quad x_2 = H_1(x_1, x_3, t) \\ U_1 = U_{21} \quad , \quad U_2 = U_{22} \quad , \quad U_3 = U_{23} \quad \text{pour} \quad x_2 = H_2(x_1, x_3, t) \end{aligned} \quad [\text{II-10}]$$

Le choix d'un système d'axes tel que l'épaisseur du film soit toujours mesurée selon (O, \vec{x}_2) impose pour certains contacts, le palier cylindrique par exemple, de négliger la courbure générale du film .

si on pose :

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_{H_1}^{x_2} \frac{\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} d\xi \\ J &= \int_{H_1}^{x_2} \frac{d\xi}{\mu(x_1, \xi, x_3, t)} \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-11}]$$

où ξ est une variable d'intégration ; on a :

$$\begin{aligned} \text{pour} \quad x_2 = H_1 \quad I = J = 0 \\ \text{pour} \quad x_2 = H_2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{x_2}{\mu(x_1, t)} dx_2 \\ J &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{dx_2}{\mu(x_1, t)} \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-12}]$$

Les vitesses s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial P}{\partial x_1} \left(I - \frac{J I_2}{J_2} \right) + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} J + U_{11} \\ U_2 &= \frac{\partial P}{\partial x_3} \left(I - \frac{J I_2}{J_2} \right) + \frac{U_{23} - U_{13}}{J_2} J + U_{13} \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-13}]$$

L'équation (II-1) de conservation de la masse s'écrit, après intégration à travers l'épaisseur du film :

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho U_j}{\partial x_j} dx_2 + \int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx_2 = 0 \quad [\text{II-14}]$$

On peut intervertir les signes dérivées et intégrales en remarquant que :

$$\int_{H_1(x_1, x_3, t)}^{H_2(x_1, x_3, t)} \frac{\partial F(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_i} dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{H_1}^{H_2} F dx_2 - F(x_1, H_2, x_3, t) \frac{\partial H_2}{\partial x_i} + F(x_1, H_2, x_3, t) \frac{\partial H_1}{\partial x_i} \quad [\text{II-15}]$$

par ailleurs

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial \rho U_2}{\partial x_2} dx_2 = \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12} \quad [\text{II-16}]$$

où ρ_1 et ρ_2 sont respectivement les valeurs de la masse volumique du fluide sur les parois 1 et 2.

Compte tenu des équations (II-10) à (II-16), il vient :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{H_1}^{H_2} \rho U_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{H_1}^{H_2} \rho U_3 dx_2 - \rho_2 U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \rho_2 U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \rho_1 U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \\ & + \rho_1 U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_1}^{H_2} \rho dx_2 - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad [\text{II-17}]$$

Les deux premiers termes peuvent être explicités grâce aux relations (II-10) en intégrant par partie et on posant:

$$\left. \begin{aligned} R &= \int_{H_1}^{x_2} \rho(x_1, \xi, x_3, t) d\xi \\ F &= \frac{1}{J_2} \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} dx_2 \\ G &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{R}{\mu} \left(x_2 - \frac{I_2}{J_2} \right) dx_2 = \int_{H_1}^{H_2} \frac{R x_2}{\mu} dx_2 - I_2 F \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-18}]$$

Il vient alors :

$$\left. \begin{aligned} \int_{H_1}^{H_2} \rho U_1 dx_2 &= R_2 U_{21} - \frac{\partial P}{\partial x_1} G - (U_{21} - U_{11}) F \\ \int_{H_1}^{H_2} \rho U_3 dx_2 &= R_2 U_{23} - \frac{\partial P}{\partial x_3} G - (U_{23} - U_{13}) F \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-19}]$$

où R_2 est la valeur que prend la fonction R à la paroi 2. En regroupant les différents termes on obtient l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \rho_2 U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + \\ + \rho_1 U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} [U_{23}(R_2 - F) + U_{13}F] - \rho_2 U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \rho_1 U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + \\ + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} + \rho_2 U_{22} - \rho_1 U_{12} \end{aligned} \quad [\text{II-20}]$$

Les contraintes de cisaillement se réduisent à :

$$\sigma_{12} = \mu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \quad \text{et} \quad \sigma_{23} = \mu \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \quad [\text{II-21}]$$

Soit, en tenant compte des relations (II-13)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12} &= \left(x_2 - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{U_{21} - U_{11}}{J_2} \\ \sigma_{32} &= \left(x_2 - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial x_3} + \frac{U_{23} - U_{13}}{J_2} \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-22}]$$

II.3- INTERPRETATION PHYSIQUE

Cette équation est de la forme la plus générale de l'équation de Reynolds. Pour l'obtenir il a été nécessaire de supposer que:

- le milieu est continu,
- le fluide est newtonien,
- l'écoulement est laminaire,
- les forces massique extérieures sont négligeables,
- les forces d'inertie sont négligeables,
- il n y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact,
- la courbure générale du contact est négligée,
- l'épaisseur du film mesurée dans la direction x_2 est toujours très faible devant

les autres dimensions du contact; c'est l'hypothèse de base de la lubrification.

Dans cette équation :

- Le terme :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} [U_{21}(R_2 - F) + U_{11}F] - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_1} \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction x_1 pour une section de dimension H_2-H_1 suivant x_2 et unité suivant x_3 .

- Le terme :

$$\frac{\partial}{\partial x_3} [U_{23}(R_2 - F) + U_{13}F] - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_3} \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction x_3 pour une section de dimension H_2-H_1 suivant x_2 et unité suivant x_1 .

Dans les deux expressions ci-dessus le premier terme correspond au débit dû au déplacement des parois (écoulement de Couette). Le second terme correspond au débit dû au gradient de pression (écoulement de Poiseuille).

- Le terme :

$$\rho_1 \left(U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - U_{12} \right) - \rho_2 \left(U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - U_{22} \right)$$

représente la variation du débit massique dans la direction x_2 pour une section unité. Les trois premiers termes de cette expression caractérisent respectivement l'effet de l'inclinaison dans la direction x_1 , de l'inclinaison dans la direction x_3 et de la vitesse dans la direction x_2 de la surface s_1 ; les trois autres l'effet de la surface s_2 .

- Le terme :

$$\frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial H_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial t}$$

caractérise l'effet transitoire dû à la compressibilité du fluide.

L'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée s'applique à différents lubrifiants et différents types de contact. On peut distinguer :

- Le cas du fluide incompressible, pour lequel la masse volumique peut être éliminée de l'équation (II-20).

- Le fluide de viscosité constante; ce qui simplifie l'équation (II-20).

- Le contact hydrostatique; la terminologie étant particulièrement imprécise, nous conviendrons d'appeler contacts hydrostatiques les seuls contacts pour lesquels l'équation (II-20) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(G \frac{\partial P}{\partial x_3} \right) = 0 \quad [\text{II-23}]$$

- Le régime permanent : on définit en mécanique des films minces visqueux le régime permanent comme le régime de fonctionnement tel que dans un repère particulier,

mobile ou non, les paramètres géométriques du contact et les vitesses des parois sont indépendants du temps .

II.4- FORMES PARTICULIERES DE L'EQUATION DE LA MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX GENERALISEE

II.4.1- EQUATION DE LA MECANIQUE DES FILMS MINCES VISQUEUX

Dans le cas où la température ne varie pas selon l'épaisseur du film et si l'on suppose comme c'est généralement le cas, que la viscosité et la masse volumique du fluide ne sont fonction que de la température et de la pression on peut écrire :

$$dT/dx_2 = 0$$

avec:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu(T,P) & \text{et} & & \rho &= \rho(T,P) \\ T &= T(x_1, x_3, t) & \text{et} & & P &= P(x_1, x_3, t) \end{aligned}$$

il vient alors:

$$\begin{aligned} \mu &= \mu(x_1, x_3, t) \\ \rho &= \rho(x_1, x_3, t) \end{aligned}$$

L'équation (II-20) se simplifie sensiblement et prend alors le nom de " équation de la mécanique des film minces visqueux " et s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\rho \frac{(H_2 - H_1)^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\rho \frac{(H_2 - H_1)^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_3} \right] &= 6 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\rho (U_{11} + U_{21})(H_2 - H_1) \right] - \\ -12\rho U_{21} \frac{\partial H_2}{\partial x_1} + 12\rho U_{11} \frac{\partial H_1}{\partial x_1} + 6 \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\rho (U_{13} + U_{23})(H_2 - H_1) \right] &- 12\rho U_{23} \frac{\partial H_2}{\partial x_3} + \\ + 12\rho U_{13} \frac{\partial H_1}{\partial x_3} + 12\rho (U_{22} - U_{12}) + 12(H_2 - H_1) \frac{\partial \rho}{\partial t} & \end{aligned}$$

[II-24]

Les vitesses U_1 et U_3 ont pour expression :

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x_1} \left[x_2^2 - x_2(H_1 + H_2) + H_1 H_2 \right] + \frac{U_{11} - U_{21}}{H_1 - H_2} (x_2 - H_1) + U_{11} \\ U_3 &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x_3} \left[x_2^2 - x_2(H_1 + H_2) + H_1 H_2 \right] + \frac{U_{13} - U_{23}}{H_1 - H_2} (x_2 - H_1) + U_{13} \end{aligned} \right\} \quad \text{[II-25]}$$

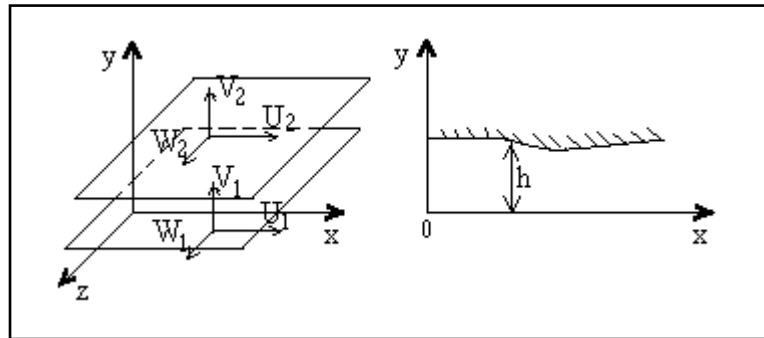
Les contraintes de cisaillement dans le film s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12} &= \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_1} (2x_2 - H_1 - H_2) + \mu \frac{U_{11} - U_{21}}{H_1 - H_2} \\ \sigma_{23} &= \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x_3} (2x_2 - H_1 - H_2) + \mu \frac{U_{13} - U_{23}}{H_1 - H_2} \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-26}]$$

L'équation (II-26) est généralement employée pour étudier l'effet des défauts de forme et des rugosités sur les caractéristiques de fonctionnement d'un mécanisme en régime isotherme. Notons cependant que la viscosité et la masse volumique peuvent varier en fonction de x_1 et x_3 , c'est à dire selon la longueur et la largeur du contact ainsi qu'en fonction du temps.

II.4.2- EQUATION DE REYNOLDS GENERALISEE

Lorsque la vitesse d'une paroi du contact est tangente en tous points à cette paroi (cas fréquent en lubrification), l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisée se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi, on peut poser $H_1 = 0$ et $H_2 = h$ (figure II-2).



Figure(II-2)

Si par ailleurs on utilise les coordonnées cartésiennes xyz , les conditions aux limites sur la vitesse s'écrivent :

- Sur la paroi 1, pour $y = 0$, $U = U_1$, $V = 0$, $W = W_1$
- Sur la paroi 2, pour $y = h$; $U = U_2$, $V = V_2$, $W = W_2$

Remarquons que le choix du système d'axes impose à la vitesse de la paroi 1 dans la direction y d'être identiquement nulle.

Les vitesses U et W du fluide s'écrivent alors:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\partial P}{\partial x} \left(I - \frac{I_2 J}{J_2} \right) + \frac{U_2 - U_1}{J_2} J + U_1 \\ W &= \frac{\partial P}{\partial z} \left(I - \frac{I_2 J}{J_2} \right) + \frac{W_2 - W_1}{J_2} J + W_1 \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-27}]$$

Dans ces relations :

$$\left. \begin{aligned} I &= \int_0^y \frac{\xi}{\mu} d\xi & J &= \int_0^y \frac{d\xi}{\mu} \\ I_2 &= \int_0^h \frac{y}{\mu} dy & J_2 &= \int_0^h \frac{dy}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-28}]$$

des expressions précédentes, on déduit les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \left(y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{U_2 - U_1}{J_2} \\ \sigma_{yz} &= \left(y - \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{W_2 - W_1}{J_2} \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-29}]$$

L'équation (II-20) s'appelle alors équation de Reynolds généralisée, elle s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial P}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [U_2(R_2 - F) + U_1 F] - \rho_2 U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} [W_2(R_2 - F) + W_1 F] - \rho_2 W_2 \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial R_2}{\partial t} - \rho_2 \frac{\partial h}{\partial t} + \rho_2 V_2 \end{aligned} \quad [\text{II-30}]$$

où les fonctions R , F , G et R_2 sont définies par :

$$\left. \begin{aligned} R &= \int_0^y \rho(x, \xi, z, t) d\xi \\ F &= \frac{1}{J_2} \int_0^h \frac{R}{\mu} dy \\ G &= \int_0^h \frac{Ry}{\mu} dy - I_2 F \\ R_2 &= \int_0^h \rho dy \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-31}]$$

Ces relations doivent être utilisées pour l'étude des contacts dans lesquels on tient compte de l'effet thermique. Il faut de plus :

- l'équation de continuité pour calculer la vitesse v dans le fluide,
- l'équation de l'énergie pour calculer la température dans le fluide,
- les relations qui donnent les variations de la masse volumique et de la viscosité avec la température. Dans le cas des liquides, la masse volumique est généralement supposée constante.

Il faut par ailleurs connaître avec précision les conditions aux limites sur la température, ce qui n'est généralement pas le cas .

II.4.3- EQUATION DE REYNOLDS

Très souvent on admet que la masse volumique et la viscosité ne varient pas selon l'épaisseur du film et on place l'origine du système d'axes sur l'une des parois du contact. L'équation (II-20) prend alors une forme simple; c'est l'équation de Reynolds qui s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = & 6\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} + \\ & + 6h \frac{\partial}{\partial x} \{ \rho(U_1 + U_2) \} + 6h \frac{\partial}{\partial z} \{ \rho(W_1 + W_2) \} + 12\rho V_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{[II-32]}$$

Les composantes de la vitesse du fluide U et W dans les directions x et z s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y(y-h) + \frac{h-y}{h} U_1 + \frac{y}{h} U_2 \\ W &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial z} y(y-h) + \frac{h-y}{h} W_1 + \frac{y}{h} W_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{[II-33]}$$

de ces relations, on déduit les contraintes de cisaillement dans le fluide :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xy} &= \mu \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial x} (2y-h) + (U_2 - U_1) \frac{\mu}{h} \\ \sigma_{yz} &= \mu \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} (2y-h) + (W_2 - W_1) \frac{\mu}{h} \end{aligned} \right\} \quad \text{[II-34]}$$

En coordonnées cylindriques; pour une épaisseur de film h mesurée dans la direction oz, l'équation de Reynolds s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho r h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\rho h^3}{\mu r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = & 6r\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial r} + 6\rho(V_1 - V_2) \frac{\partial h}{\partial \theta} + \\ & + 6rh \frac{\partial}{\partial r} \{ \rho(U_1 + U_2) \} + 6h \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \rho(V_1 + V_2) \} + \\ & + 6\rho h(U_1 + U_2) + 12\rho r W_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad \text{[II-35]}$$

Dans cette relation les vitesses U_1, V_1 et U_2, V_2 et W_2 sont respectivement les vitesses des parois 1 et 2 dans les directions r, θ et z . Remarquons que le choix d'un système d'axes lié à la paroi 1 impose que $W_1 = 0$.

Les composantes U et V de la vitesse du fluide s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial r} z(z-h) + \frac{h-z}{h} U_1 + \frac{z}{h} U_2 \\ V &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} z(z-h) + \frac{h-z}{h} V_1 + \frac{z}{h} V_2 \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-36}]$$

on en déduit les contraintes de cisaillement dans le fluide.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rz} &= \mu \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial r} (2z-h) + (U_2 - U_1) \frac{\mu}{h} \\ \sigma_{\theta z} &= \mu \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial \theta} (2z-h) + (V_2 - V_1) \frac{\mu}{h} \end{aligned} \right\} \quad [\text{II-37}]$$

CHAPITRE III

CARACTERISTIQUES STATIQUES

ET DYNAMIQUES

DES PALIERS CIRCULAIRES

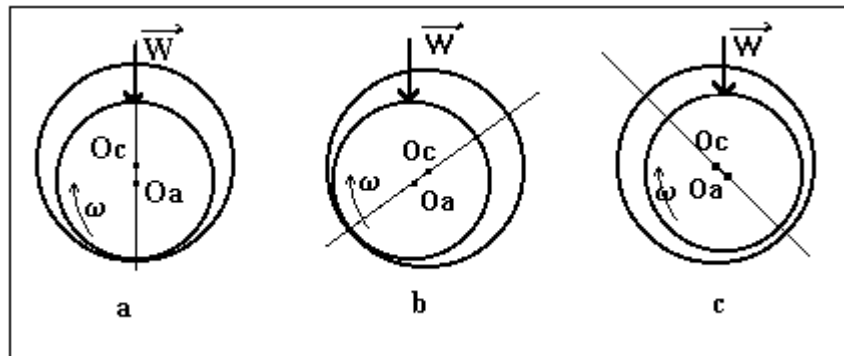
CARACTERISTIQUES STATIQUES ET DYNAMIQUES DES PALIERS CIRCULAIRES

III.1 INTRODUCTION

Les paliers lisses sont fréquemment utilisés ; les plus simples sont constitués d'un arbre en acier tournant dans un alésage en bronze en présence de lubrifiant. Sur certains mécanismes, ils correspondent à la meilleure solution technologique existant actuellement. On les rencontre dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs, etc.

Un palier lisse est constitué de deux éléments, l'arbre de rayon R_a et le coussinet de rayon intérieur R_c et de longueur L . Ainsi, un palier lisse peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins et caractérisé par trois grandeurs :

- le jeu radial $C = R_c - R_a$,
- le rapport R/C (jeu relatif),
- le rapport L/D de longueur au diamètre du palier .



Figure(III-1) Schématisation d'un palier lisse

La figure ci-dessus présente les trois phases que l'on observe lors de la mise en route sous charge d'un palier. Les points O_a et O_c représentent respectivement les centres de l'arbre et du coussinet, tandis que W désigne la charge extérieure appliquée à l'arbre. A l'arrêt, l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance $O_c O_a$ est égale au jeu radial C . Au démarrage, l'arbre en glissant à l'intérieur du coussinet,

le régime d'écoulement est dit mixte, le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent formé par l'arbre et le coussinet. dès que la vitesse de rotation devient suffisante, il y a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge. Pour une vitesse de rotation stable et une charge constante, le centre de l'arbre O_a occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet. Si le torseur des forces extérieures se réduit à une force unique W qui agit dans le plan de la section médiane du palier, les axes de l'arbre et du coussinet sont alors parallèles. deux paramètres sont nécessaires pour positionner O_a par rapport à O_c . On utilise habituellement la distance $O_c O_a$ appelée excentricité " e " et l'angle que fait la direction de la charge W avec la ligne des centres $O_c O_a$ appelé angle de calage ϕ .

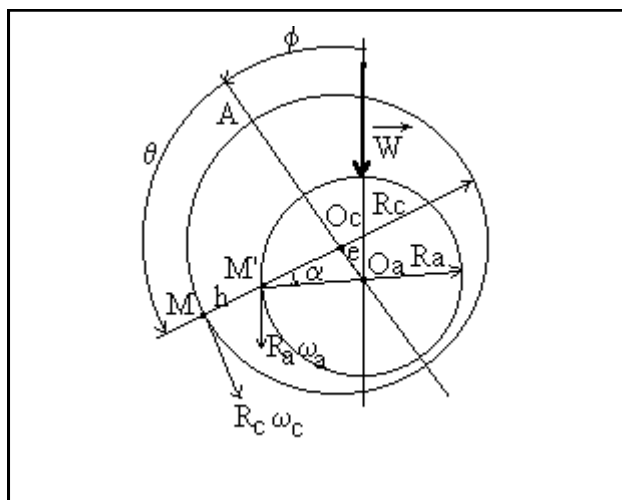
Dans cette partie, nous nous limiterons au régime hydrodynamique pur et nous supposons que l'écoulement du fluide à travers le palier est isotherme, laminaire et permanent. Le processus de calcul des performances d'un palier peut être divisé en quatre parties :

- Ecriture de l'équation donnant l'épaisseur du film lubrifiant .
- Ecriture de l'équation de Reynolds correspondant au palier étudié .
- Définition des conditions aux limites sur la pression .
- Résolution des équations et calcul des performances .

III.2- PALIERS EN REGIME LAMINAIRE

III.2.1- Epaisseur du film lubrifiant

Considérons une section droite du palier fig(III-2-a). Un point M appartenant à la surface du coussinet sera repéré par la coordonnée angulaire θ ; l'épaisseur du film est:



Figure(III-2-a) Section droite du palier

$$h = O_c M - O_c M'$$

$$h = R_c - O_c M' = R_a + C - O_c M'$$

En appliquant la règle des sinus au triangle $O_a M' O_c$ il vient :

$$\frac{O_a M'}{\sin(O_a O_c M')} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{R_a}{\sin(M' O_a O_c)} = \frac{R_a}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{R_a}{\sin \theta}$$

d'où $\sin \alpha = \frac{e}{R_a} \sin \theta$

et $O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(O_c O_a M')$

or $(O_c O_a M') = \theta - \alpha = \theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)$

donc $O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin\left(\theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right)$

En développant le sinus nous obtenons :

$$O_c M' = R_a \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2} - e \cdot \cos \theta$$

La quantité e/R_a est très petite devant l'unité (de l'ordre de 10^{-3}), on peut donc négliger le terme $(e/R_a \cdot \sin \theta)^2$ devant 1 .

Il vient alors

$$h = C (1 + \varepsilon \cdot \cos \theta)$$

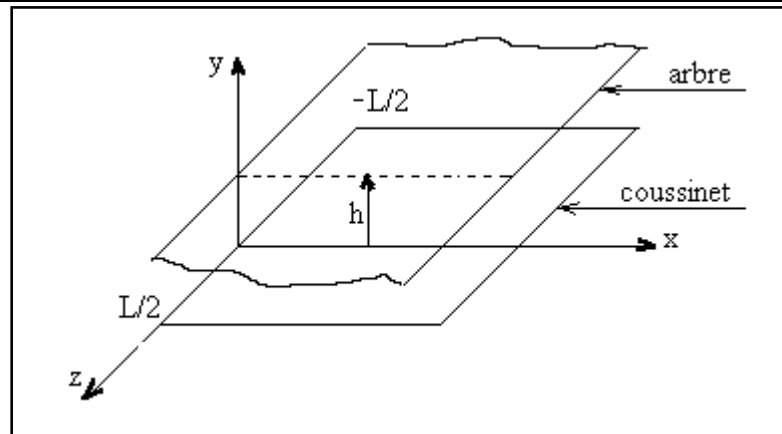
[III-1]

ou l'excentricité relative : $\varepsilon = e/C$ varie de 0 à 1 .

III.2.2- EQUATION DE REYNOLDS

Les rayons R_a et R_c étant très voisins, on peut négliger la courbure du film et développer le coussinet (ou l'arbre) et l'assimiler à un plan fig(III-2-b).

Les conditions cinématiques relatives aux surfaces s'écrivent :



Figure(III-2-b) Palier développé

$$\left. \begin{aligned}
 \text{[III-2]} \quad U_1 &= R_c \omega_c & ; \quad V_1 &= 0 \\
 U_2 &= R_a \omega_a \cos \alpha & ; \quad V_2 &= R_a \omega_a \sin \alpha & ; \quad W_2 &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

ou α représente la pente de la courbe $h(x)$:

$$\text{[III-3]} \quad \text{tg} \alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{1}{R_a} \frac{dh}{d\theta} = -\frac{e}{R_a} \sin \theta$$

La quantité e/R_a étant très petite, on peut effectuer un développement et se limiter au 1^{er} ordre .

$$\text{[III-4]} \quad \cos \alpha \approx 1 \quad ; \quad \sin \alpha \approx \alpha = dh/dx$$

dans ces conditions les relations (III-2) s'écrivent :

$$\text{[III-5]} \quad \left. \begin{aligned}
 U_1 &= R_c \omega_c \\
 U_2 &= R_a \omega_a \quad , \quad V_2 &= R_a \omega_a dh/dx
 \end{aligned} \right\}$$

L'équation de Reynolds s'écrit :

$$\text{[III-6]} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu R (\omega_a + \omega_c) \frac{dh}{dx}$$

Remarques :

- On a développé le coussinet et choisi ce dernier comme plan de référence; un résultat identique aurait été obtenu en développant l'arbre .

- Les vitesses angulaires ω_a et ω_c s'ajoutent. Ainsi la portance est proportionnelle à la somme des vitesses. Si celles-ci sont égales et opposées, la portance de l'écoulement est nulle au second ordre près .

III.2.3- CONDITION AUX LIMITES

On doit résoudre l'équation (III-6) sur le domaine représenté sur la figure(III.2.b) compte tenu des conditions aux limites sur la pression .

Dans le cas d'un fluide incompressible ces conditions s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Selon } Z : P\left(\theta, z = \frac{L}{2}\right) = P_1 , P\left(\theta, z = -\frac{L}{2}\right) = P_2 \\ \text{Selon } \theta : P(\theta = 0, z) = P(\theta = 2\pi, z) \end{array} \right\} \text{ [III-7]}$$

Où P_1 et P_2 représentent les pressions extérieures aux extrémités du palier. Si le palier possède des rainures d'alimentation en lubrifiant, il faut alors écrire les conditions aux limites correspondantes:

- Pour une rainure circonférentielle en $z = 0$: $P(\theta , z = 0) = P_a$

[III-8]

- Pour une rainure axiale située à l'abscisse $\theta = \theta_a$: $P(\theta_a , z) = P_a$

De plus, comme la géométrie du film est convergente puis divergente, il peut y avoir rupture du film dans le divergent lorsque la pression devient inférieure à la pression atmosphérique. Ces conditions s'écrivent :

$$\begin{aligned} P(\theta = \theta_s) &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \theta}(\theta = \theta_s) &= 0 \end{aligned}$$

III.2.4- RESOLUTION DE L'EQUATION DE REYNOLDS

III.2.4.1- LE PALIER INFINIMENT LONG

Lorsque le rapport L/D de la longueur au diamètre est grand, on peut négliger le débit axial. L'écoulement est donc purement circonférentiel. En pratique, ce calcul s'applique aux paliers tels que $L/D > 4$. Si seul l'arbre est

animé d'un mouvement de rotation uniforme $\omega_a = \omega$, l'équation de Reynolds (III-6) se réduit à :

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{dP}{dx} \right) = 6\mu R \omega \frac{dh}{dx}$$

ou en utilise la coordonnée angulaire θ :

$$[\text{III-9}] \quad \frac{d}{d\theta} \left(h^3 \frac{dP}{d\theta} \right) = 6\mu R^2 \omega \frac{dh}{d\theta}$$

III.2.4.1.1- SOLUTION DE SOMMERFELD

Supposons le palier alimenté à la pression $P = P_a$ par l'intermédiaire d'une rainure axiale de largeur nulle située à l'abscisse $\theta = 0$. Les conditions aux limites, connus sous le nom de conditions de Sommerfeld s'écrivent :

$$P(\theta = 0) = P(\theta = 2\pi) = P_a \quad [\text{III-10}]$$

Une première intégration de (III-9) donne :

$$[\text{III-11}] \quad \frac{dP}{d\theta} = 6\mu R^2 \omega \frac{h - h^*}{h^3}$$

h^* étant l'épaisseur du film lubrifiant au point où le gradient de pression est nul. En intégrant (III-11) et en remplaçant h par sa valeur (III-1) on obtient :

$$[\text{III-12}] \quad P = 6\mu\omega \left(\frac{R}{C} \right)^2 \left\{ \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cdot \cos\theta)^2} - \frac{h^*}{C} \int \frac{d\theta}{(1+\varepsilon \cdot \cos\theta)^3} \right\} + k$$

où k est une constante d'intégration

Pour calculer ces deux intégrales, on peut utiliser le changement de variable de Sommerfeld défini par :

$$[\text{III-13}] \quad 1 + \varepsilon \cdot \cos\theta = \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon \cdot \cos\psi}$$

Dans ce cas la pression s'écrit :

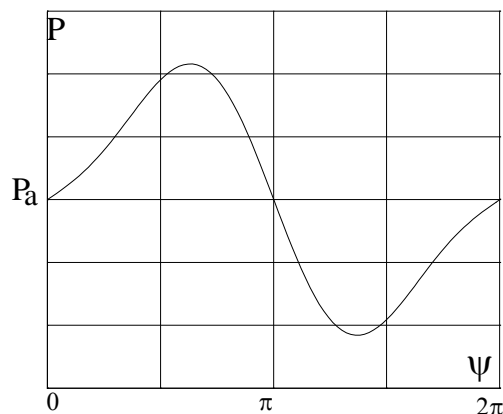
$$P = \frac{6\mu\omega(R/C)^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left\{ \psi - \varepsilon \cdot \sin \psi - \frac{h^* [2\psi - 4\varepsilon \cdot \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi]}{2C \cdot (1-\varepsilon^2)} \right\} + k$$

Les deux constantes h^* et k sont déterminées à partir des conditions aux limites (III-10):

$$\left. \begin{aligned} k &= P_a \\ \frac{h^*}{C} &= \frac{2(1-\varepsilon^2)}{2+\varepsilon^2} \end{aligned} \right\}$$

Soit

$$P = \frac{6\mu\omega(R/C)^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left\{ \psi - \varepsilon \cdot \sin \psi - \frac{[2\psi - 4\varepsilon \cdot \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi]}{2+\varepsilon^2} \right\} + P_a$$



Figure(III.3) Allure de la courbe de pression

La figure (III-3) représente schématiquement l'allure de la courbe de pression. Celle-ci antisymétrique par rapport au point $\psi = \pi$ ($\theta = \pi$). On remarque que, selon la valeur de la pression d'alimentation P_a il peut y avoir ou non une région où la pression est négative.

Pour calculer la charge portante W et l'angle de calage ϕ , il faut intégrer le champ de pression à la surface de l'arbre. Pour cela, on projette les forces selon deux directions orthogonales \vec{k} et \vec{l} dont l'une est colinéaire à la ligne des centres, si on néglige les contributions des contraintes tangentielles, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} W \cos \phi + L \int_0^{2\pi} P \cdot \cos \theta \cdot R \cdot d\theta &= 0 \\ -W \sin \phi + L \int_0^{2\pi} P \cdot \sin \theta \cdot R \cdot d\theta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

On intègre par parties :

$$[III-16] \quad \left. \begin{aligned} W \cos \phi &= LR \int_0^{2\pi} \frac{dP}{d\theta} \sin \theta d\theta \\ W \sin \phi &= LR \int_0^{2\pi} \frac{dP}{d\theta} \cos \theta d\theta \end{aligned} \right\}$$

Pour calculer ces intégrales, on effectue le changement de variable (III-13), on obtient :

$$[III-17] \quad \left. \begin{aligned} W \cos \phi &= 0 \\ W \sin \phi &= \frac{12\mu R^3 \omega L \pi \varepsilon}{C^2 (2+\varepsilon^2) \sqrt{1-\varepsilon^2}} \end{aligned} \right\}$$

D'où :

$$[III-18] \quad W = 12\mu\omega \frac{R^3 L}{C^2} \frac{\pi \varepsilon}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{1/2}}$$

$$\phi = \pi/2$$

[III

-19]

Il est d'usage en lubrification d'introduire le nombre sans dimension S appelé nombre de Sommerfeld :

$$[III-20] \quad S = \frac{\mu LR \omega}{\pi W} \left(\frac{R}{C} \right)^2 = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2} (2+\varepsilon^2)}{12\pi^2 \varepsilon}$$

La charge W et par conséquent le nombre de Sommerfeld S sont indépendants de la pression d'alimentation P_a car celle-ci intervenant comme une constante dans la valeur de la pression admet une résultante nulle après intégration autour de l'arbre. La figure(III-4) représente les variations de la charge sans dimension W en fonction de l'excentricité relative ε . L'angle de calage ϕ est toujours égal à $\pi/2$. Cela signifie que le centre de l'arbre se déplace selon une direction normale à la ligne de charge .

Le couple de frottement est obtenu par intégration des contraintes de cisaillement à la surface de l'arbre .

$$[III-21] \quad C_a = R^2 L \int_0^{2\pi} \tau_{xy}(y=h) d\theta$$

avec :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dU}{dy} \quad \text{et} \quad U = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y(y-h) + \frac{R\omega y}{h}$$

d'où :

$$[III-22] \quad \tau_{xy} = \mu \frac{R\omega}{h} + \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} (2y-h)$$

Le report de (III-22) dans (III-21) donne :

$$[III-23] \quad C_a = R^2 L \int_0^{2\pi} \left(\mu \frac{R\omega}{h} + \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} \right) d\theta$$

Soit en développant :

$$[III-24] \quad C_a = R^2 L \int_0^{2\pi} \left(\mu \frac{R\omega}{h} + \frac{C}{2R} \frac{dP}{d\theta} + \frac{e \cdot \cos\theta}{2R} \frac{dP}{d\theta} \right) d\theta$$

La valeur de la première intégrale est immédiate à partir des tables de Boocker . La deuxième intégrale est nulle, tandis qu'en intégrant par parties on reconnaît dans la troisième intégrale l'expression : $\frac{e}{2} W \cdot \sin\phi$. Le couple de frottement sur l'arbre s'écrit :

$$C_a = \frac{R^3 \mu \omega L}{C} \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{e}{2} W \sin\phi$$

Soit compte tenu de (III-18) et (III-19) :

$$[III-25] \quad C_a = \frac{4\mu\omega R^3 L \pi}{C} \left[\frac{1+2\varepsilon^2}{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right]$$

Les variations du couple sans dimension \bar{C}_a en fonction de l'excentricité relative ε sont présentées sur la figure(III-5). Un calcul semblable au précédent permet de déterminer le couple de frottement sur le coussinet :

$$[III-26] \quad C_c = \frac{R^3 \mu \omega L}{C} \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{e}{2} W \sin \phi$$

Soit :

$$C_c = \frac{4\mu\omega R^3 L \pi}{C} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2+\varepsilon^2}$$

En remarquant que :

$$[III-27] \quad C_a - C_c = eW \sin \phi$$

Cette relation traduit l'équilibre du palier. Le coefficient de frottement relatif à l'arbre est :

$$f_a = \frac{C_a}{RW} = \frac{C}{R} \left(\frac{\varepsilon}{2} \sin \phi + \frac{2\pi^2 S}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right)$$

afin d'éliminer le rapport R/C , on utilise le nombre de frottement .

$$[III-28] \quad f = \frac{R}{C} f_a = \frac{\varepsilon}{2} \sin \phi + \frac{2\pi^2 S}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{1+2\varepsilon^2}{3\varepsilon}$$

III.2.4.1.2- SOLUTION DE GUMBEL

La solution de Sommerfeld n'est valable que pour des paliers très faiblement chargés ou alimentés sous forte pression car si non on obtient des pressions négatives dans le film lubrifiant. A la suite des travaux de Sommerfeld, Gumbel propose de négliger les pressions négatives. Ceci introduit une discontinuité dans le débit. Bien que physiquement inacceptable, cette solution est fréquemment employée car elle permet d'obtenir dans le cas du "palier court " par exemple, une solution proche des résultats expérimentaux et elle conserve à l'équation de Reynolds son caractère linéaire .

Dans le cas d'un palier long alimenté à l'abscisse $\theta = 0$ avec une pression d'alimentation égale à la pression atmosphérique, c'est-à-dire $P_a = 0$, on obtient :

$$[III-29] \left. \begin{aligned} W \cos \phi &= -12\mu\omega RL(R/C)^2 \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)} \\ W \sin \phi &= 6\mu\omega RL(R/C)^2 \frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(2+\varepsilon^2)} \end{aligned} \right\}$$

$$[III-30] \quad W = \frac{6\mu\omega RL(R/C)^2}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} [4\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)]^{1/2}$$

$$[III-31] \quad \phi = \text{arctg} \frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$$

Les variations de la charge \bar{W} et de l'angle de calage ϕ en fonction de l'excentricité relative sont présentées sur la figure (III-4). Le calcul du couple résistant est effectué en utilisant les relations (III-21) et (III-22). Cependant l'existence d'une zone active remplie d'huile ($\pi < \theta < 2\pi$) partiellement vide oblige à décomposer le calcul du couple en deux parties. Pour cela, on suppose que dans la zone inactive, le débit circonférentiel reste constant et égale à celui calculé à la sortie de l'arc actif, c'est-à-dire dans ce cas à l'abscisse $\theta = \pi$. Cette hypothèse permet de définir une largeur équivalente L' définie par la relation :

$$Q_c = \frac{R\omega h(\theta = \pi)L}{2} = \frac{R\omega h(\theta)L'}{2}$$

où $L' = Lh_s/h^2$, si h_s représente l'épaisseur du film à l'abscisse $\theta = \pi$. Il vient :

$$[III-32] \quad C_a = R^2 L \left\{ \int_0^\pi \left[\frac{\mu\omega R}{h} + \frac{h}{2} \frac{dP}{dx} \right] d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\mu\omega R h_s}{h^2} d\theta \right\}$$

Soit après intégration :

$$\begin{aligned}
 C_a &= \frac{\pi\mu\omega R^3 L}{C\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{3\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2} \right] \\
 C_c &= \frac{\pi\mu\omega R^3 L}{C\sqrt{1-\varepsilon^2}} \left[\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{3\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2} \right]
 \end{aligned}$$

[III-33]

Les variations du couple de frottement relatif à l'arbre C_a sont présentées sur la figure (III-5) .

III.2.4.1.3- SOLUTION DE REYNOLDS

Pour des conditions d'alimentation identiques à celles utilisées précédemment, c'est-à-dire une pression d'alimentation nulle à l'abscisse $\theta = 0$, nous savons que, s'il y a rupture du film lubrifiant, la continuité du débit impose la continuité du gradient de pression le long de la frontière qui sépare la zone active ($P>0$) de la zone inactive ($P=0$). Dans le cas unidimensionnel, cette condition s'écrit :

$$P(\theta = \theta_s) = \left(\frac{dP}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_s} = 0$$

[III-34]

Où θ_s est l'abscisse du début de la zone inactive .

Les deux constantes d'intégration qui apparaissent dans l'équation (III-14) sont donc déterminées à partir des deux conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned}
 P(\theta=0) &= 0 & \text{ou} & & P(\psi=0) &= 0 \\
 P(\theta = \theta_s) &= \left(\frac{dP}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_s} = 0 & \text{ou} & & P(\psi = \psi_s) &= \left(\frac{dP}{d\psi} \right)_{\psi=\psi_s} = 0
 \end{aligned} \right\}$$

On obtient alors le champ de pression :

$$P(\psi) = \frac{6\mu\omega R^2}{C^2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left[\psi - \varepsilon \sin \psi - \frac{2\psi - 4\varepsilon \sin \psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin \psi \cos \psi}{2(1-\varepsilon \cos \psi_s)} \right]$$

[III-35]

où ψ_s , qui correspond à l'abscisse de rupture du film d'huile, est défini par la relation :

$$\varepsilon(\sin \psi_s \cos \psi_s - \psi_s) + 2(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s) = 0$$

[III-36]

par intégration du champ de pression on obtient la charge :

$$W = 3\mu\omega RL \left(\frac{R}{C}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon \cos \psi_s)} \left[\frac{\varepsilon^2(1-\cos \psi_s)^4}{1-\varepsilon^2} + 4(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)^2 \right]$$

[III-37]

L'angle de calage est donné par :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\varepsilon(1-\cos \psi_s)^2}$$

[III-38]

Le nombre de Sommerfeld S s'écrit alors :

$$S = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon \cos \psi_s)}{3\pi \left[\frac{\varepsilon^2(1-\cos \psi_s)^4}{1-\varepsilon^2} + 4(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)^2 \right]^{1/2}}$$

[III-39]

Le couple de frottement est obtenu par l'intégration des contraintes de cisaillement sur la surface de l'arbre, ou du coussinet. Comme précédemment, le domaine est séparé en une zone active ($0 < \psi < \psi_s$) est une zone inactive ($\psi_s < \psi < 2\pi$).

Sur l'arbre le couple s'écrit :

$$C_a = \frac{\mu\omega R^3 L}{C} \left[\frac{2\pi + \varepsilon(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon \cos \psi_s)} \right] + \frac{e}{2} W \sin \phi$$

[III-40]

Sur le coussinet :

$$C_c = \frac{\mu\omega R^3 L}{C} \left[\frac{2\pi + \varepsilon(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon \cos \psi_s)} \right] - \frac{e}{2} W \sin \phi$$

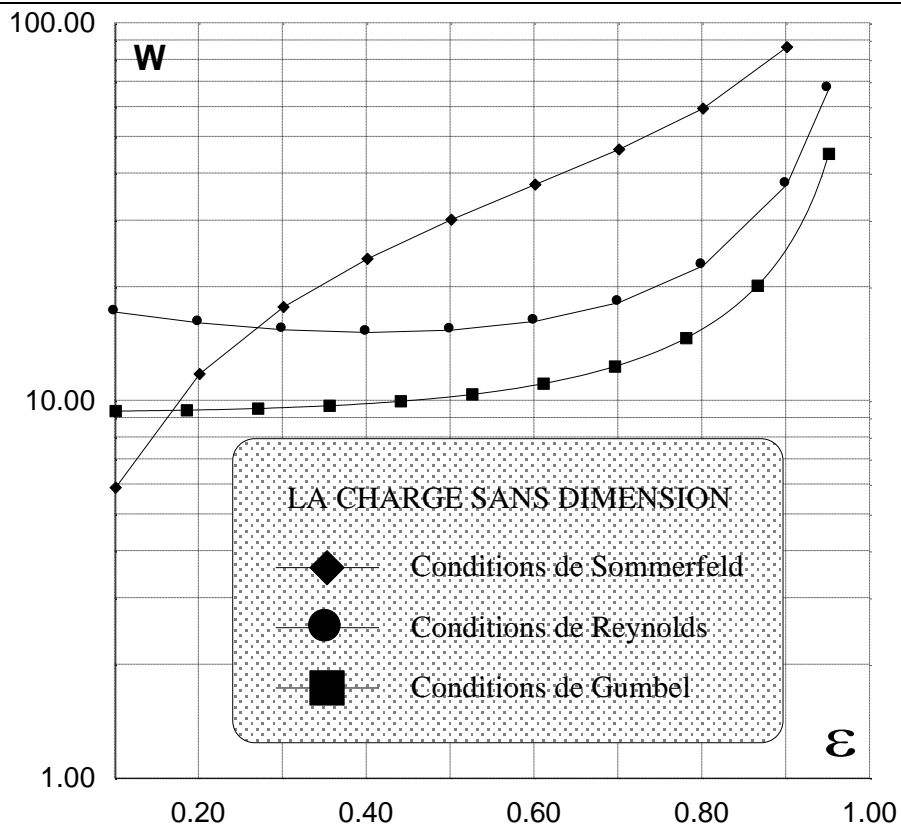
[III-41]

Le nombre de frottement relatif à l'arbre est donné par la relation :

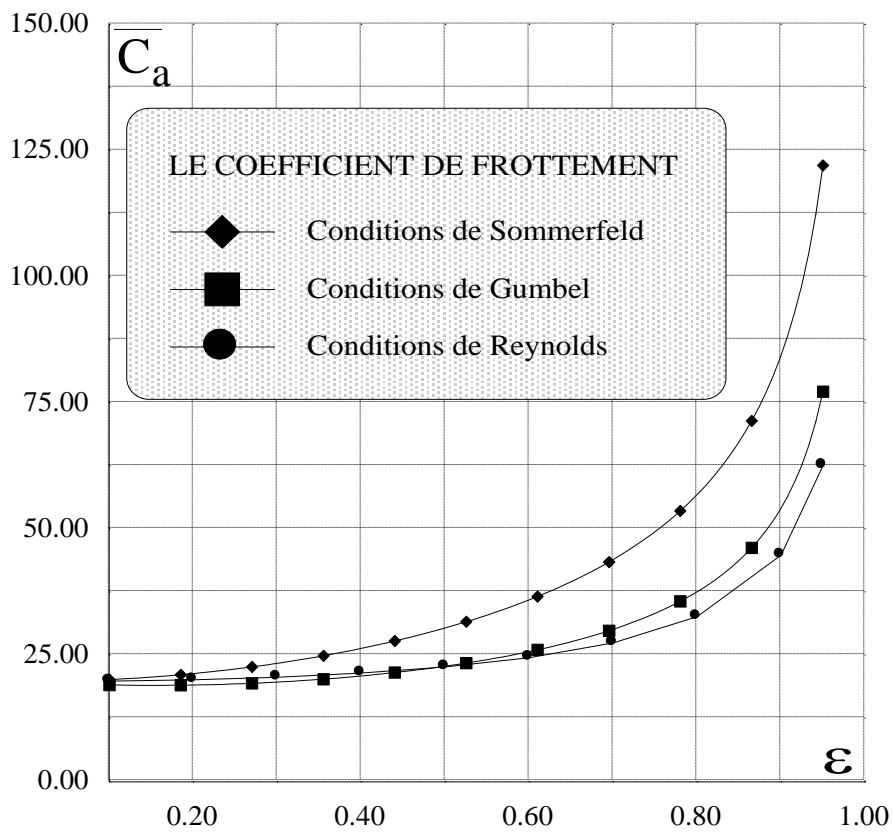
$$f = \frac{C_a}{CW} = \pi S \left[\frac{2\pi + \varepsilon(\sin \psi_s - \psi_s \cos \psi_s)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon \cos \psi_s)} \right] + \frac{\varepsilon}{2} \sin \phi$$

COMPARAISON

Les résultats obtenus avec les conditions aux limites de Sommerfeld, Gumbel et Reynolds sont présentés sur les figures (III-4) et (III-5). On remarque que les solutions de Gumbel et Reynolds sont voisines, l'écart le plus faible est obtenu pour les grandes excentricités, ce qui est tout à fait logique car dans la solution de Reynolds, l'abscisse de rupture du film lubrifiant tend vers π lorsque l'excentricité relative ε tend vers 1. La figure (III-5) montre que l'effet du gradient de pression sur le couple ne devient sensible que pour des excentricités relatives supérieures à 0.4 .



Figure(III-4) Influence des conditons aux limites sur la charge



Figure(III-5) Influence des conditions aux limites sur le coefficient de frottement

III.2.4.2- LE PALIER COURT

Lorsque le rapport L/D de la longueur au diamètre du palier est faible, on peut négliger le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial .

L'équation de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu\omega R \frac{dh}{dx}$$

Soit encore :

$$42] \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu \frac{V}{R} \frac{dh}{d\theta} \quad [\text{III-}$$

Avec les conditions aux limites :

$$43] \quad \left. \begin{array}{l} P(\theta, z = -L/2) = 0 \\ P(\theta, z = +L/2) = 0 \end{array} \right\} \quad [\text{III-}$$

Le champ de pression s'écrit :

$$44] \quad P(\theta, z) = -\frac{3\mu\omega}{C^2} \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \frac{\varepsilon \sin\theta}{(1+\varepsilon \cos\theta)} \quad [\text{III-}$$

Il est évident que la pression varie comme $\sin\theta$; elle est positive pour $\theta \in (0, \pi)$. Pour obtenir la charge, Ocvirk et Dubois utilisent les conditions aux limites de Gümbel :

$$[\text{III-45}] \quad W = \mu\omega RL(L/D)^2 (R/C)^2 \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} [16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)]^{1/2}$$

Le nombre de Sommerfeld est tel que :

$$[\text{III-46}] \quad S = \frac{1}{(L/D)^2} \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\pi\varepsilon [16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)]^{1/2}}$$

et l'angle de calage :

$$[\text{III-47}] \quad \text{tg}\phi = \frac{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}}{4 \varepsilon}$$

Le couple de frottement est donné par la relation :

$$[III-48] \quad C_a = \frac{\mu\omega R^3 L}{C} \frac{\pi(2+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

et le nombre de frottement sur l'arbre s'écrit :

$$[III-49] \quad f = \frac{C_a}{CW} = \frac{\pi^2 S(2+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

Le débit axial est :

$$Q_z = LCV\varepsilon \quad [III-50]$$

ce qui justifie l'emploi d'un débit :

$$\bar{Q} = \frac{Q}{LCV} = \varepsilon$$

L'hypothèse du palier infiniment court est très utilisée en pratique, elle est d'autant plus précise que l'excentricité et le rapport L/D sont faibles. Par ailleurs, on remarque que le nombre de Sommerfeld et le nombre de frottement sont fonction du rapport $(L/D)^2$; ainsi si l'on veut représenter sur un seul tableau les caractéristiques du palier, il est nécessaire de considérer le nombre de Sommerfeld et le nombre de frottement modifiés :

$$S^* = S \left(\frac{L}{D} \right)^2$$

$$f^* = f \left(\frac{R}{C} \right)^2$$

III.2.4.3- LE PALIER DE LONGUEUR FINIE

Dans le cas général, la difficulté d'obtenir une solution satisfaisante pour un palier n'est pas seulement due à la forme de l'équation de Reynolds mais également aux conditions aux limites car le lubrifiant n'est pas toujours admis par l'intermédiaire d'une rainure axiale à pression ambiante .

Considérons un palier lisse alimenté par une rainure axiale pratiquée sur la ligne des centres dans la section d'épaisseur maximum du film .

L'équation de Reynolds s'écrit :

$$[III-51] \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu\omega R \frac{dh}{dx}$$

Si l'on considère que l'alimentation du palier se fait à la pression atmosphérique par une rainure axiale située sur la ligne des centres, les conditions aux limites qui approchent au mieux la réalité physique sont celles dites "de Reynolds".

Cette équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique n'admet pas de solution analytique dans le cas général, seules des méthodes numériques permettent sa résolution (différences finies ou éléments finis par exemple).

III.3- CARACTERISTIQUES DYNAMIQUES DES PALIERS CIRCULAIRES

Le rotor d'une machine tournante est un élément très important dont le rôle est de transmettre ou transformer la puissance. Il est souvent de réalisation fort complexe et comporte divers éléments tels que des engrenages ou des roues de turbines par exemple. Dans un grand nombre d'applications, il est supporté par des paliers qui ne doivent pas être considérés comme des éléments passifs mais comme des éléments qui interviennent sur le comportement dynamique de la ligne d'arbre, c'est-à-dire sur ses vitesses critiques et sa stabilité.

III.3.1- EQUATION DE REYNOLDS EN REGIME DYNAMIQUE

En régime dynamique le centre de l'arbre décrit une orbite située à l'intérieur d'un cercle dont le rayon est égal au jeu radial. Sa position vis-à-vis du centre du coussinet, point supposé fixe, peut être repérée :

- par ses coordonnées cartésiennes :

$$\vec{OO}_a = x \vec{X} + y \vec{Y}$$

- par ses coordonnées polaires :

$$\vec{OO}_a = e \vec{r} \quad ; \quad \phi = \left(\vec{X}, \vec{r} \right)$$

Le choix du système de coordonnées est dicté par la nature du problème à résoudre. Si l'on recherche la trajectoire du centre de l'arbre pour une charge dynamique quelconque, les variables (x, y) sont bien adaptées. Par contre le calcul des coefficients dynamiques peut parfois être réduit si on utilise les variables (e, φ). C'est pourquoi nous allons envisager successivement ces

deux paramétrages dans le cas de l'écoulement laminaire d'un fluide isovisqueux et incompressible .

III.3.1.1- PARAMETRAGE (x , y)

On utilise la coordonnée angulaire θ^* dont l'origine est située sur l'axe (\vec{x}) ; figure(III-6). L'épaisseur du film s'écrit :

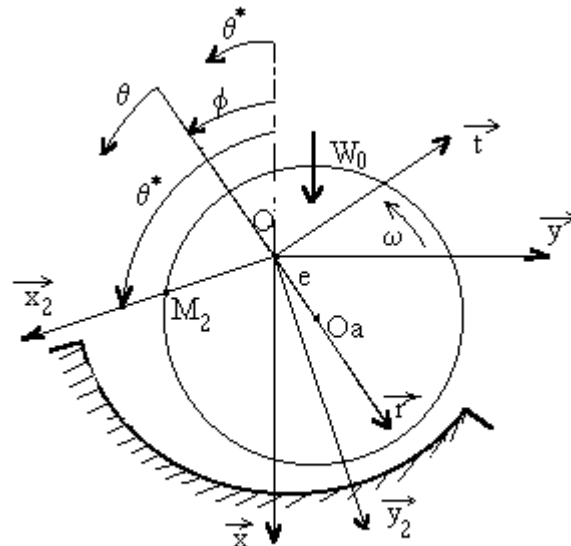
$$h = C + (x \cos \theta^* + y \sin \theta^*)$$

Le centre de l'arbre est repéré par le vecteur :

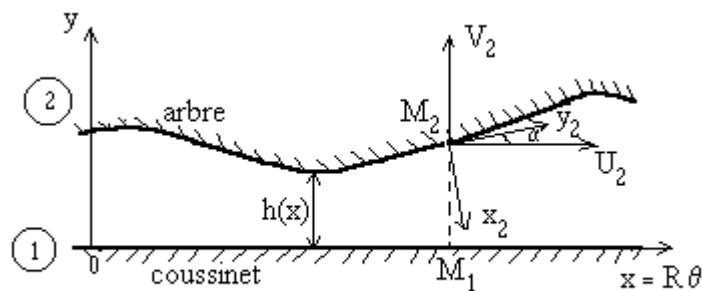
$$\vec{OO}_a = x \vec{X} + y \vec{Y}$$

et sa vitesse par :

$$V(O_a) = \dot{x} \vec{X} + \dot{y} \vec{Y}$$



a - Section droite



b - Palier développé

figure(III-6) Schématisation du palier

La vitesse du point M_2 qui appartient à la surface de l'arbre est donnée par :

$$\vec{V}(M_2) = -(\dot{x} \cos \theta^* + \dot{y} \sin \theta^*) \vec{X}_2 + (R\omega + \dot{x} \sin \theta^* - \dot{y} \cos \theta^*) \vec{Y}_2$$

d'où les composantes des vitesses :

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= (R\omega + \dot{x} \sin \theta^* - \dot{y} \cos \theta^*) - (\dot{x} \cos \theta^* + \dot{y} \sin \theta^*) \frac{dh}{dx} \\ V_2 &= (\dot{x} \cos \theta^* + \dot{y} \sin \theta^*) + (R\omega + \dot{x} \sin \theta^* - \dot{y} \cos \theta^*) \frac{dh}{dx} \end{aligned} \right\}$$

et l'équation de Reynolds :

$$[III-52] \quad \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta^*} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \left[\omega \frac{dh}{d\theta^*} + 2\dot{x} \cos \theta^* + 2\dot{y} \sin \theta^* \right]$$

III.3.1.2- PARAMETRAGE (e , ϕ)

On utilise la coordonnée angulaire θ dont l'origine est située sur l'axe \vec{r} . L'épaisseur h du film lubrifiant est donnée par :

$$h = C + e \cdot \cos \theta = C(1 + \varepsilon \cdot \cos \theta)$$

Le changement de variable :

$$\begin{aligned} x &= e \cdot \cos \phi \\ y &= e \cdot \sin \phi \\ \theta^* &= \theta + \phi \end{aligned}$$

conduit à :

$$[III-53] \quad \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \left[(\omega - 2\dot{\phi}) \frac{dh}{d\theta} + 2\dot{e} \cdot \cos \theta \right]$$

III.3.2- MODELISATION LINEAIRE : COEFFICIENTS DYNAMIQUES

.

III.3.2.1- DEFINITION :

Dans l'analyse dynamique d'une ligne d'arbre de machine tournante, le comportement du palier est gouverné par les forces hydrodynamiques engendrées par le film lubrifiant et qui s'oppose au mouvement de l'arbre. Dans le cas général, celles-ci sont obtenues par intégration du champ de pression calculé à partir de l'équation de Reynolds écrite en régime dynamique. Ces forces étant des fonctions non linéaires de la position et de la vitesse du centre

de l'arbre, l'analyse exacte d'un système rotor-paliers est donc très complexe puisqu'elle nécessite la résolution simultanée des équations relatives au mouvement du rotor et de l'équation relative au comportement hydrodynamique de chaque palier. Cette étude peut néanmoins être largement simplifiée si on suppose le rotor parfaitement rigide et si on se limite aux petits déplacements au voisinage d'une position d'équilibre statique. La première hypothèse qui correspond au cas d'un rotor rigide, permet de comparer entre les différentes configurations de paliers, tandis que la seconde hypothèse, qui correspond à la théorie linéaire, permet d'étudier la stabilité d'un point d'équilibre .

Si on envisage des petits déplacements: x , y et des petites vitesses de déplacement \dot{x} , \dot{y} au voisinage de la position d'équilibre statique x_0 , y_0 , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 F_x(x_0 + x, y_0 + y, \dot{x}, \dot{y}) &= F_x(x_0, y_0, 0, 0) + x \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \right)_0 + y \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} \right)_0 + \\
 &\quad + \dot{x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} \right)_0 + \dot{y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \right)_0 + \dots \dots \\
 F_y(x_0 + x, y_0 + y, \dot{x}, \dot{y}) &= F_y(x_0, y_0, 0, 0) + x \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right)_0 + y \left(\frac{\partial F_y}{\partial y} \right)_0 + \\
 &\quad + \dot{x} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} \right)_0 + \dot{y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \right)_0 + \dots \dots
 \end{aligned}$$

où F_x et F_y représentent les composantes, selon les axes x et y , de l'action du fluide sur le rotor .

En se limitant au premier ordre , les relations précédentes peuvent se mettre sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} F_x(x_0 + x, y_0 + y, \dot{x}, \dot{y}) - F_x(x_0, y_0, 0, 0) \\ F_y(x_0 + x, y_0 + y, \dot{x}, \dot{y}) - F_y(x_0, y_0, 0, 0) \end{Bmatrix} = -[a_{ji}] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - [b_{ji}] \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

où f_x et f_y représentent les forces adimensionnelles engendrées par les déplacements élémentaires (x , y , \dot{x} , \dot{y}). Les coefficients a_{ij} et b_{ij} correspondent respectivement aux raideurs et aux amortissements dus à

l'existence du film lubrifiant. On remarquera que $F_x(x_0, y_0, 0, 0)$ est équivalent à F_0 et que la composante $F_y(x_0, y_0, 0, 0)$ est nulle. Les coefficients dynamiques sont donc obtenus par identification des équations (III.54) et (III.55) .

$$[III-56] \quad a_{ij} = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{O_{as}} \quad ; \quad b_{ij} = - \left(\frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}_j} \right)_{O_{as}}$$

Dans ces relations :

- \vec{F} représente l'action du fluide sur l'arbre

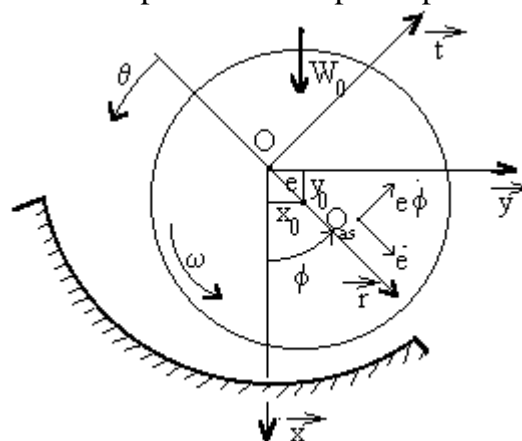
$$\left. \begin{array}{l} F_x(x_0, y_0, 0, 0) = F_0 = -W_0 \\ F_y(x_0, y_0, 0, 0) = 0 \end{array} \right\}$$

Si la charge extérieure \vec{W} est telle que $\vec{W} = W_0 \vec{X}$

Le premier indice indique la direction de la force, le second celle du déplacement ou de la vitesse de déplacement. L'existence de termes croisés traduit le fait que dans un palier, en général, l'action hydrodynamique n'est pas colinéaire au déplacement .

III.3.2.2- CALCUL DES COEFFICIENTS DYNAMIQUES

La configuration générale étudiée est celle d'un palier cylindrique partiel (ou arc partiel) figure(III-7). Le cas du palier complet (sans rainures axiales) sera étudié comme un cas particulier du palier partiel .



Figure(III-7) Arc partiel

Les coefficients dynamiques peuvent être calculés dans n'importe quel repère . Si pour l'analyse vibratoire d'un rotor, on travaille habituellement dans

le repère fixe $(R_c)(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, La détermination des coefficients dynamiques d'un palier à arc partiel, c'est-à-dire le calcul des dérivées partielles des forces hydrodynamiques est plus simple dans le repère intermédiaire $(R_i)(O, \vec{r}, \vec{t}, \vec{z})$, figure(III-7). Dans le repère (R_i) la position du centre de l'arbre est donnée par :

$$\vec{OO}_a = e \vec{r}$$

et sa vitesse par :

$$\vec{V}(O_a) = \dot{e} \vec{r} + e \dot{\phi} \vec{t}$$

L'équation de Reynolds (III-53) s'écrit en variables adimensionnées :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{12} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H^3}{12} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\dot{e}/\omega}{1-2\dot{\phi}/\varepsilon} \cos \theta \\ \text{Avec } Z = \frac{z}{L} ; H = \frac{h}{C} = 1 + \varepsilon \cdot \cos \theta ; \varepsilon = \frac{e}{C} ; \mathbf{P} &= \frac{P/\omega}{\mu \omega (R/C)^2 (1-2\dot{\phi}/\omega)} \end{aligned} \right\}$$

Si θ_1 et θ_2 représentent respectivement les abscisses de début et de fin l'arc partiel, les composantes de la force hydrodynamique sont données par :

$$\vec{F}_d = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{P} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} R d\theta dZ = \eta \omega \left(1 - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right) \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathbf{P} \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta dZ$$

$$\text{Avec : } \eta = \mu L R (R/C)^2$$

Dans le cas où il y a rupture du film les bornes d'intégration se réduisent à θ_e et θ_s c'est à dire les abscisses de début et de fin de l'arc actif . On remarque que les bornes d'intégration dépendent de la position du centre de l'arbre. Ainsi les forces F_r et F_t sont fonction de $\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}/\omega$ et $\dot{\phi}/\omega$. On peut donc poser que :

$$[III-58] \begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} = \eta \omega \left(1 - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right) \begin{Bmatrix} \bar{F}_r(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}/\omega, \dot{\phi}/\omega) \\ \bar{F}_t(\varepsilon, \phi, \dot{\varepsilon}/\omega, \dot{\phi}/\omega) \end{Bmatrix}$$

Si on se limite à des petits déplacements au voisinage de la position d'équilibre caractérisé par ε_0 et ϕ_0 . La force adimensionnelle due à ces déplacements élémentaires peut être déduite de (III-58) par un développement en série de Taylor. Dans le repère (R_i) ses composantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_r \\ f_t \end{Bmatrix} &= \eta\omega \left[\left(1 - \frac{2\dot{\phi}}{\omega} \right) \left[\Delta\varepsilon \frac{\partial}{\partial\varepsilon} + \Delta\phi \frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \frac{\partial}{\partial\dot{\varepsilon}/\omega} + \frac{\dot{\phi}}{\omega} \frac{\partial}{\partial\dot{\phi}/\omega} \right] \begin{Bmatrix} \bar{F}_r \\ \bar{F}_t \end{Bmatrix} \right]_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_0, \phi=\phi_0 \\ \dot{\varepsilon}=\dot{\phi}=0}} - \\ \text{[III-59]} \quad &- 2\eta\omega \left(\frac{\dot{\phi}}{\omega} \right) \begin{Bmatrix} \bar{F}_r \\ \bar{F}_t \end{Bmatrix}_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_0, \phi=\phi_0 \\ \dot{\varepsilon}=\dot{\phi}=0}} \end{aligned}$$

Si les perturbations restent suffisamment petites, on peut supposer que les bornes d'intégration θ_1 et θ_2 ou (θ_e et θ_s) sont invariantes, c'est-à-dire que l'étendue de l'arc actif n'est pas influencée par la perturbation. L'équation (III-57) est alors linéaire en P et peut être résolue par une méthode de superposition. La pression adimensionnée est donc une fonction linéaire du paramètre $\dot{\varepsilon}\omega/(1-2\dot{\phi}/\omega)$ et l'on a :

$$\left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \dot{\phi}/\omega} \right)_{\dot{\varepsilon}=0} = \left(\frac{\partial \bar{F}_t}{\partial \dot{\phi}/\omega} \right)_{\dot{\varepsilon}=0} = 0$$

et l'équation (III-59) devient :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_r \\ f_t \end{Bmatrix} &= \eta\omega \left[\Delta\varepsilon \frac{\partial}{\partial\varepsilon} + \Delta\phi \frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega} \frac{\partial}{\partial\dot{\varepsilon}/\omega} \right] \begin{Bmatrix} \bar{F}_r \\ \bar{F}_t \end{Bmatrix}_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_0, \phi=\phi_0 \\ \dot{\varepsilon}=\dot{\phi}=0}} - \\ &- 2\eta\omega \left(\frac{\dot{\phi}}{\omega} \right) \begin{Bmatrix} \bar{F}_r \\ \bar{F}_t \end{Bmatrix}_{\substack{\varepsilon=\varepsilon_0, \phi=\phi_0 \\ \dot{\varepsilon}=\dot{\phi}=0}} \end{aligned}$$

d'où l'expression des coefficients dynamiques dans le repère intermédiaire (R_i) :

$$\left. \begin{aligned}
& a_{rr} = -\eta \frac{\omega}{C} \left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \varepsilon} \right)_0, & a_{rt} = -\eta \frac{\omega}{C \varepsilon_0} \left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \phi} \right)_0 \\
& a_{tr} = -\eta \frac{\omega}{C} \left(\frac{\partial \bar{F}_t}{\partial \varepsilon} \right)_0, & a_{tt} = -\eta \frac{\omega}{C \varepsilon_0} \left(\frac{\partial \bar{F}_t}{\partial \phi} \right)_0 \\
\text{[III-60]} \quad & b_{rr} = -\frac{\eta}{C} \left(\frac{\bar{F}_r}{\partial \dot{\varepsilon} / \omega} \right)_0, & b_{rt} = \frac{2\eta}{\varepsilon_0 C} \bar{F}_{r0} \\
& b_{tr} = -\frac{\eta}{C} \left(\frac{\bar{F}_t}{\partial \dot{\varepsilon} / \omega} \right)_0, & b_{tt} = \frac{2\eta}{\varepsilon_0 C} \bar{F}_{t0}
\end{aligned} \right\}$$

Les coefficients dynamiques adimensionnés :

$$A_{ij} = a_{ij} \frac{C}{W_0} \quad ; \quad B_{ij} = b_{ij} \frac{C \omega}{W_0}$$

où W_0 représente la force extérieure appliquée à l'arbre, ces coefficients peuvent s'exprimer en fonction du nombre de Sommerfeld S et des dérivées partielles

$$\left. \begin{aligned}
& A_{rr} = -\pi S \left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \varepsilon} \right)_0, & A_{rt} = -\frac{\pi S}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \phi} \right)_0 \\
& A_{tr} = -\pi S \left(\frac{\partial \bar{F}_t}{\partial \varepsilon} \right)_0, & A_{tt} = -\frac{\pi S}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial \bar{F}_t}{\partial \phi} \right)_0 \\
\text{[III-61]} \quad & B_{rr} = -\pi S \left(\frac{\partial \bar{F}_r}{\partial \dot{\varepsilon} / \omega} \right)_0, & B_{rt} = \frac{-2 \cos \phi_0}{\varepsilon_0} \\
& B_{tr} = -\pi S \left(\frac{\partial \bar{F}_t}{\partial \dot{\varepsilon} / \omega} \right)_0, & B_{tt} = \frac{2 \sin \phi_0}{\varepsilon_0}
\end{aligned} \right\}$$

Avec :

$$S = \frac{\mu \omega L R}{\pi W_0} \left(\frac{R}{C} \right)^2$$

De plus compte tenu de l'hypothèse de borne d'intégration θ_1 et θ_2 on peut montrer que dans les paliers hydrodynamiques

$$B_{rt} = B_{tr}$$

[III-62]

Ainsi le tenseur des coefficients d'amortissement est symétrique et les coefficients dynamiques adimensionnés ne sont fonction que de la position d'équilibre définie par les paramètres ε_0 et ϕ_0 . Connaissant les tenseurs raideur et amortissement dans le repère intermédiaire (R_i) on peut en déduire ceux relatifs à tout autre repère par un simple changement de base .

Mis à part les cas élémentaires du palier long et du palier court, qui sont traités dans les paragraphes, le calcul des coefficients dynamiques, donc du champ de pression, nécessite l'emploi de méthodes numériques. Deux approches peuvent être envisagées :

- méthode de perturbation ,
- différentiation numérique .

III.3.2.3- FORMULES DE CHANGEMENT DE BASES .

Nous avons les relations :

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix}$$

et

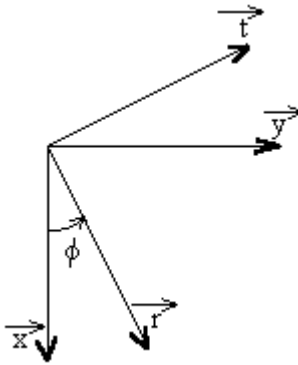
$$\begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{rt} \\ A_{tr} & A_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ t \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} B_{rr} & B_{rt} \\ B_{tr} & B_{tt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{r} \\ \dot{t} \end{Bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} r \\ t \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} F_r \\ F_t \end{Bmatrix} = [P] \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix}$$

où :

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$



En utilisant les relations de transformation des composantes d'un tenseur du second ordre dans un changement de base, il vient :

$$A_{xx} = A_{rr} \cos^2 \phi + A_{tt} \sin^2 \phi - (A_{rt} + A_{tr}) \sin \phi \cos \phi$$

$$A_{xy} = A_{rt} \cos^2 \phi - A_{tr} \sin^2 \phi + (A_{rr} - A_{tt}) \sin \phi \cos \phi$$

$$A_{yx} = A_{tr} \cos^2 \phi - A_{rt} \sin^2 \phi + (A_{rr} - A_{tt}) \sin \phi \cos \phi$$

$$A_{yy} = A_{tt} \cos^2 \phi + A_{rr} \sin^2 \phi + (A_{rt} + A_{tr}) \sin \phi \cos \phi$$

et des relations semblables pour les termes d'amortissement

III.3.2.4- PALIER INFINIMENT COURT

Dans le cas du palier court, on suppose que le gradient de pression circonférentielle $\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta}$ est négligeable devant le gradient de pression axiale $\frac{\partial P}{\partial z}$, l'équation de Reynolds en régime laminaire se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6 \left[(\omega - 2\dot{\phi}) \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2\dot{e} \cos \theta \right]$$

Si la pression est nulle aux deux extrémités du palier, la pression dans le film est donnée par :

$$P(\theta, z) = -\frac{3\mu}{h^3} \left(\frac{L^2}{4} - z^2 \right) \left[(\omega - 2\dot{\phi}) \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2\dot{e} \cos \theta \right]$$

Notons qu'aucune condition limite ne peut être imposée sur la pression dans la direction circonférentielle. Ainsi cette approche analytique ne peut être appliquée que dans le cas de paliers complets sans rainure axiale d'alimentation, et en utilisant soit les conditions aux limites de Sommerfeld, soit celles de Gumbel (qui suppose que $P > 0$). Ces conditions ne sont pas toujours physiquement satisfaisantes .

III.3.2.4.1- CONDITIONS DE SOMMERFELD (Film complet)

Les composantes des forces du film d'huile sont données par :

$$F_r = -R\mu \frac{L^3}{C^2} \pi \varepsilon \frac{(1+2\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^{5/2}}$$

$$F_t = R\mu \frac{L^3}{C^2} \pi \varepsilon \frac{(\omega - 2\dot{\phi})}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

d'où :

$$S = \left(\frac{R}{C}\right)^2 \frac{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}}{\pi^2 \varepsilon}$$

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

En utilisant les paramètres r et t , les coefficients dynamiques s'écrivent :

$$A_{rr} = -\pi S \frac{\partial F_r}{\partial \varepsilon} = 0$$

$$A_{rt} = \frac{\sin \phi_0}{\varepsilon} = 0$$

$$A_{tt} = \frac{\cos \phi_0}{\varepsilon} = 0$$

$$A_{tr} = -\pi S \frac{\partial F_t}{\partial \varepsilon} = -\frac{1+2\varepsilon^2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}$$

$$B_{rr} = -\pi S \frac{\partial F_r}{\partial (\dot{\varepsilon}/\omega)} = \frac{2(1+2\varepsilon^2)}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)} = 2A_{tr}$$

$$B_{tr} = B_{rt} = -2A_{tt} = 0$$

$$B_{tt} = 2A_{rt} = \frac{2}{\varepsilon}$$

Dans le repère (O, \vec{x}, \vec{y}) ces coefficients se réduisent à :

$$\begin{aligned}
A_{xx} &= A_{yy} = 0 \\
A_{xy} &= \frac{1+2\varepsilon^2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)} \\
A_{yx} &= -\frac{1}{\varepsilon} \\
B_{xx} &= \frac{2}{\varepsilon} \\
B_{xy} &= B_{yx} = 0 \\
B_{yy} &= \frac{2(1+2\varepsilon^2)}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)} 2A_{xy}
\end{aligned}$$

III.3.2.4.2- CONDITIONS DE GUMBEL

Si on suppose $P \geq 0$, il vient :

$$F_r = \frac{-\mu L^2 R}{2C^2(1-\varepsilon^2)^2} \left[\frac{\pi \varepsilon (1+2\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)}} + 2\varepsilon^2 (\omega - 2\phi) \right]$$

$$F_t = \frac{\mu L^2 R \varepsilon}{2C^2(1-\varepsilon^2)^2} \left[4\varepsilon + \frac{\pi}{2} (\omega - 2\phi) \sqrt{1-\varepsilon^2} \right]$$

$$S = \frac{1}{(L/D)^2} \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\pi \varepsilon [16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)]^{1/2}}$$

$$\phi_0 = \arctg \left(\frac{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}}{4 \varepsilon} \right)$$

Les coefficients dynamiques s'expriment par les relations :

$$A_{rr} = \frac{8(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)} f(\varepsilon)$$

$$A_{tt} = 4f(\varepsilon)$$

$$A_{rt} = \frac{\pi}{\varepsilon} \sqrt{1-\varepsilon^2} . f(\varepsilon)$$

$$A_{tr} = \frac{-\pi(1+2\varepsilon^2)}{\varepsilon \sqrt{1-\varepsilon^2}} f(\varepsilon)$$

$$B_{rr} = \frac{2\pi(1+2\varepsilon^2)}{\varepsilon \sqrt{1-\varepsilon^2}} f(\varepsilon) = -2A_{tr}$$

$$B_{tt} = \frac{2\pi}{\varepsilon} \sqrt{1-\varepsilon^2} . f(\varepsilon) = -2A_{rt}$$

$$B_{rt} = B_{tr} = -8f(\varepsilon) = 2A_{tt}$$

Soit dans le système d'axes x , y :

$$A_{xx} = \frac{4[\pi^2(1-\varepsilon^2)(1+2\varepsilon^2) + 32\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)]}{(1-\varepsilon^2)} f^3(\varepsilon)$$

$$A_{yy} = 4[\pi^2(1-\varepsilon^2) + 16\varepsilon^2] f^3(\varepsilon)$$

$$A_{xy} = \frac{[\pi^2(1-\varepsilon^2)(1+2\varepsilon^2) + 32\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)]}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} f^3(\varepsilon)$$

$$A_{yx} = -\frac{[\pi^2(1-\varepsilon^2)^2 - 16\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} f^3(\varepsilon)$$

$$B_{xx} = \frac{2\pi[\pi^2(1-\varepsilon^2)^2 + 48\varepsilon^2]}{\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}} f^3(\varepsilon)$$

$$B_{yy} = 2\pi\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon}} [\pi^2(1+2\varepsilon^2) - 16\varepsilon^2] f^3(\varepsilon)$$

$$B_{xy} = B_{yx} = 8[\pi^2(1+2\varepsilon^2) - 16\varepsilon^2] f^3(\varepsilon)$$

Avec :

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}}$$

III.3.2.5- PALIER INFINIMENT LONG

L'approximation du palier infiniment long consiste à négliger l'écoulement axial devant l'écoulement circonférentiel. On a donc un problème plan et l'équation de Reynolds se réduit à :

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 6 \left[(\omega - 2\dot{\phi}) \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2\dot{e} \cos \theta \right]$$

La pression dans le film est donnée par :

$$P = 6\mu \left(\frac{R}{C} \right)^2 \left\{ \frac{(\omega - 2\dot{\phi}) \varepsilon \sin \theta (2 + \varepsilon \cos \theta)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \left[\frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} - \frac{1}{(1 + \varepsilon^2)^2} \right] \right\}$$

Comme dans le cas du palier infiniment court, nous allons distinguer le cas du film complet, et du film rompu .

III.3.2.5.1- CONDITIONS DE SOMMERFELD

Nous avons dans ce cas :

$$F_r = -\frac{12\mu R^3 L}{C^2} \frac{\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \dot{\varepsilon}$$

$$F_t = \frac{12\mu R^3 L}{C^2} \frac{\pi\varepsilon(\omega-2\dot{\phi})}{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}}{12\pi^2\varepsilon}$$

$$A_{rr} = A_{tt} = 0$$

$$A_{rt} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$A_{tr} = -\frac{2\varepsilon^4 - \varepsilon^2 + 2}{\varepsilon(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}$$

$$B_{rr} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{2+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$B_{tt} = \frac{2}{\varepsilon}$$

$$B_{rt} = B_{tr} = 0$$

Soit dans le système d'axes (x , y):

$$A_{xx} = A_{yy} = 0$$

$$A_{xy} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{2\varepsilon^4 - \varepsilon^2 + 2}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)}$$

$$A_{yx} = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$B_{xx} = \frac{2}{\varepsilon}$$

$$B_{yy} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{2+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$B_{xy} = B_{yx} = 0$$

III.3.2.5.2- CONDITIONS DE GUMBEL

Si on suppose que $P \geq 0$, il vient :

$$F_r = -\frac{12\mu R^3 L}{C^2} \left[\frac{\varepsilon^2(\omega - 2\dot{\phi})}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} + \frac{\dot{\varepsilon}}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi(2+\varepsilon^2)} \right) \right]$$

$$F_t = \frac{12\mu R^3 L}{C^2} \left[\frac{\pi\varepsilon(\omega - 2\dot{\phi})}{2(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{2\varepsilon\dot{\varepsilon}}{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)} \right]$$

$$\phi_0 = \text{arctg} \left(\frac{\pi \sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\varepsilon} \right)$$

$$S = \frac{(2+\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2)^{3/2}}{6\pi\varepsilon} g(\varepsilon)$$

$$A_{rr} = \frac{4(2+\varepsilon^4)}{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}} g(\varepsilon)$$

$$A_{rt} = \frac{\pi^2(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon} g(\varepsilon)$$

$$A_{tt} = 2\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot g(\varepsilon)$$

$$A_{tr} = \frac{\pi(2-2\varepsilon^4 - \varepsilon^2)}{\varepsilon(2+\varepsilon^2)} g(\varepsilon)$$

$$B_{rr} = \frac{\pi^2(2+\varepsilon^2) - 16}{\pi\varepsilon} g(\varepsilon)$$

$$B_{tt} = \frac{2\pi(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon} g(\varepsilon)$$

$$B_{tr} = B_{rt} = -4\sqrt{1-\varepsilon^2} \cdot g(\varepsilon)$$

Avec :

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)[\pi^2 - \varepsilon^2(\pi^2 - 4)]}}$$

Le calcul analytique des coefficients de raideur A_{ij} et d'amortissement B_{ij} dans le système d'axes x, y est très complexe. Dans ce cas, les calculs sont effectués d'une façon numérique .

FORMULATION DU PROBLEME PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

INTRODUCTION

Pour la résolution numérique de nombreux phénomènes physiques, deux types de méthodes numériques sont généralement utilisées: différences finies ou éléments finis. Ces deux méthodes diffèrent par la nature de maillage et la technique d'interpolation, ce qui s'avère cruciale pour l'efficacité de la mise en oeuvre et la vitesse d'exécution.

Les grilles de différences finies sont très structurés, avec une numérotation régulière des points et une structure locale identique en chaque point. Par contre, Les maillages pour les éléments finis sont plus généraux et la structure n'est pas uniforme . Cette difficulté est compensée par une plus grande flexibilité pour discrétiser des géométries complexes et pour raffiner le maillage localement. Cette souplesse autorise une même précision de l'approximation qu'en différences finies, avec moins de points dans le maillage.

Dans cette optique, la méthode des éléments finis est donc bien adaptée à la résolution numérique des écoulements.

Cette méthode consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques.

Différentes approches sont utilisées pour avoir ces équations algébriques. Nous ne citons ici que les trois plus connues.

1- Approche directe : à l'origine cette approche a été utilisée pour développer la M.E.F dans la construction aéronautique. Elle utilise les éléments connus dans l'analyse structurale.

2- Approche variationnelle: La M.E.F a été reformulée à partir de considérations énergétiques et variationnelles. Cette méthode utilise le principe de stationnarité d'une quantité appelée la fonctionnelle.

3- Approche résiduelle (de Galerkin); c'est l'approche la plus générale de la M.E.F, elle s'applique directement aux équations aux dérivées partielles qui gouvernent le problème physique. Cette méthode utilise la technique des résidus pondérés.

TECHNIQUE DES RESIDUS PONDERES

La technique des résidus pondérés permet de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles à une formulation intégrale, en utilisant des fonctions de pondération.

RESIDUS

Toute équation aux dérivées partielles, peut être écrite sous la forme:

$$L(u) + f_v = 0$$

sur le domaine V_c .

Les conditions aux limites s'écrivent:

$$C(u) = f_s$$

sur la surface S .

Nous appelons résidus la quantité $R(u)$ définit par:

$$R(u) = L(u) + f_v$$

avec:

$R(u) = 0$ quand u est une solution du problème.

FORMULATION INTEGRALE

La technique des résidus pondérés consiste à rechercher des fonctions u qui annulent la forme intégrale:

$$W(u) = \int_V \langle \Phi \rangle \{ R(u) \} dv = 0$$

$$W(u) = \int_V \langle \Phi \rangle \{ L(u) + f_v \} dv = 0$$

avec:

Φ : fonction de pondération

Toute solution u qui vérifie l'équation (), vérifie nécessairement l'équation (); par contre si u est solution de l'équation (), elle est une solution approchée du problème.

FORME INTEGRALE FAIBLE

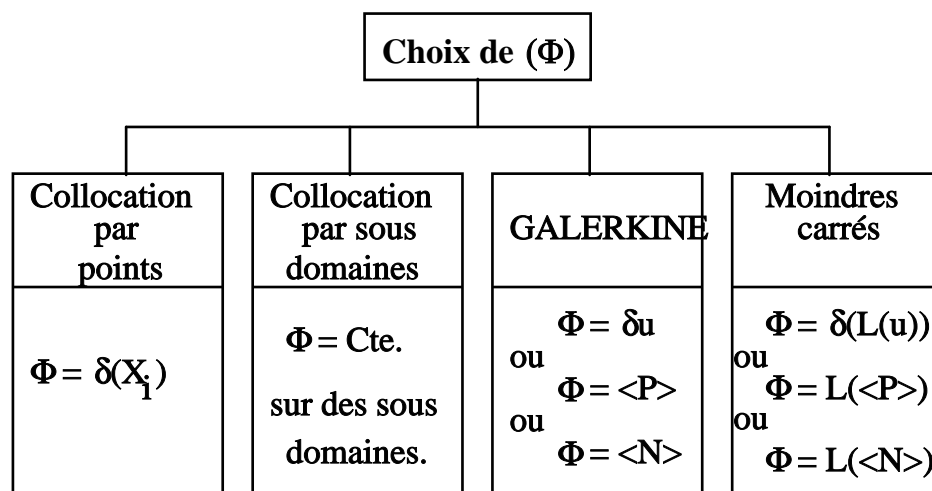
L'intégration par partie de l'équation () fournit des formes intégrales dites faibles qui présentent les avantages suivants:

- L'ordre maximum des dérivées de u dans la forme intégrale diminue,
- Certaines des conditions aux limites qui apparaissent dans la forme intégrale faible peuvent être prises en compte dans la formulation intégrale, au lieu d'être satisfaites identiquement par u .

Par contre l'intégration par partie fait apparaître des dérivées de Φ . Donc les conditions de décidabilité de Φ augmentent.

CHOIX DES FONCTIONS DE PONDERATION

Pour choisir la fonction de pondération Φ , On a différentes méthodes, qui se résument sur le tableau:



Dans ce travail on choisira la méthode de *GALERKINE* qui est d'ailleurs la plus utilisée, on prendra donc $\Phi = \langle N \rangle$ comme fonction de pondération.

REGIME DE FONCTIONNEMENT STATIONNAIRE

L'équation de Reynolds qui régit la détermination du champ de pression pour un fluide incompressible et isovisqueux en régime permanent est:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 6\mu R \omega \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \mu R \omega \frac{\partial h}{\partial x}$$

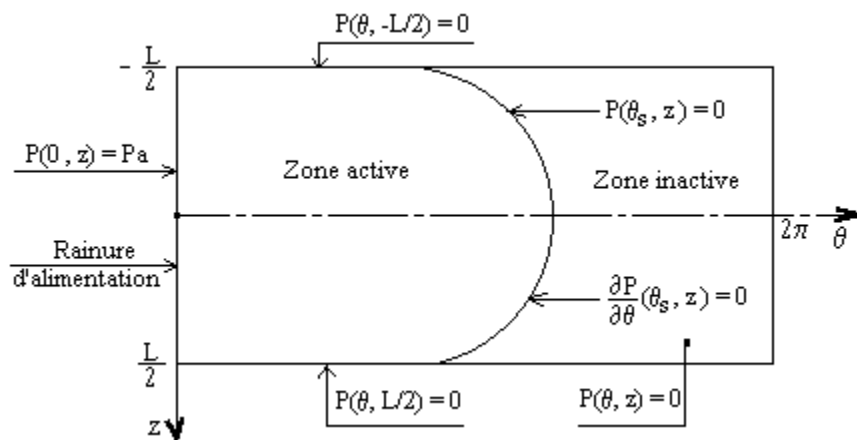
Passons en variables sans dimension en posant:

$$h = \frac{h}{C} \quad ; \quad Z = \frac{z}{R} \quad ; \quad \theta = \frac{x}{R} \quad ; \quad P = \frac{P}{\mu\omega(R/C)^2}$$

L'équation de Reynolds devient:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta}$$

Si l'on considère que l'alimentation du palier se fait à pression atmosphérique par une rainure axiale située sur la ligne des centres, les conditions aux limites qui approchent au mieux la réalité physique sont celles dites de Reynolds. Ces conditions résumées sur la figure ().



FORMULATION TYPE GALERKINE DU PROBLEME

L'équation de Reynolds () est descriptive de champ de pression en tout point de la région où le film est mince. On doit la résoudre sur le domaine représenté sur la figure () compte tenu des conditions aux limites sur la pression suivantes:

- de type **Dirichlet** : pression imposée égale à la pression atmosphérique aux extrémités libres du palier () et aux frontières communes avec la rainure axiale.

- de type **Neumann** : dérivée de pression nulle, si le palier est symétrique vis à vis du plan médian du coussinet ($z=0$).

puisque la géométrie et les conditions aux limites ci-dessus sont telles qu'il y a rupture du film lubrifiant, on prend en compte des conditions dites conditions aux limites de Reynolds, soit:

$$P(\theta_s) = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_s}$$

le long de la frontière de rupture du film .

FORMULATION DU PROBLEME PAR LA TECHNIQUE DES RESIDUS PONDERES

L'équation () peut s'écrire:

$$R_v = - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) + f \right] = 0$$

et les conditions aux limites s'expriment :

$$R_s = k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial n} + \alpha (\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) = 0$$

Nous pouvons écrire :

$$\int_v \Phi R_v dv + \int_s \Phi R_s ds = 0$$

avec :

v : volume du fluide

s : frontière du volume

CALCUL DE LA PREMIERE INTEGRALE DE L'EQUATION ()

$$I_1 = \int_v \Phi R_v dv$$

$$I_1 = - \int_v \Phi \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) \right\} dv - \int_v \Phi f dv$$

or

$$\left. \begin{aligned} \Phi \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) - k \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \\ \Phi \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) &= \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) - k \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \end{aligned} \right\}$$

donc

$$\int_v \Phi \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) \right\} dv = \int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) \right\} dv - \int_v \left\{ k \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} + k \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right\} dv$$

L'équation () devient :

$$I_1 = - \int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) \right\} dv + \int_v \left\{ k \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} + k \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right\} dv - \int_v \Phi f dv$$

CALCUL DE LA DEUXIEME INTEGRALE DE L'EQUATION () :

$$I_2 = \int_s \Phi R_s ds$$

$$I_2 = \int_{s_1} \Phi R_s ds + \int_{s_2} \Phi R_s ds$$

Sur S_1 :

Nous vérifions exactement les conditions aux limites, donc:

$$R_s = 0$$

ce qui entraîne:

$$\int_{s_1} \Phi R_s ds = 0$$

Sur S_2 :

$\alpha=0$ donc:

$$R_s = k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial n} = 0$$

alors:

$$\int_{s_2} \Phi R_s ds = \int_{s_2} \Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial n} ds$$

d'où:

$$\int_{s_2} \Phi \mathbf{R}_s ds = \int_{s_2} \Phi k \left\{ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} n_\theta + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} n_z \right\} ds$$

avec:

$$\left. \begin{aligned} n_\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial n} \\ n_z &= \frac{\partial Z}{\partial n} \end{aligned} \right\}$$

L'équation () devient par le théorème de divergence:

$$\int_{s_2} \Phi k \left\{ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} n_\theta + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} n_z \right\} ds = \int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) \right\} dv$$

De l'équation () et (), I_2 s'écrit:

$$I_2 = \int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Phi k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) \right\} dv$$

Alors, l'équation () devient, en introduisant les équations () et ():

$$\int_v k \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right\} dv - \int_v \Phi f dv = 0$$

DISCRETISATION

On propose une approximation type éléments finis de la variable \mathbf{P} , ainsi:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i N_i \quad \forall i \in [1, n]$$

où:

n : nombre total des noeuds par élément;

\mathbf{P}_i : valeur nodale (inconnue);

N_i : fonction d'interpolation (connue).

Les dérivées de la variable \mathbf{P} s'écrivent:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \frac{\partial N_i}{\partial Z} \end{aligned} \right\}$$

La fonction de pondération choisie est celle de *GALERKINE*:

$$\Phi(\theta, z) = N(\theta, z)$$

Substituons les équations (), () et () dans l'équation (), on obtient:

$$\int_v k \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j \frac{\partial N_j}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial Z} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j \frac{\partial N_j}{\partial Z} \right) - f N_i \right\} dv = 0$$

Nous avons ainsi obtenu un système de n équations à n inconnues à résoudre qui peut être représenté sous la forme:

$$[\mathbf{K}]^e [\mathbf{P}]^e = [\mathbf{F}]^e$$

avec:

$$\left. \begin{aligned} k_{ij}^e &= \int_v k \left[\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial Z} \frac{\partial N_j}{\partial Z} \right] dv \\ F_i^e &= \int_v f \cdot N_i \cdot dv \end{aligned} \right\} \forall i=1, n ; j=1, n$$

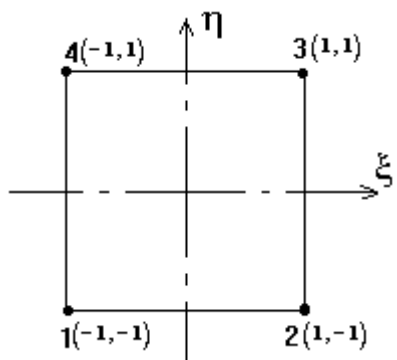
Une équation similaire est obtenue pour le volume entier de l'écoulement, en assemblant le système ():

$$[\mathbf{K}][\mathbf{P}] = [\mathbf{F}]$$

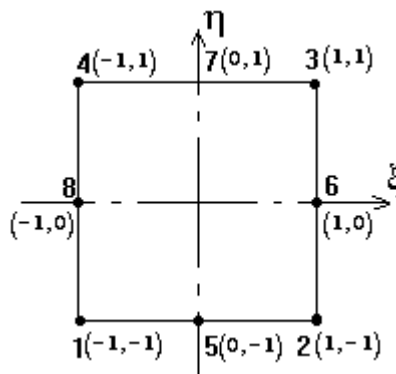
CHOIX DE L'ELEMENT

Les deux éléments retenus pour mailler la surface du coussinet sont isoparamétriques quadratiques à 4 noeuds et à 8 noeuds.

Les éléments de référence sont représentés dans les coordonnées locales avec la numérotation des noeuds.



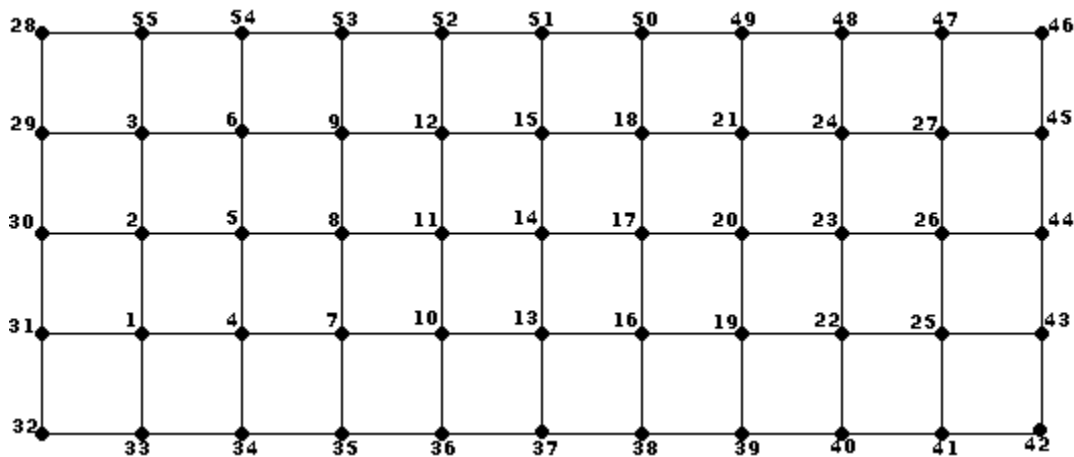
élément isoparamétrique quadratique
à 4 noeuds



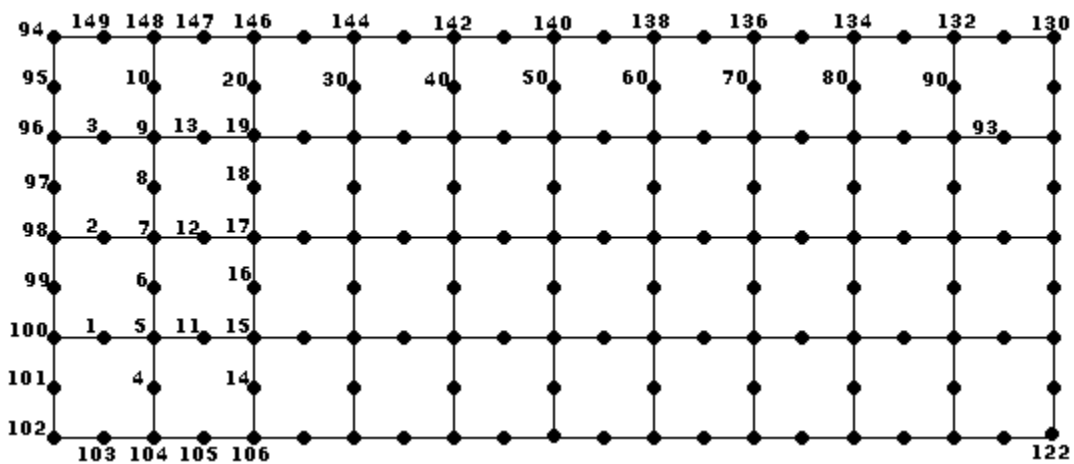
élément isoparamétrique quadratique
à 8 noeuds

Ces deux éléments assurent une interpolation de la valeur de P par un polynôme qui prend les mêmes valeurs que P aux points géométriques: ce sont donc des éléments Lagrangien.

MAILLAGE



exemple de maillage de la surface du coussinet par éléments à 4 noeuds



exemple de maillage de la surface du coussinet par éléments à 8 noeuds

APPLICATION DE L'APPROXIMATION CHOISIE AU PROBLEME POSE

Pour le volume entier de l'écoulement le système d'équation s'écrit:

$$\begin{cases} [\mathbf{K}][\mathbf{P}] = [\mathbf{F}] \\ k_{ij} = \int_V k \left[\frac{\partial N_i}{\partial \theta} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} + \frac{\partial N_i}{\partial Z} \frac{\partial N_j}{\partial Z} \right] dV \quad \forall i=1,n ; j=1,n \\ F_i = \int_V f \cdot N_i dV \end{cases}$$

Nous allons calculer la matrice de rigidité \mathbf{K} et le vecteur force \mathbf{F} .

Soit un élément dont les n points géométriques ont pour coordonnées:

Nous avons alors pour tout point $M(\theta, z)$ intérieur à l'élément:

$$\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i N_i(\xi, \eta) \quad , \quad Z = \sum_{i=1}^n Z_i N_i(\xi, \eta)$$

d'où:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

donc:

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \sum_{L=1}^n \theta_L \frac{\partial N_L}{\partial \xi} & \sum_{L=1}^n Z_L \frac{\partial N_L}{\partial \xi} \\ \sum_{L=1}^n \theta_L \frac{\partial N_L}{\partial \eta} & \sum_{L=1}^n Z_L \frac{\partial N_L}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

par ailleurs:

$$dV = |\mathbf{J}| d\xi d\eta$$

d'où:

$$k_{ij} = \int_v k \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} & \frac{\partial N_i}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \theta} \\ \frac{\partial N_j}{\partial Z} \end{bmatrix} d\theta dZ$$

$$k_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} k \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} [J^{-1}]^T [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta$$

Pour le second membre:

donc:

$$F_i = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\sum_{j=1}^n f_j N_j \right) N_i |J| d\xi d\eta$$

CALCUL EXPLICITE DE LA MATRICE DE RIGIDITE [K]

L'équation () prend sa forme explicite, en effectuant tous les produits matriciels que contient cette équation et en se servant de l'annexe ():

$$K_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} k \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial Z}{\partial \eta} - \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial N_j}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial N_j}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) \right] \frac{1}{|J|} d\xi d\eta$$

CALCUL EXPLICITE DU VECTEUR FORCE [F]

D'après l'équation (), on a:

INTEGRATION NUMERIQUE

Les calculs de la matrice de rigidité K et du vecteur force F reviennent à effectuer des intégrales doubles sur le carré (-1,+1)x(-1,+1) bien que les intégrales soient celles de polynômes à deux variables de degré, l'intégration formelle n'est pas aisée a cause du calcul des coefficients de ces polynômes. Les méthodes d'intégration numérique seront donc employées.

METHODE *PRODUIT* DE GAUSS

Pour l'élément de référence carré, la méthode *produit* est souvent la plus utilisée. Elle peut s'exprimer:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} Y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} w_i w_j Y(\xi_i, \eta_j)$$

où:

r_1 et r_2 sont les points d'intégration,

w_1 et w_2 sont les coefficients de pondération correspondants,

ξ_i et η_j sont les coordonnées des points d'intégration correspondants.

PRECISION DE L'INTEGRATION

Par la méthode d'intégration de Gauss il faut 3 x 3 points pour intégrer exactement la matrice de rigidité K. Cependant, cette méthode est un peu trop précise puisqu'elle intègre des termes $x, h; i \leq 5; j \leq 5$.

Très souvent on utilise une intégration à 2 x 2 points pour l'élément quadratique; celle-ci donne d'excellents résultats. L'intégration est dite réduite.

On résume les coordonnées et les poids des points d'intégration adoptés dans notre travail dans le tableau suivant:

n	$\xi_i \eta_j$	$w_i w_j$
2x2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3x3	$\pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$	5/9
	0	8/9

REGIME DE FONCTIONNEMENT DYNAMIQUE

Pour ce régime de fonctionnement, nous résolvons l'équation qui caractérise l'aspect vibratoire dû à l'excitation du centre de l'arbre.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{H^3}{12} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{H^3}{12} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\dot{e}/\omega}{1-2\dot{\phi}/\varepsilon} \cos \theta \\ \text{Avec } Z = \frac{z}{L} ; H = \frac{h}{C} = 1 + \varepsilon \cdot \cos \theta ; \varepsilon = \frac{e}{C} ; \mathbf{P} &= \frac{P/\omega}{\mu \omega (R/C)^2 (1-2\dot{\phi}/\omega)} \end{aligned} \right\}$$

De la même manière qu'au régime stationnaire, on formule le problème par la technique des résidus pondéré:

$$R_v = - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial Z} \right) + f \right] = 0$$

avec:

$$k = \frac{h^3}{12} ; f = - \left[\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{\dot{e}/\omega}{1-2\dot{\phi}} \cos \theta \right]$$

On remarque que ce résidus prend la même forme qu'au régime stationnaire avec les mêmes conditions aux limites, donc, après la discrétisation, on trouve les mêmes formes explicites de la matrice de rigidité et du vecteur force.

CALCUL DES COEFFICIENTS DYNAMIQUES

Deux approches peuvent être utilisées :

- Différentiation numérique.
- Méthode de perturbation.

La première méthode est la plus simple à mettre en oeuvre, et également la plus utilisées. On résoud neuf fois l'équation de Reynolds:

a) pour la position d'équilibre statique:

$$e = e_0 ; \phi = \phi_0 ; \dot{e} = 0 ; \dot{\phi} = 0$$

b) on impose un petit déplacement sur excentricité:

$$e = e_0 \pm \Delta e ; \phi = \phi_0 ; \dot{e} = 0 ; \dot{\phi} = 0$$

on en déduit les coefficients de Raideur K_{rr} et K_{tr} ;

c) on impose un petit déplacement sur l'angle d'attitude:

$$e = e_0 \quad ; \quad \phi = \phi_0 \pm \Delta\phi \quad ; \quad \dot{e} = 0 \quad ; \quad \dot{\phi} = 0$$

on en déduit les coefficients de raideur K_{rr} et K_{tt} ;

d) on impose une petite vitesse selon la direction: \vec{r}

$$e = e_0 \quad ; \quad \phi = \phi_0 \quad ; \quad \dot{e} = \pm\Delta\dot{e} \quad ; \quad \dot{\phi} = 0$$

on en déduit les coefficients d'amortissement b_{rr} et b_{tr} ;

e) on impose une petite vitesse selon la direction: \vec{t}

$$e = e_0 \quad ; \quad \phi = \phi_0 \quad ; \quad \dot{e} = 0 \quad ; \quad \dot{\phi} = \pm\Delta\dot{\phi}$$

on en déduit les coefficients d'amortissement b_{tt} et b_{tr} .

Pour exprimer les coefficients dynamiques dans le repère fixe, il suffit d'utiliser les relations de transformation des composantes d'un tenseur du second ordre dans un changement de base

$$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi_0 & -\sin\phi_0 \\ \sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{rr} & k_{rt} \\ k_{tr} & k_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi_0 & \sin\phi_0 \\ -\sin\phi_0 & \cos\phi_0 \end{bmatrix}$$

des relations similaires pour les coefficients d'amortissement.

RESULTATS

INTRODUCTION

Dans le chapitre III nous avons établi des relations analytiques qui permettent de calculer la pression et les coefficients dynamiques pour un palier de longueur infiniment long ou infiniment court. Dans le chapitre IV nous avons présenté les équations et les méthodes de résolution qui permettent de calculer de façon numérique la pression et les coefficients d'un palier de longueur finie.

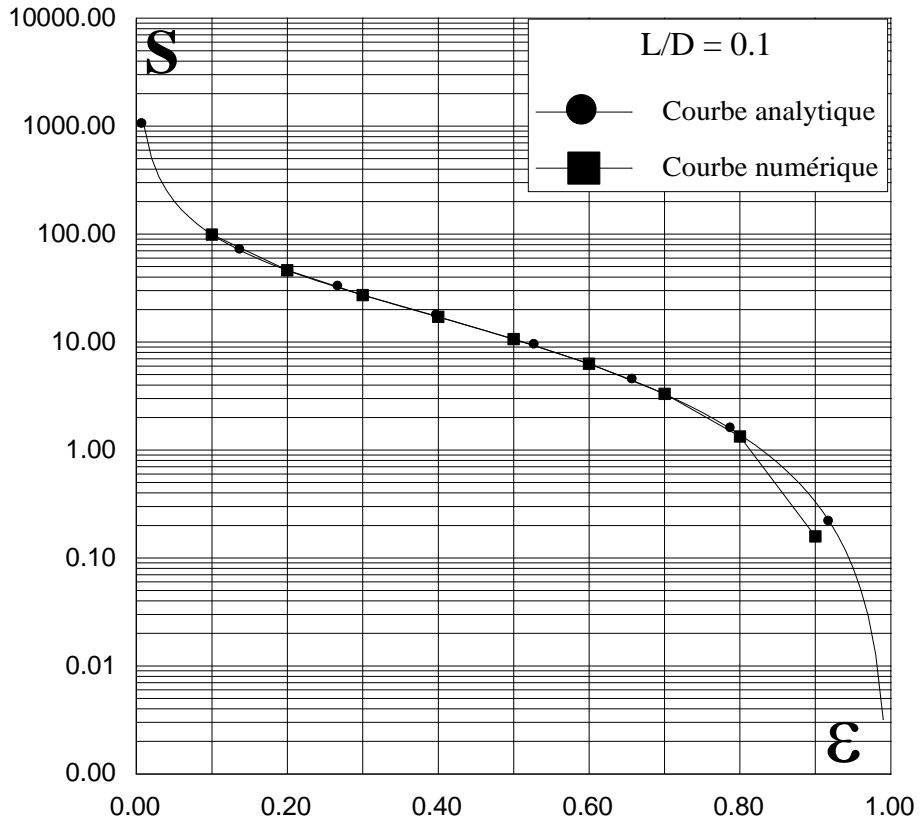
Dans ce chapitre nous allons:

- déduire le meilleur élément utilisé pour ce type de problème,
- de comparer les résultats obtenus aux résultats standards,
- voir l'influence du rapport L/D sur les caractéristiques statiques et dynamiques du palier cylindrique.

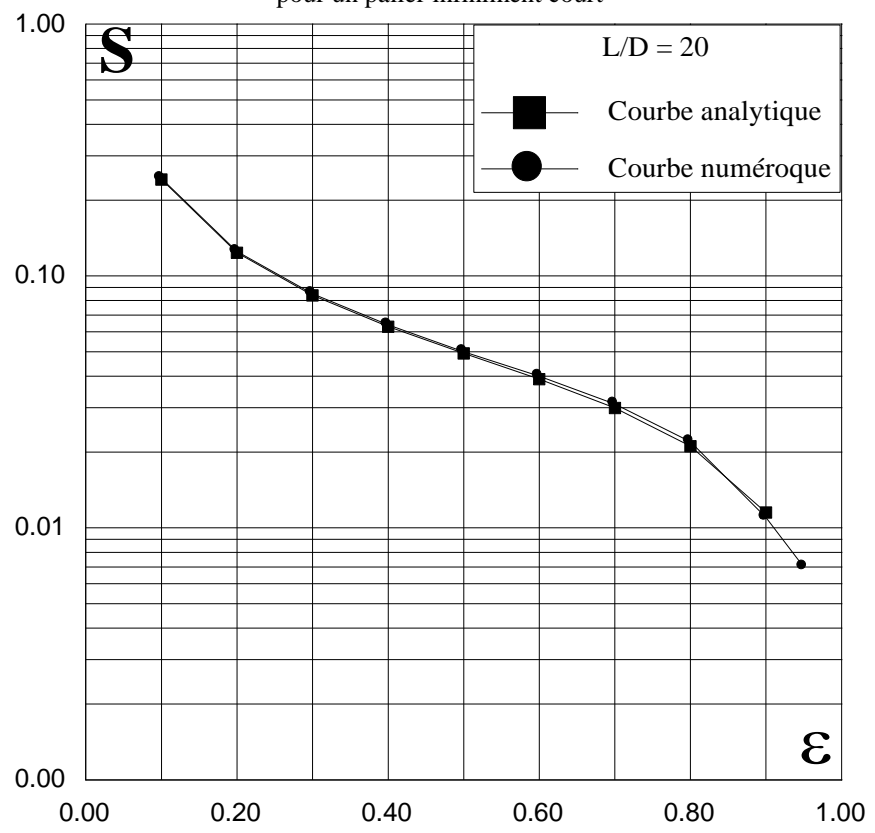
La courbe () nous donne la variation circonférentielle des pressions pour $\varepsilon=0.8$ où règne la pression maximale par rapport à la charge et par rapport à la ligne des centres, laquelle détermine le rayon d'épaisseur minimale.

La courbe () donne la variation longitudinale des pressions, lesquelles s'annulent dans les sections terminales et symétrient par rapport à l'axe $Z=0$.

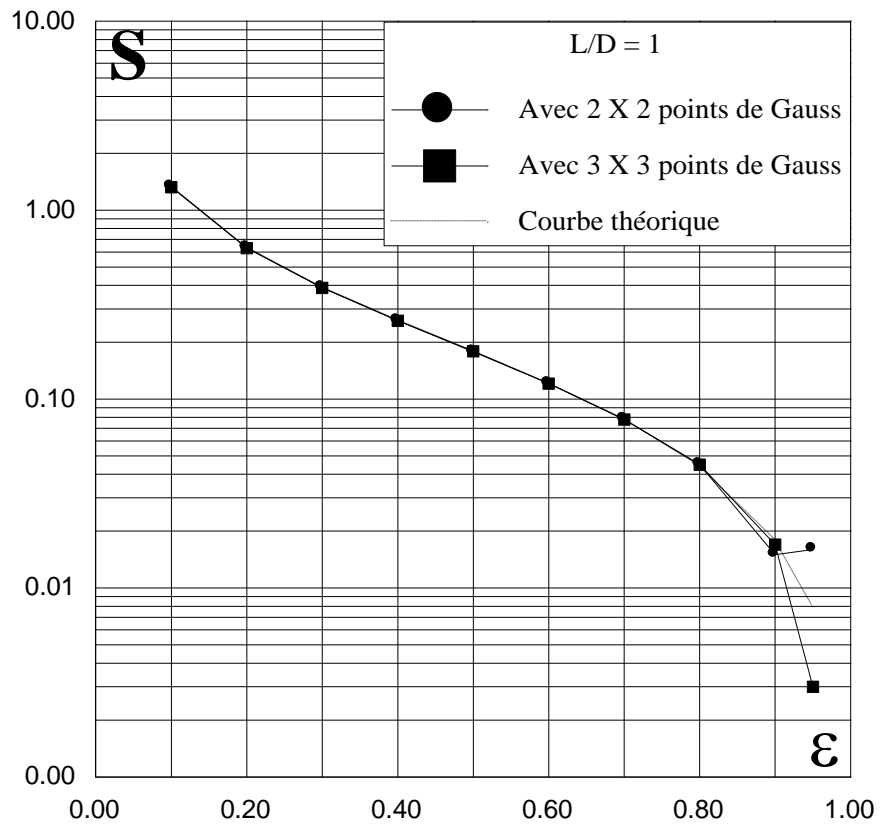
ε	S(10x2)	S(6x4)	S(14x2)	S(10x4)
0.1	1.295	1.328	1.299	1.328
0.2	0.628	0.632	0.630	0.631
0.3	0.387	0.389	0.388	0.389
0.4	0.259	0.262	0.260	0.26
0.5	0.178	0.182	0.178	0.178
0.6	0.120	0.124	0.120	0.121
0.7	0.077	0.075	0.077	0.078
0.8	0.045	0.020	0.045	0.045
0.9	0.015	0.077	0.018	0.015
0.95	0.021	0.063	0.008	0.016



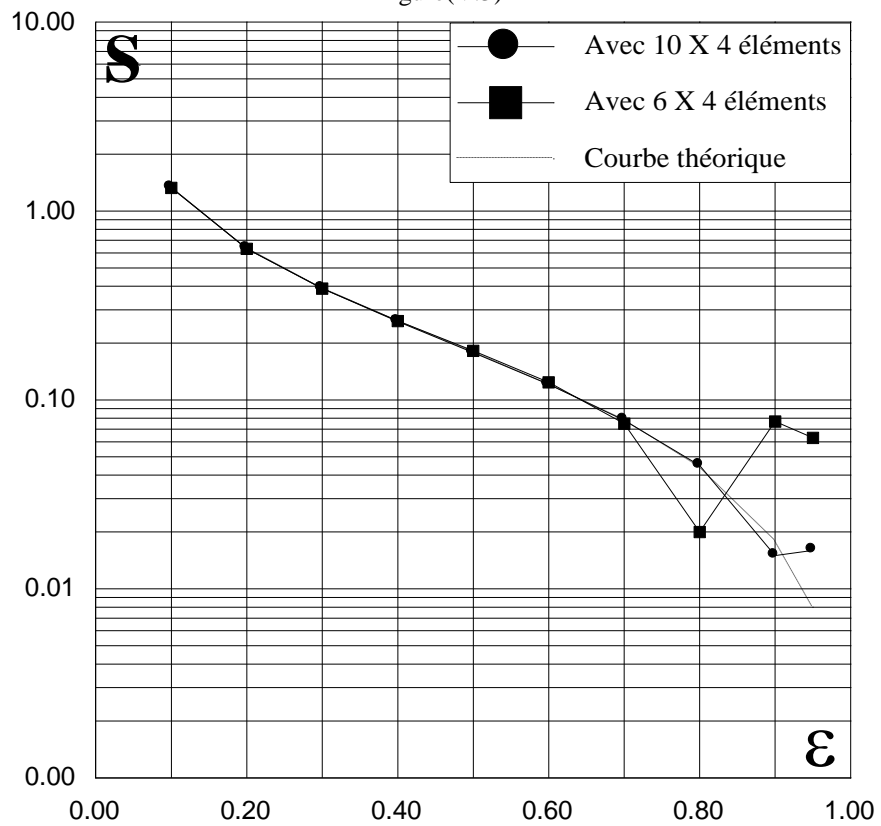
Figure(V.1) Nombre de Sommerfeld en fonction du jeu relatif pour un palier infiniment court



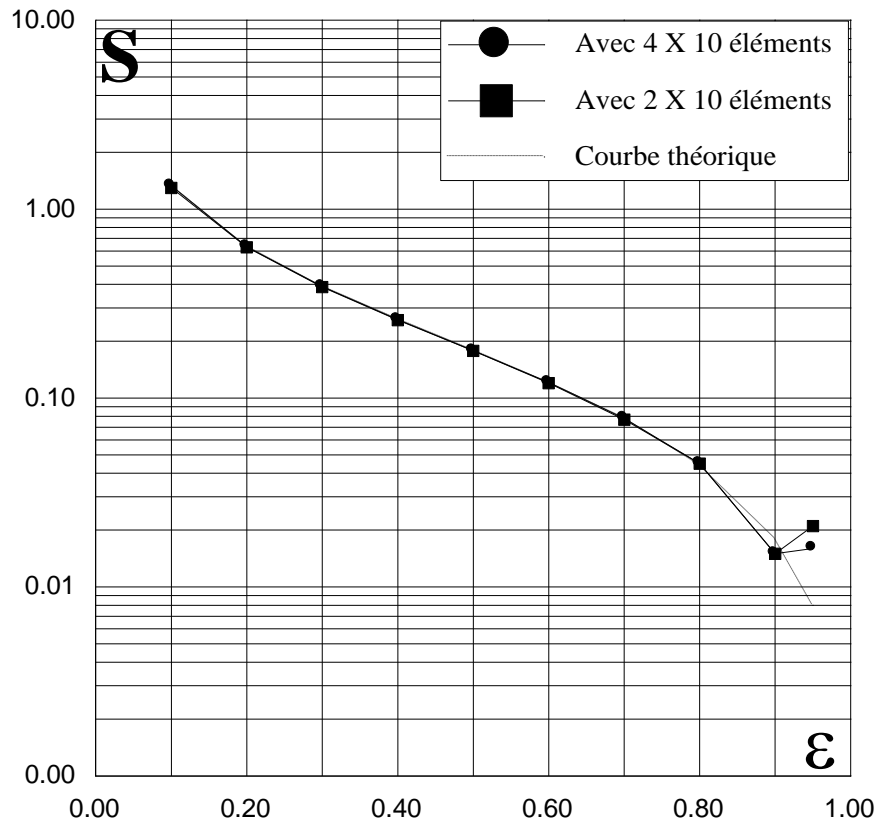
Figure(V.2) Nombre de Sommerfeld en fonction du jeu relatif pour un palier infiniment long



figure(V.3)



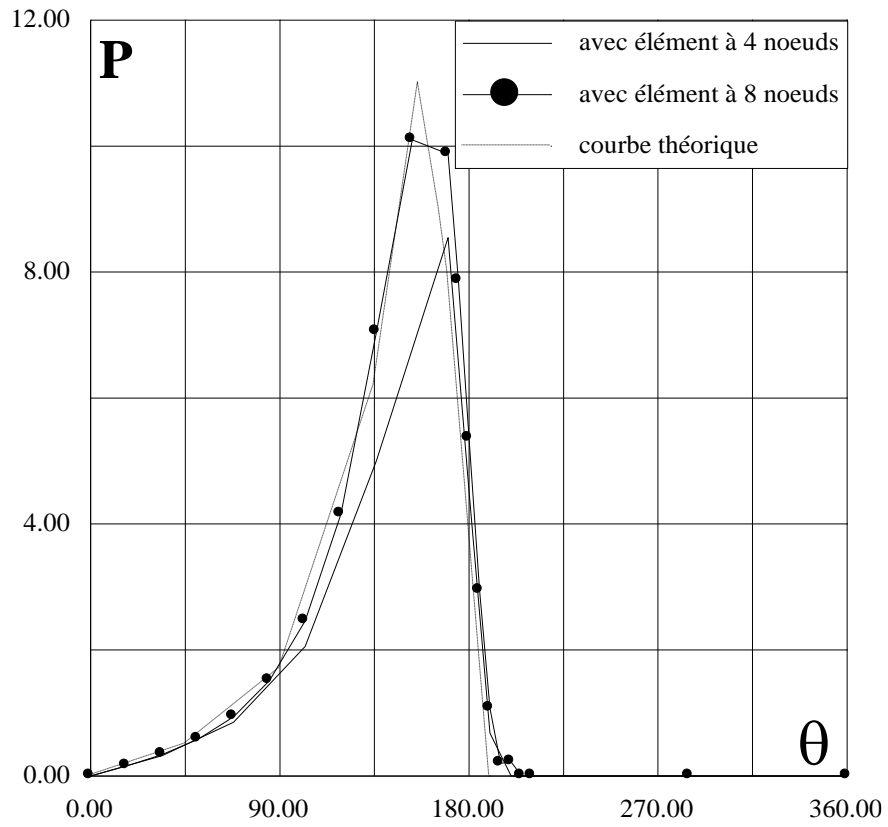
figure(V.4.a)



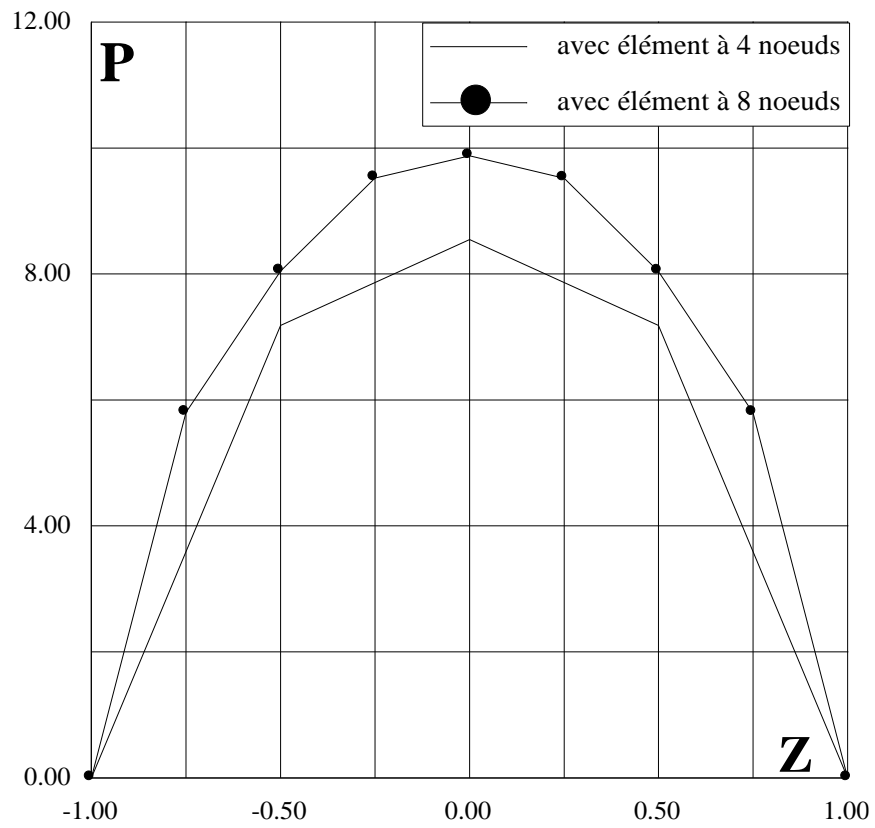
Figure(V.4.b)

ϵ	W	S	ϕ	f
0.1	0.479253	1.328	100.55	26.34
0.2	1.008499	0.631	106.12	12.7
0.3	1.638556	0.389	111.76	8.02
0.4	2.446735	0.26	117.5	5.59
0.5	3.566701	0.178	123.39	4.06
0.6	5.271234	0.121	129.6	2.98
0.7	8.199579	0.078	136.32	2.15
0.8	14.24629	0.045	143.82	1.49
0.9	43.30487	0.015	158.56	0.68
0.95	38.71781	0.016	154.33	1.07

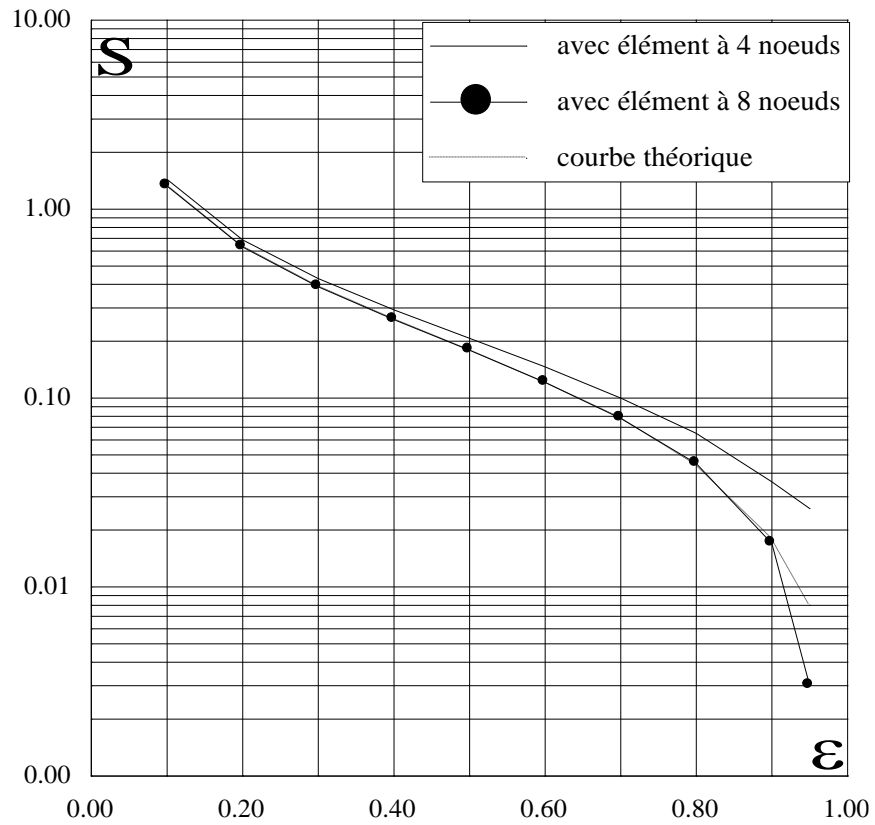
tableau 1 caractéristique statique (L/D = 1)



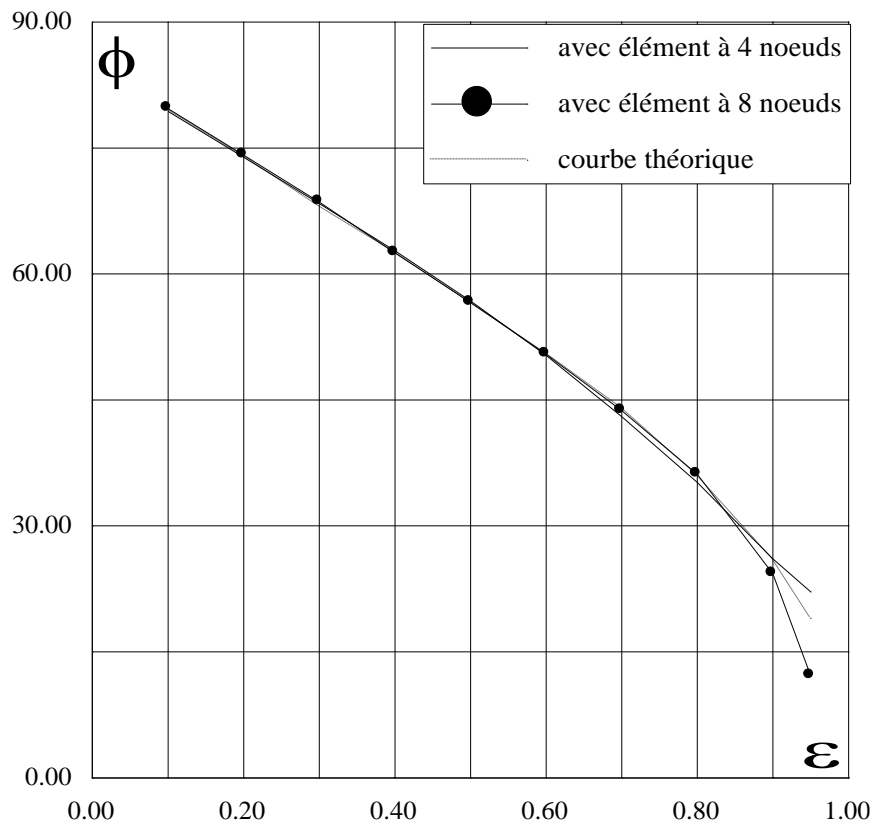
Figure(V-5): courbe de pression circonférentielle pour $\varepsilon = 0.8$, $L/D = 1$



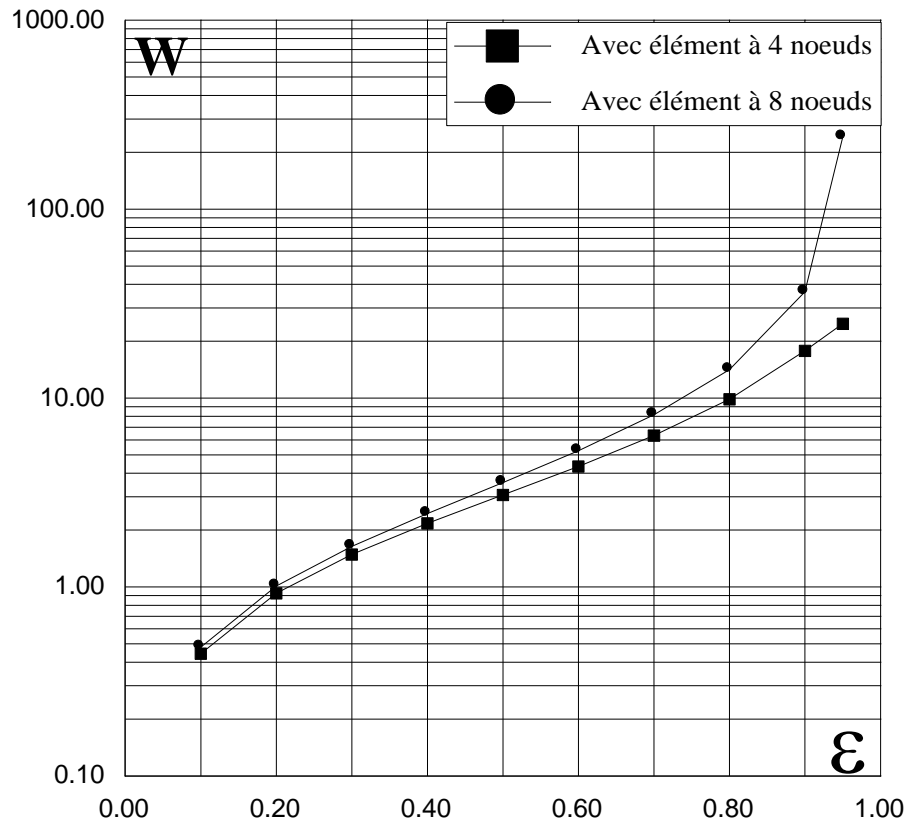
Figure(V-6): pression longitudinale pour $\varepsilon = 0.8$, $L/D = 1$



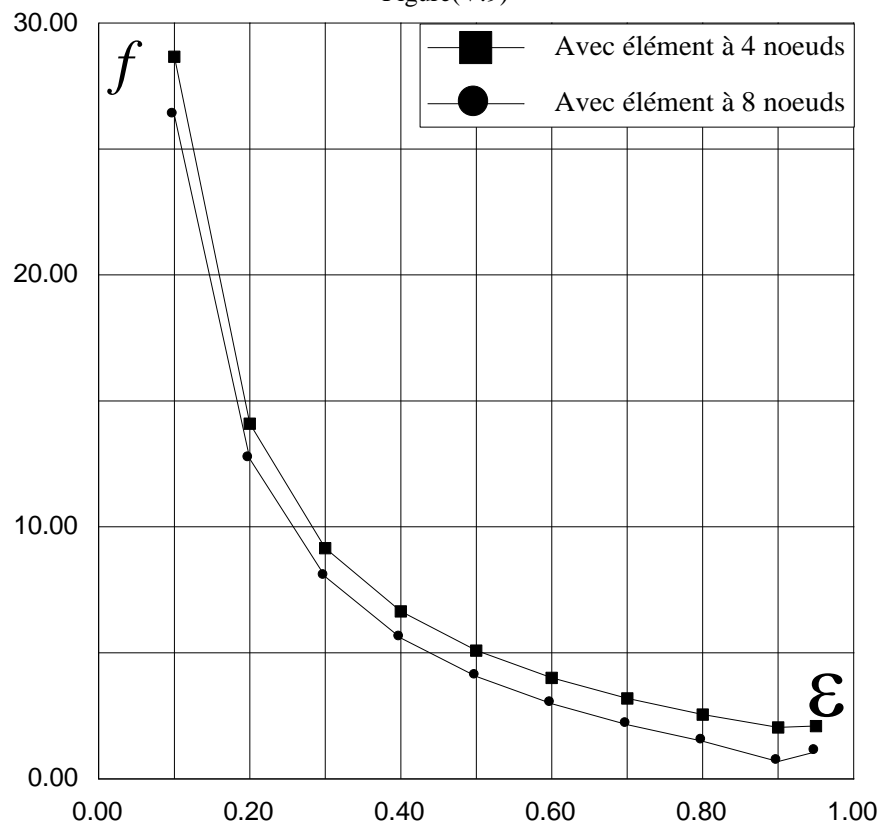
Figure(V-7): Courbe du nombre de Sommerfeld en fonction du jeu relatif ϵ
($L/D = 1$)



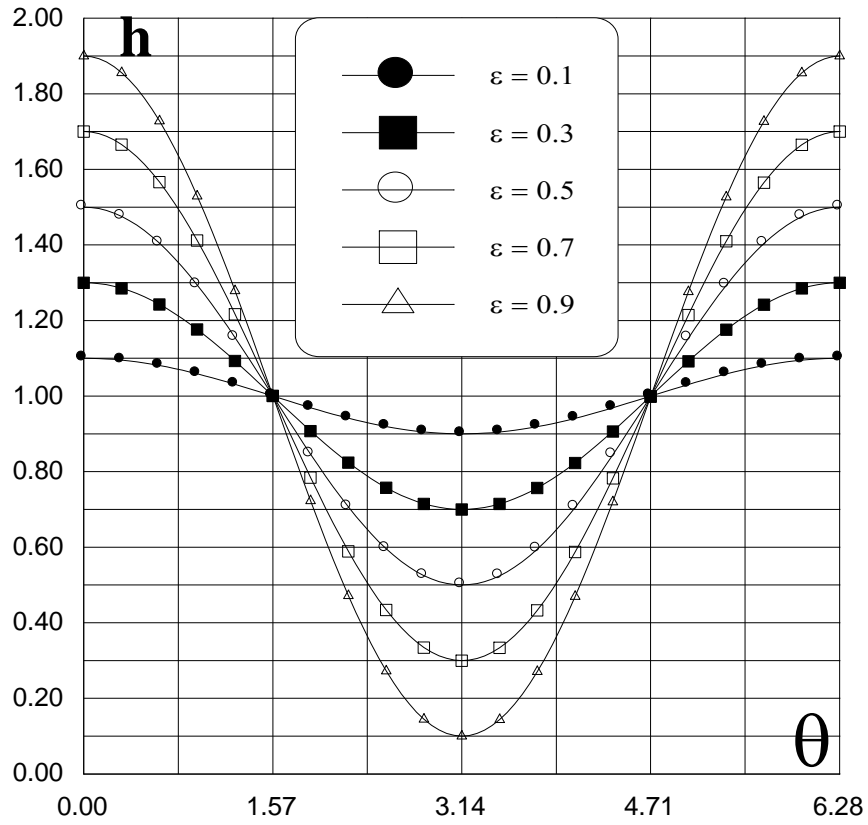
Figure(V-8): Courbe de l'angle de calage en fonction du jeu relatif



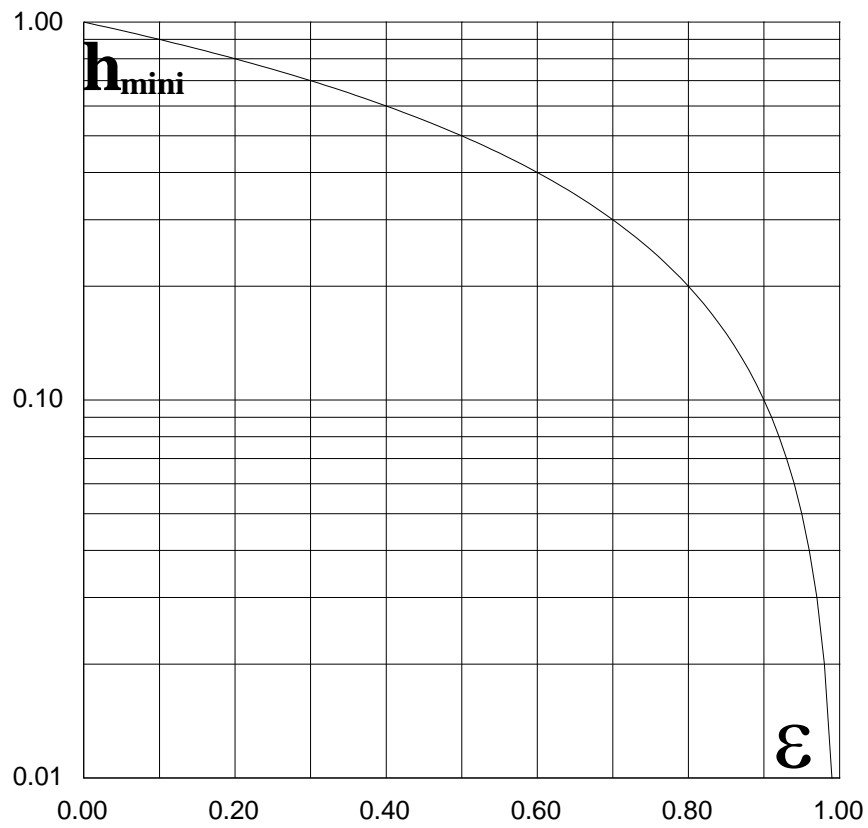
Figure(V.9)



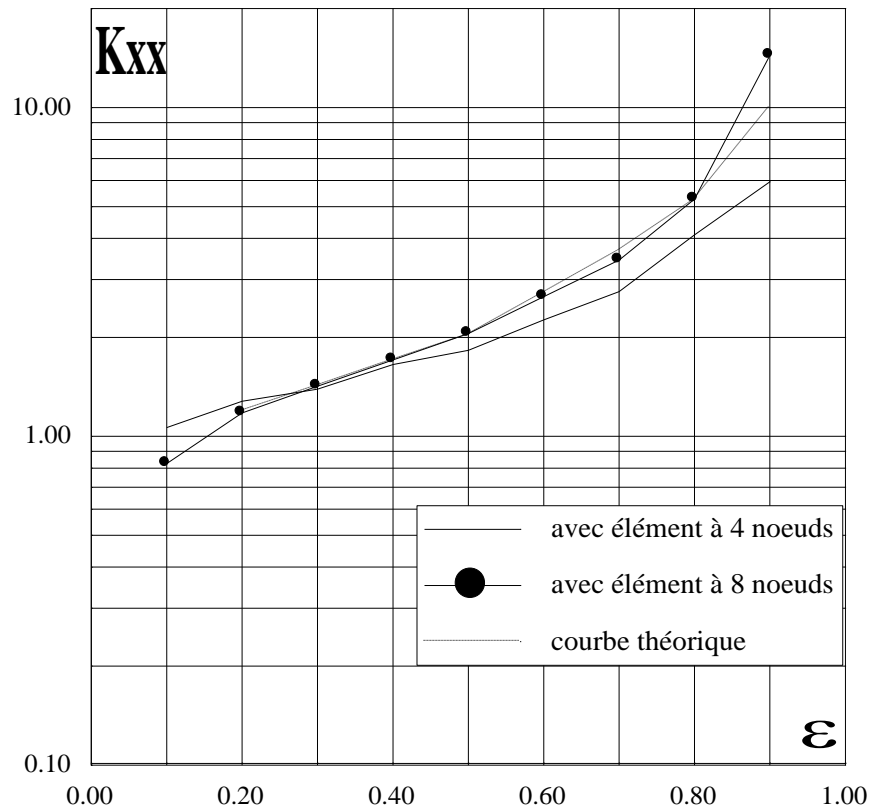
Figure(V.10)



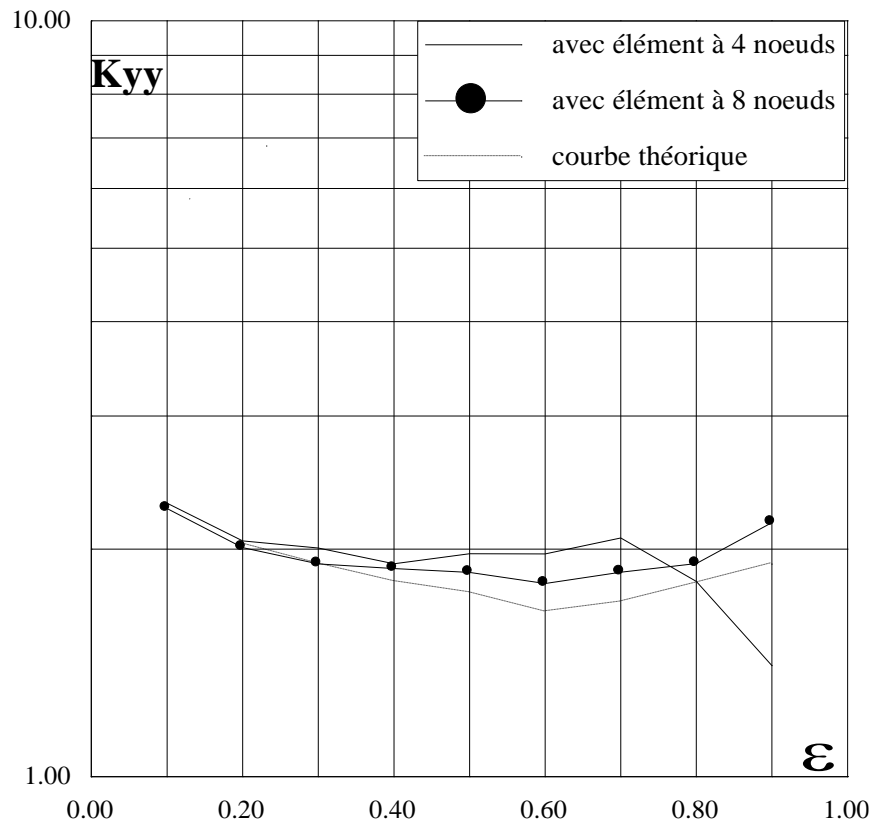
Figure(V-11) Variation de l'épaisseur du film pour différentes charges



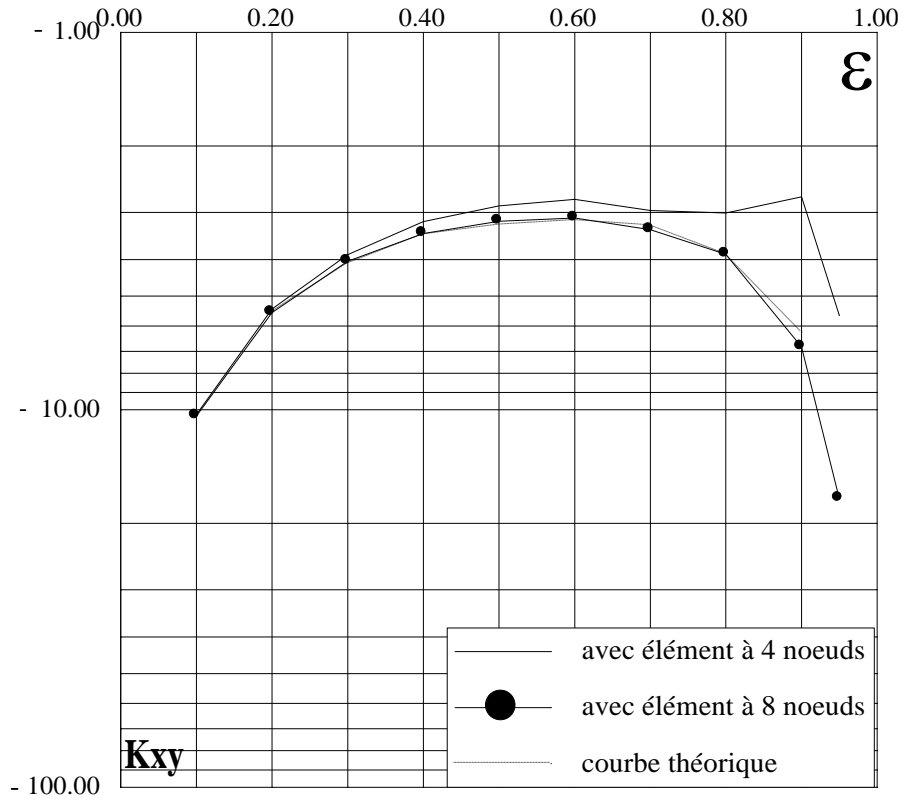
Figure(V-12) Variation de l'épaisseur minimale avec l'excentricité relative



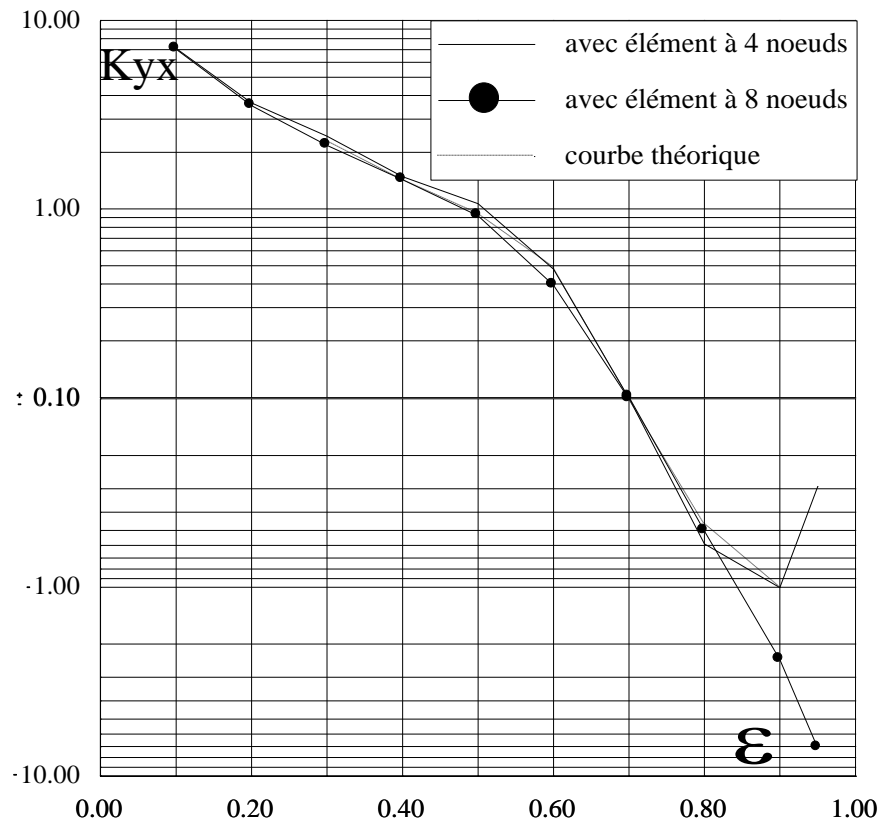
Figure(V-13): Courbe du coefficient de raideur K_{xx} en fonction du jeu relatif



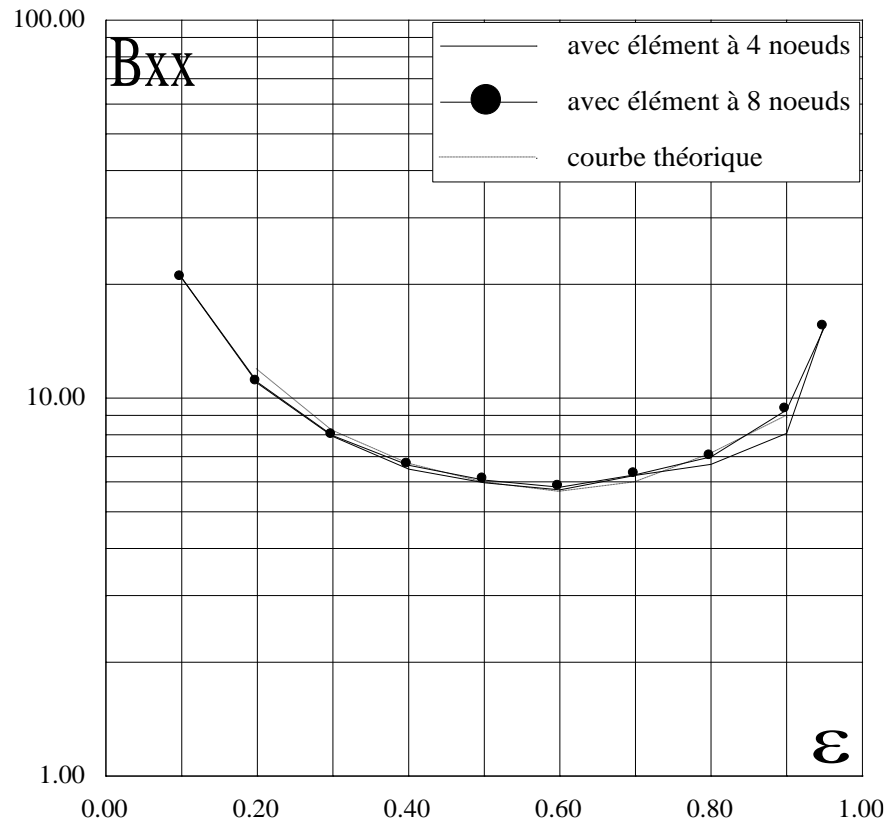
Figure(V-14): Courbe du coefficient de raideur K_{yy} en fonction du jeu relatif



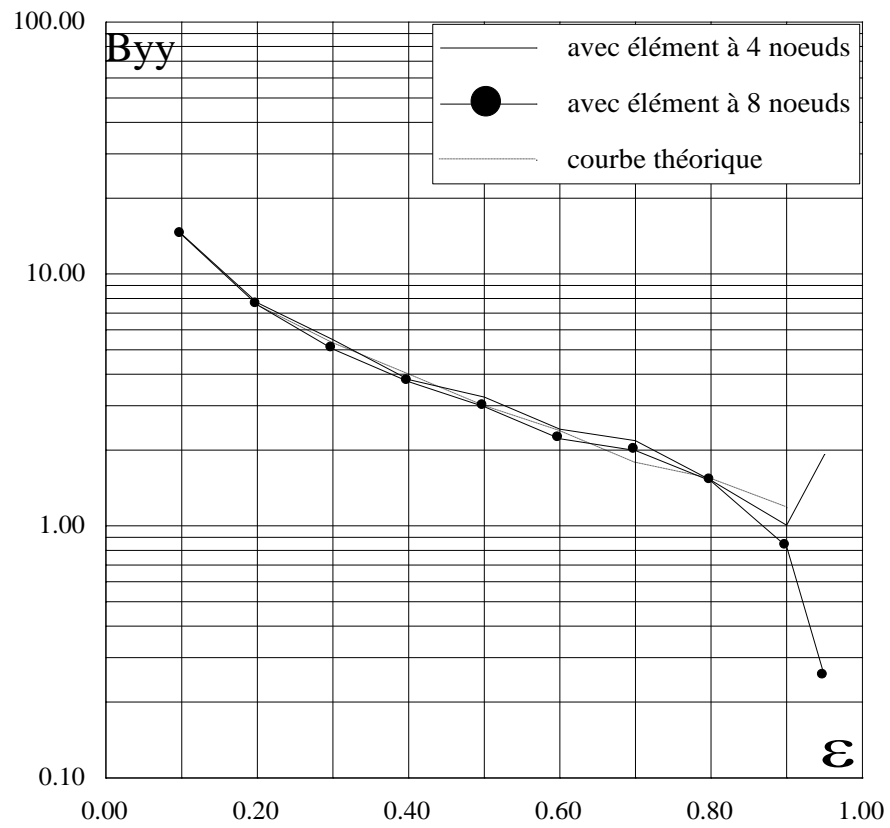
Figure(V-15): Courbe du coefficient de raideur K_{xy} en fonction du jeu relatif



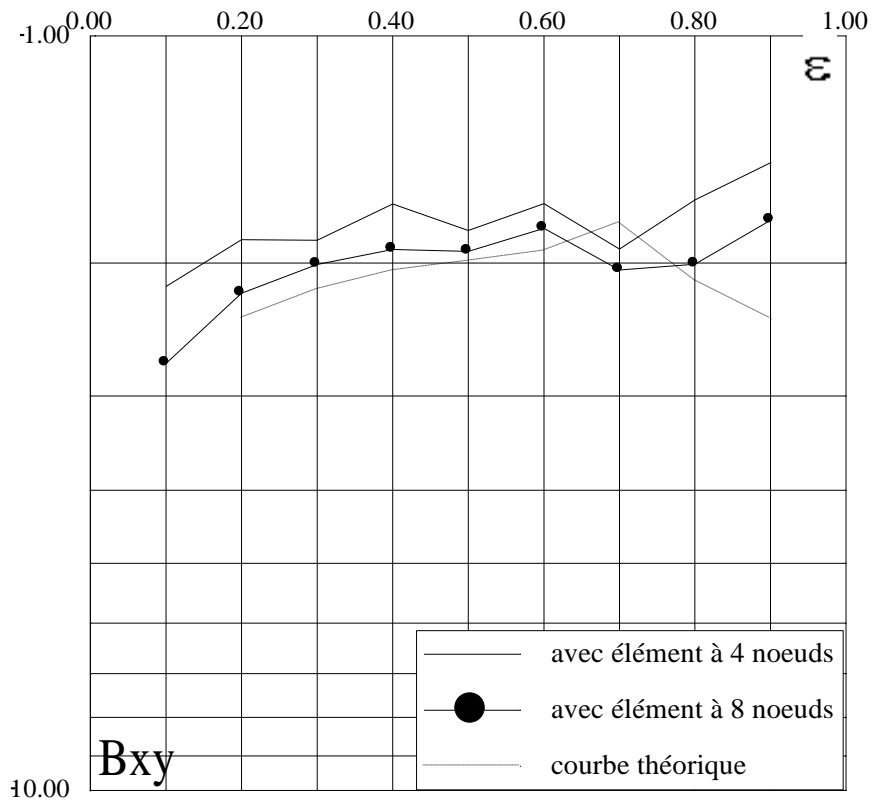
Figure(V-16): Courbe du coefficient de raideur K_{yx} en fonction du jeu relatif



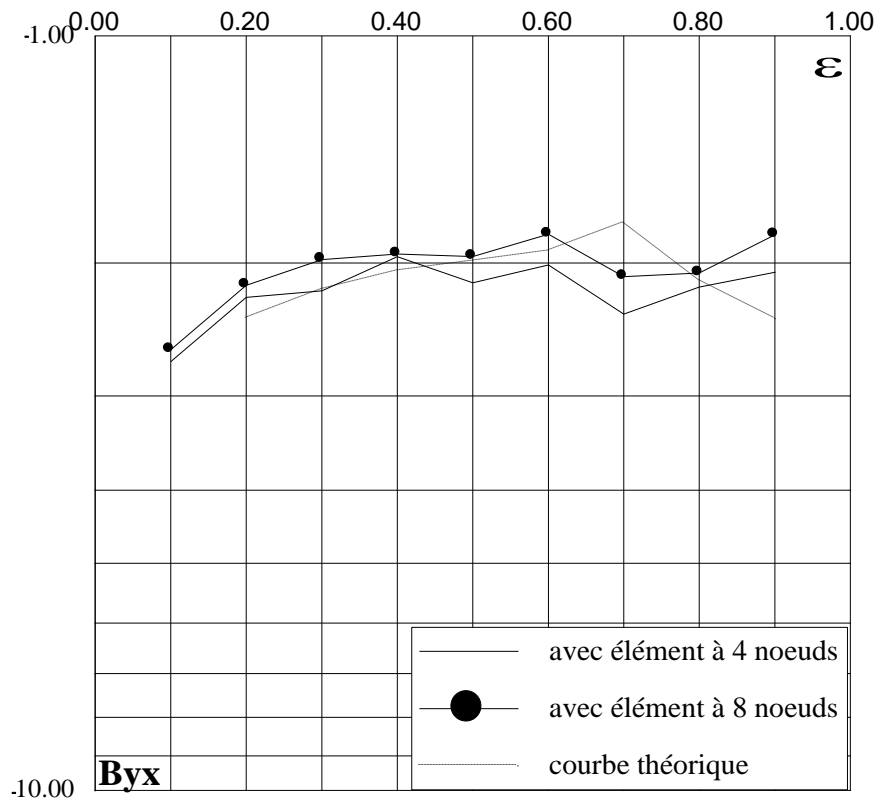
Figure(V-17): Courbe du coefficient d'amortissement B_{xx} en fonction du jeu relatif



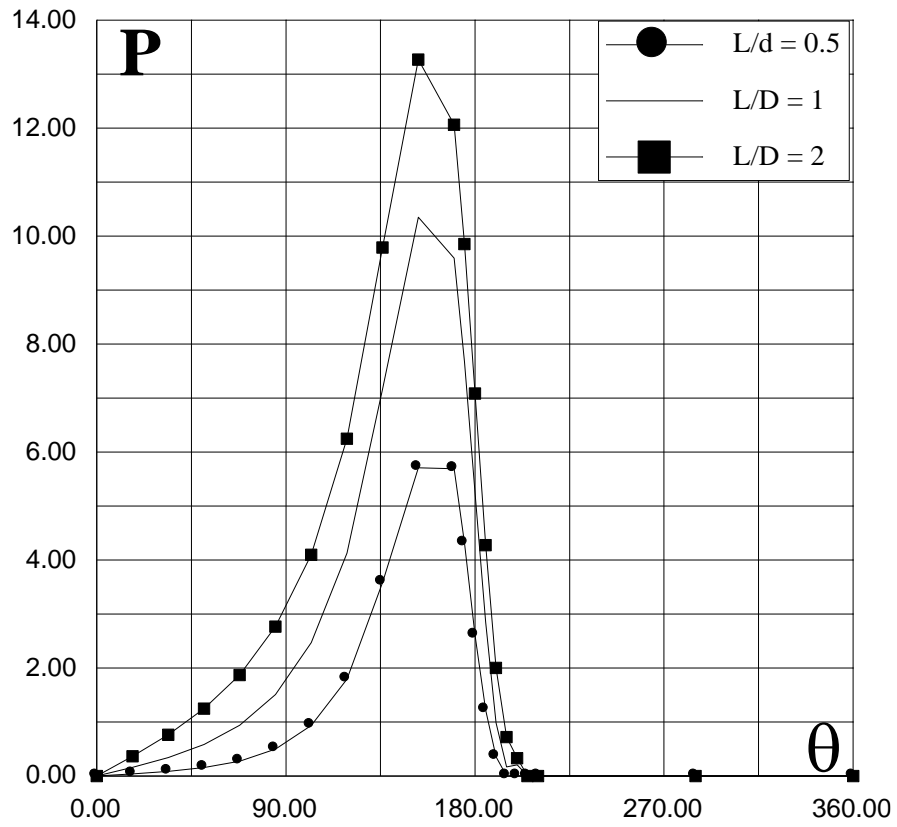
Figure(V-18): Courbe du coefficient d'amortissement B_{yy} en fonction du jeu relatif



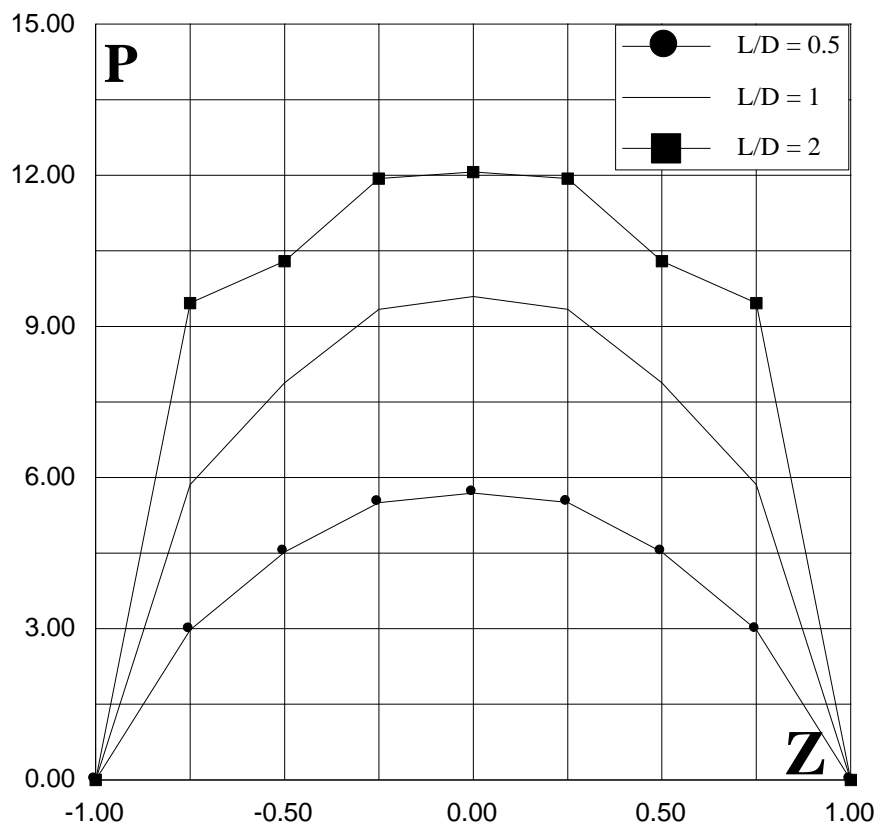
Figure(V-19): Courbe du coefficient d'amortissement B_{xy} en fonction du jeu relatif



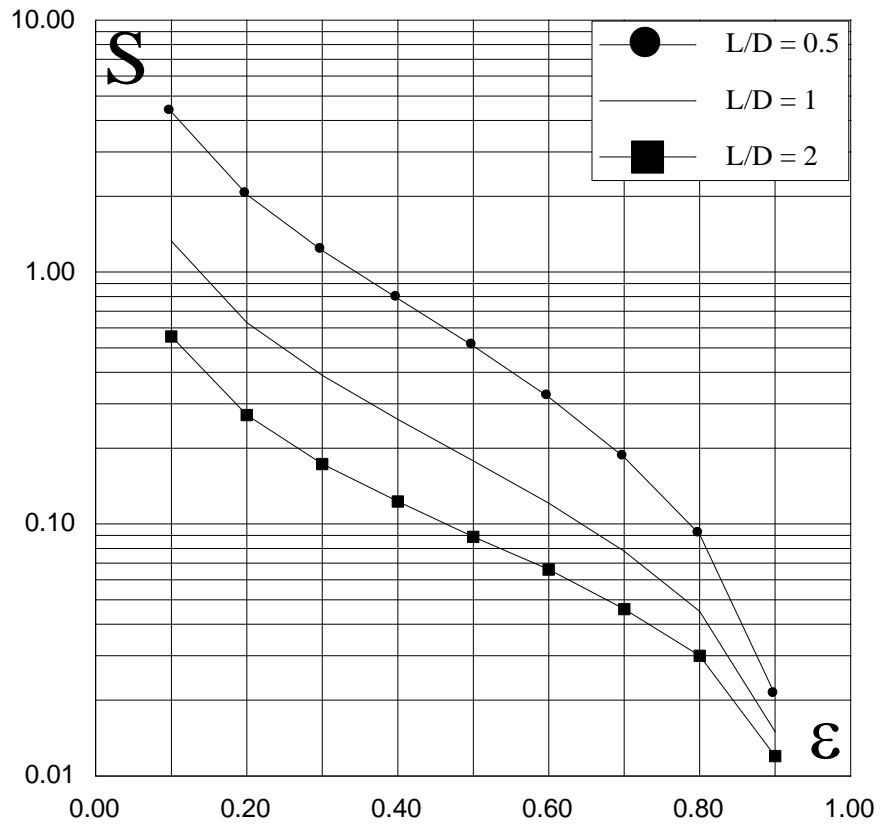
Figure(V-20): Courbe du coefficient d'amortissement B_{yx} en fonction du jeu relatif



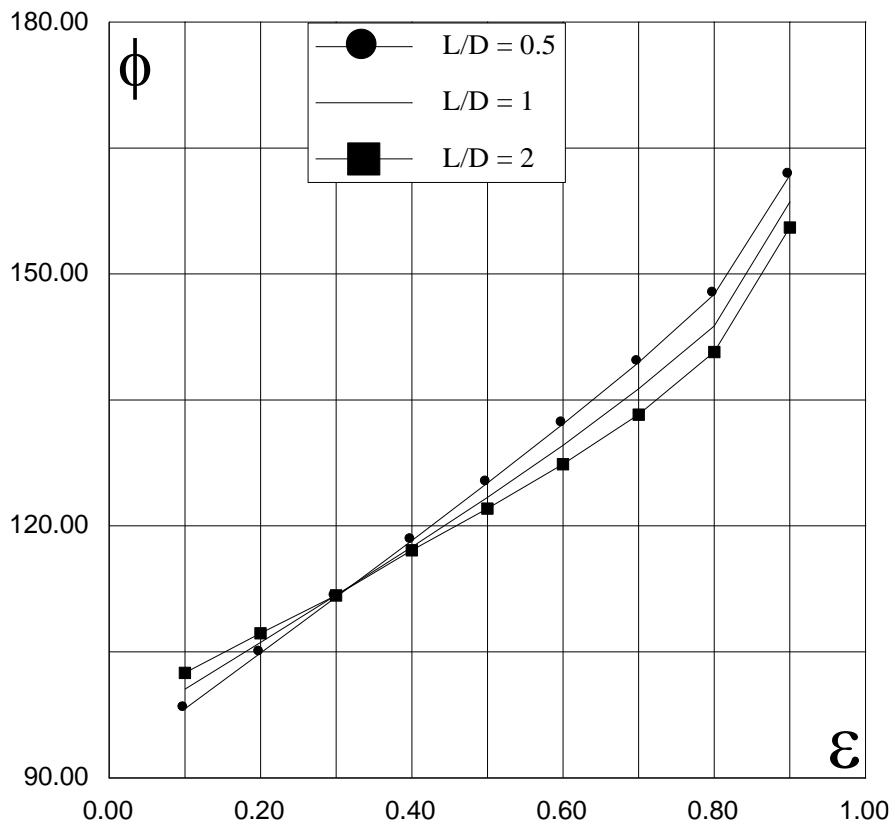
Figure(V-21)



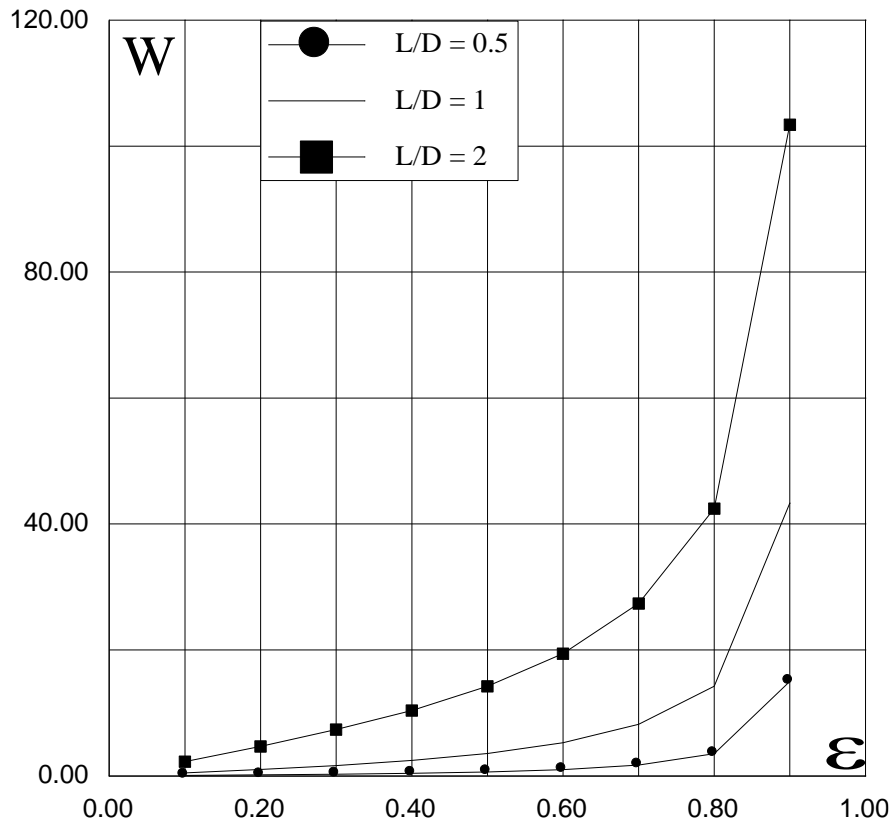
Figure(V-22)



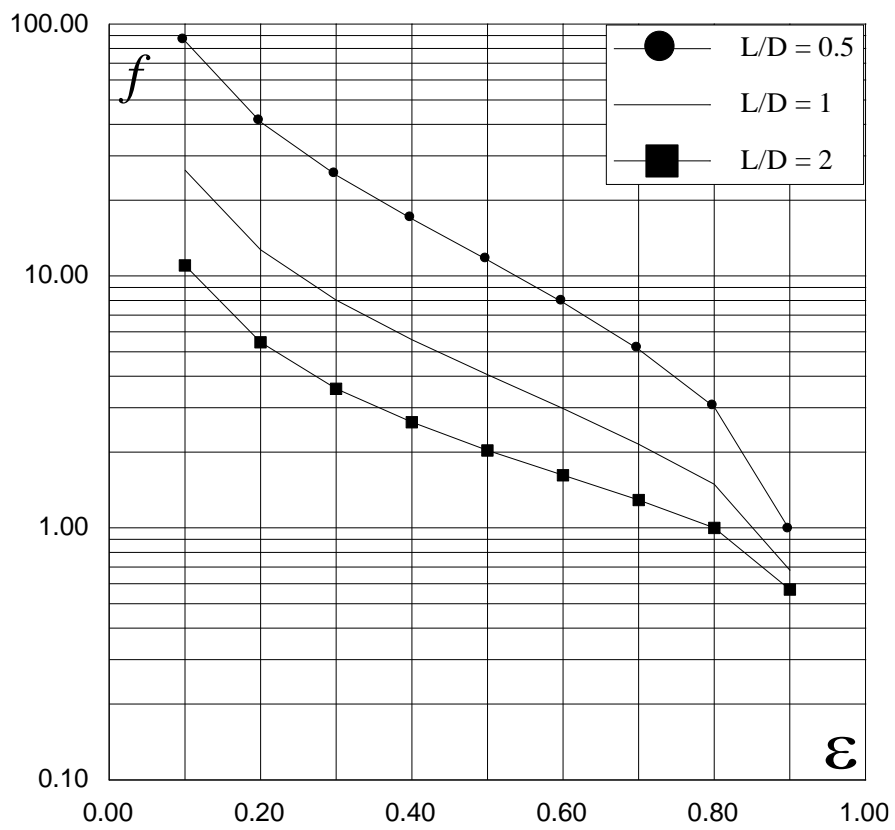
Figure(V-23)



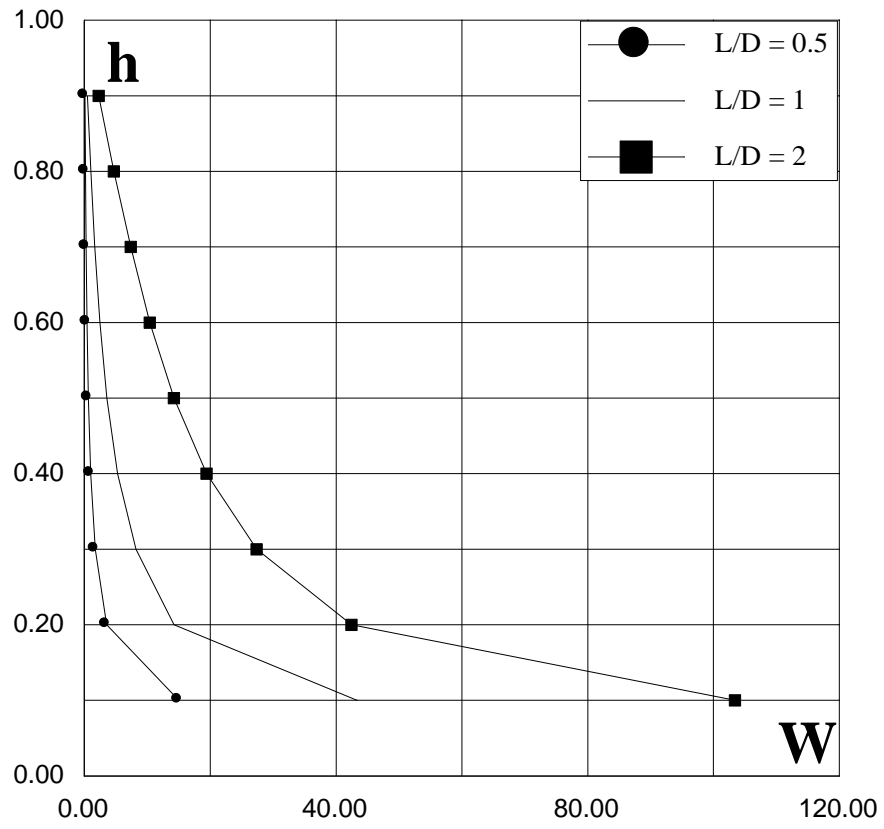
Figure(V-24)



Figure(V-25)



Figure(V-26)



Figure(V-27)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **FANTINO B.**
«Influence des défauts de forme dans la lubrification hydrodynamique».
Thèse soutenue à l'Université Claude Sarrad de Lyon, Juin 1973.
- [2] **PAN C.H.T.**
«Effects of turbulence, fluid-inertia and temperature on fluid film lubrication».
A.S.L.E. Advanced Seminar, October 13, 1972.
- [3] **PINKUS O., STERNLICHT B.**
«Theory of hydrodynamic lubrication».
Mc Graw Hill, Book Co. N. Y. p. 351-367, 1961.
- [4] **DI PRIMA R.C., STUART J.T.**
«Flow between eccentric rotating cylinders».
Trans. A.S.M.E. Journal of Lubrication Technology, vol. 94, n°3, p.266-274, 1972.
- [5] **PAN C.H.T., VOHR J.H.**
«Super laminar flow in bearings and seals».
Bearing and seal design in nuclear power machinery. A.S.M.E., p.219-245, 1967.
- [6] **FRENE J., GODET M.**
«Flow transition criteria in a journal bearing».
Trans. A.S.M.E. Journal of Lubrication Technology, séries F, vol. 96, n°1, P.135-140, 1974.
- [7] **FRENE J., GODET M.**
«Detection of Taylor vortex transition in very small clearances by hot film wall anemometry».
Tribology, vol. 6, n°5, p. 178-183, October 1973.
- [8] **TAYLOR G.I.**
«Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders».
Philosophical Transactions, séries A, vol. 223, p.289-343, 1923.
- [9] **DI PRIMA C.R.**
«A note of the stability of flow in loaded journal bearings».

A.S.L.E. Trans., vol. 6, n°3, p. 249-253, 1963.

- [10] **RITCHIE G.S.**
«On the stability of viscous flow between excentric rotating cylinders».
Journal of fluid Mechanics, vol. 32, part 1, p.131-144, 1968.
- [11] **DI PRIMA R.C., SSTUART J.T.**
«Non-local effects in the stability of flow between excentric rotating cylinders».
Journal of fluid Mechanics, vol. 54, part 3, p.393-415, 1972.
- [12] **FRENE J., GODET M.**
«Transition from laminar to Taylor vortex flow in journal bearing».
Tribology, vol. 4, n°4, p.216-217, 1971.
- [13] **FRENE J., GODET M.**
«Performance of plain journal bearing operating under vortex flow conditions».
Trans. A.S.M.E. Journal on lubrication Technology, vol.96,n°1,p145-150, 1974.
- [14.] **FRENE J.**
«Contribution à l'étude des régimes de transition dans les paliers lisses».
Thèse de Docteur-Ingenieur, présentée à la faculté des sciences de l'Université de Lyon le 17 octobre 1970.
- [15] **CONSTANTINESCU V.N., PAN C.H.T., HSING F.C.**
«A procedure for the analysis of bearings operating in the transition range between laminar and fully developed turbulent flow».
Rev. Roum. Sc. Tech. Mach. Appl., t. 16, n°5, p. 945-982, 1971.
- [16] **FRENE J., CONSTANTINESCU V.N**
«Operating characteristics of journal bearings in the transition region».
Proceeding of the second leads-Lyon Symposium. «Super laminar flow in bearings». Mechanical Engineering Publications, Paper VII.1, p. 121-124, 1975.
- [17] **FRENE J.**
«Régime d'écoulement non laminaire en films minces, application aux paliers lisses».
Thèse de Doctorat es sciences physiques, présentée à l'Université Claude Bernard de Lyon, le 26 octobre 1974.
- [18] **CONSTANTINESCU V.N.**
«Considertii asupra lubrificatiei tridimensionale inregim turbulent».

Studii si carastari de Mecanica Aplicata, t. 4, n°10, Acad, R.P.R., p.1093-112, 1959.

- [19] **NG C.W., PAN C.H.T.**
«A linearized turbulent lubrication theory».
Trans. A.S.M.E., séries D, vol.87, n°3, p.675-688, 1965.
- [20] **ELROD H.G., NG C.W.**
«A theory for turbulent fluid films and its application to bearings».
Trans. A.S.M.E. Journal of Lubrification Technology, vol. 89, n°3, p.346-362, 1967.
- [21] **CONSTANTINESCU V.N., PAN C.H.T., SMALLEY A.J., VOHR J.H.**
«Lubrification phenomena in a film of low kinematic viscosity».
Rev. Roum. Sc. Tech. Mach. Appl., t.15, n°2, p.479-502, 1970.
- [22] **CONSTANTINESCU V.N.**
«Basic relationships in turbulent lubrication and their extension to include thermal effects».
Trans. A.S.M.E. Journal of Lubrification Technology, vol. 95, n°2, p.147-154, 1973.
- [23] **FRENE J., NICOLAS D., GODET M.**
«Characteristics of plain turbulent bearings».
International Symposium of plain bearings, p.173-186, 24-26 october 1972, Vysoke Tatry, Tchecoslovaquie.
- [24] **FRENE J., GODET M.**
«Plain journal bearings operating under vortex and turbulent flow conditions; comparison between experimental and theoretical results».
Proceeding of the second Leads-Lyon Symposium. «Super Laminar flow in bearings». Mechanical Engineering publications, Paper X.3., p.194-198, 1975.
- [25] **SMITH M.I. and FULLER D.D.**
«Journal bearing operation and super laminar speeds».
Trans. A.S.M.E. vol.78, n°2, p.469-474, 1956.
- [26] **ORCUTT F.K.**
«Investigation of a partial Arc pad bearing in the superlaminar flow regime».
Trans. A.S.M.E. Journal of basic engineering, vol.87, n°1, p.145-152, 1965.

- [27] **SAFAR Z. and SZERI A.Z.**
«Thermohydrodynamic lubrication in laminar and turbulent regimes».
Trans. A.S.M.E. Journal of lubrication technology, vol.96, n°1, p.48-57, 1974.
- [28] **HUEBNER K.H.**
«Solution of the pressure and temperature in thrust bearings operating in the thermohydrodynamic turbulent regime».
Trans. A.S.M.E. Journal of lubrication technology, vol.96, n°1, p 58-68, 1974.
- [29] **GREGORY R.S.**
«Operating characteristics of a fluid-film thrust bearing subjected to high shaft speeds».
Proceedings of the second Leeds-Lyon Symposium «Super laminar flow in bearings». Mechanical Engineering publications, PaperVIII.4, p.154-162, 1975.
- [30] **CAPITAO J.W., GREGORY R.S. and WHITFORD**
«Effects of high operating speeds on tilting pad thrust bearing performance».
Trans. A.S.M.E. Journal of lubrication technology, vol.98, n°1, p.73-80, 1976.
- [31] **GARDNER W.W. and ULSCHMID J.G.**
«Turbulence effects in two journal bearing applications».
Trans. A.S.M.E. Journal of lubrication technology, vol.96, n°1, p.15-21, 1974.
- [32] **O.C.ZIENKIEWICZ**
«The Finite Element Method in Engineering Science».
Mc GRAW-Hill, New York, 3rd édition, 1977
- [33] **H.U. AKAY ET A. ECER**
«Transonic Flow Computations in Cascades Using Finite Element Method».
A.S.M.E., paper N° 81-GT-4, December 1980
- [34] **H.DECONICK et CH. HIRSCH**
«Finite element Methods for Transonic Blade-To-Blade Calculation in Turbomachines».
A.S.M.E., paper N° 81-GT-5 December 1980

- [35] **ALI MOHAMED ALI**
«Contribution à l'étude des paliers hybrides prise en compte de la compressibilité du fluide dans les alvéoles».
These de Doctorat , Université de Poitiers, 1994
- [36] **S.C.ZERARKA et S.DJOUDI**
«Etude d'un écoulement quasi-tridimensionnel dans une roue de turbomachine par la méthode des éléments finis».
These d'Ingeniorat, E.N.P 1995
- [37] **RAYMOND BRUN**
«Manuel du Mécanicien et du Thermicien».
éditions Technip, 1977
- [38] **L.BOURGAIN, R.DART, J.BOURGAIN**
«Machines tournantes et circuits pulsés».
Bordas, Paris, 1988
- [39] **GOURI DHATT, GILBERT TOUZOT**
«une présentation de la méthode des éléments finis».
Deuxieme édition, Maloine Editeur, 1984
- [40] **I.M. SMITH and D.V.GRIFFITHS**
«Programing The Finite Element Method».
Second Edition
Chichester, New York, Brisbane. Toronto. Singapore
- [41] **C.H.HIRSH et G.WARZEE**
«A Finite Element Method For Through Flow Calculations in Turbomachines».
A.S.M.E. journal of fluids engineering. September 1994
- [42] **R. BOUDET**
«Paliers Hydrodynamiques».
D.E.A - Conversion De L'énergie
- [43] **R.COMOLET**
«Mécanique expérimentale des Fluides».
Tome II , 4eme Edition, 1994
- [44] **R.OUZIAUX et J.PERRIER**
«Mécanique des Fluides Appliquée».
3eme Edition 1978

ANNEXE A

CONVERSION D'UN PROBLEME ELLIPTIQUE EN EQUATIONS ALGEBRIQUES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

La forme générale des matrices élémentaires k_e , a_e , f_e and h_e qui sont nécessaires pour formuler et résoudre un problème elliptique sont indépendantes du type d'élément, cette forme est indiquée sur la figure ci-dessus

$$\begin{array}{|l}
 \nabla^2 P + f = 0 & \text{sur } D \\
 P = g & \text{sur } \Gamma_1 \\
 \frac{\partial P}{\partial n} + \alpha P = h & \text{sur } \Gamma_2
 \end{array}
 \Rightarrow
 \boxed{K_G P_G = F_G}$$

où:

$$K_G = \sum_e k_G + \sum_e a_G$$

$$F_G = \sum_e f_G + \sum_e h_G$$

avec:

$$k_e = \iiint_{D_e} \left(\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial N^T}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial N^T}{\partial y} \right) dV$$

$$f_e = \iiint_{D_e} N f dV$$

$$a_e = \int_{\gamma_{2e}} N \alpha N^T dS$$

$$h_e = \int_{\gamma_{2e}} N h dS$$

ANNEXE B

TRANSFORMATION DES OPERATEURS DE DERIVATION

Les opérations du problème physique étudié sont écrites sur le domaine réel. Cependant, l'approximation sur l'élément réel est souvent compliquée, nous utilisons systématiquement l'approximation sur l'élément de référence.

toutes les expressions qui impliquent des dérivées en θ et Z sont transformées en dérivées en ξ et η grâce à la matrice de transformation dite matrice Jacobienne [J].

EXPRESSION DE LA MATRICE JACOBIENNE

La matrice Jacobienne [J] de la transformation isoparamétrique $(\theta, Z) \rightarrow (\xi, \eta)$ est donnée par:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial Z}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Pour l'élément quadratique à 8 noeuds, les termes de [J] sont:

$$J_{11} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0.25(1-\eta)(2\xi+\eta)\theta_1 + 0.25(1-\eta)(2\xi-\eta)\theta_2 + 0.25(1+\eta)(2\xi+\eta)\theta_3 + \\ + 0.25(1+\eta)(2\xi-\eta)\theta_4 - \xi(1-\eta)\theta_5 + 0.5(1-\eta^2)\theta_6 - \xi(1+\eta)\theta_7 - 0.5(1-\eta^2)\theta_8$$

$$J_{12} = \frac{\partial Z}{\partial \xi} = 0.25(1-\eta)(2\xi+\eta)Z_1 + 0.25(1-\eta)(2\xi-\eta)Z_2 + 0.25(1+\eta)(2\xi+\eta)Z_3 + \\ + 0.25(1+\eta)(2\xi-\eta)Z_4 - \xi(1-\eta)Z_5 + 0.5(1-\eta^2)Z_6 - \xi(1+\eta)Z_7 - 0.5(1-\eta^2)Z_8$$

$$J_{21} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0.25(1-\xi)(\xi+2\eta)\theta_1 + 0.25(1+\xi)(-\xi+2\eta)\theta_2 + 0.25(1+\xi)(\xi+2\eta)\theta_3 + \\ + 0.25(1-\xi)(-\xi+2\eta)\theta_4 - 0.5(1-\xi^2)\theta_5 - \eta(1+\xi)\theta_6 + 0.5(1-\xi^2)\theta_7 - \eta(1-\xi)\theta_8$$

$$J_{22} = \frac{\partial Z}{\partial \eta} = 0.25(1-\xi)(\xi+2\eta)Z_1 + 0.25(1+\xi)(-\xi+2\eta)Z_2 + 0.25(1+\xi)(\xi+2\eta)Z_3 + \\ + 0.25(1-\xi)(-\xi+2\eta)Z_4 - 0.5(1-\xi^2)Z_5 - \eta(1+\xi)Z_6 + 0.5(1-\xi^2)Z_7 - \eta(1-\xi)Z_8$$

Pour l'élément quadratique à 4 noeuds, les termes de [J] sont:

$$J_{11} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -0.25(1-\eta)\theta_1 + 0.25(1-\eta)\theta_2 + 0.25(1+\eta)\theta_3 - 0.25(1+\eta)\theta_4$$

$$J_{12} = \frac{\partial Z}{\partial \xi} = -0.25(1-\eta)Z_1 + 0.25(1-\eta)Z_2 + 0.25(1+\eta)Z_3 - 0.25(1+\eta)Z_4$$

$$J_{21} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = -0.25(1-\xi)\theta_1 - 0.25(1+\xi)\theta_2 + 0.25(1+\xi)\theta_3 + 0.25(1-\xi)\theta_4$$

$$J_{22} = \frac{\partial Z}{\partial \eta} = -0.25(1-\xi)Z_1 - 0.25(1+\xi)Z_2 + 0.25(1+\xi)Z_3 + 0.25(1-\xi)Z_4$$

EXPRESSION DE LA MATRICE JACOBIENNE INVERSE

La matrice Jacobienne inverse [j] de la transformation isoparamétrique $(\xi, \eta) \rightarrow (\theta, Z)$ est donnée par:

$$[j] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} & \frac{\partial \xi}{\partial Z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \theta} & \frac{\partial \eta}{\partial Z} \end{bmatrix}$$

avec:

$$[j] = [J^{-1}] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

où:

$$\det[J] = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$$

Noeuds	N	$\partial N/\partial \xi$	$\partial N/\partial \eta$
1	$0.25(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta)$	$0.25(1-\eta)(2\xi+\eta)$	$0.25(1-\xi)(\xi+2\eta)$
2	$0.25(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta)$	$0.25(1-\eta)(2\xi-\eta)$	$0.25(1+\xi)(-\xi+2\eta)$
3	$0.25(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta)$	$0.25(1+\eta)(2\xi+\eta)$	$0.25(1+\xi)(\xi+2\eta)$
4	$0.25(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta)$	$0.25(1+\eta)(2\xi-\eta)$	$0.25(1-\xi)(-\xi+2\eta)$
5	$0.5(1-\xi^2)(1-\eta)$	$-\xi(1-\eta)$	$-0.5(1-\xi^2)$
6	$0.5(1+\xi)(1-\eta^2)$	$0.5(1-\eta^2)$	$-\eta(1+\xi)$
7	$0.5(1-\xi^2)(1+\eta)$	$-\xi(1+\eta)$	$0.5(1-\xi^2)$
8	$0.5(1-\xi)(1-\eta^2)$	$-0.5(1-\eta^2)$	$-\eta(1-\xi)$

Noeuds	N	$\partial N/\partial \xi$	$\partial N/\partial \eta$
1	$0.25(1-\xi)(1-\eta)$	$-0.25(1-\eta)$	$-0.25(1-\xi)$
2	$0.25(1+\xi)(1-\eta)$	$0.25(1-\eta)$	$-0.25(1+\xi)$
3	$0.25(1+\xi)(1+\eta)$	$0.25(1+\eta)$	$0.25(1+\xi)$
4	$0.25(1-\xi)(1+\eta)$	$-0.25(1+\eta)$	$0.25(1-\xi)$