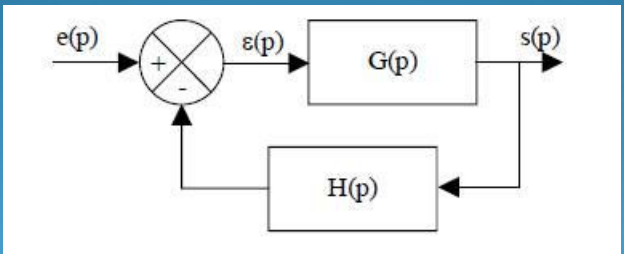
Modélisation mathématique et Dynamique des systèmes asservis



Master 1- Génie Industriel
Spécialité Génie Industriel

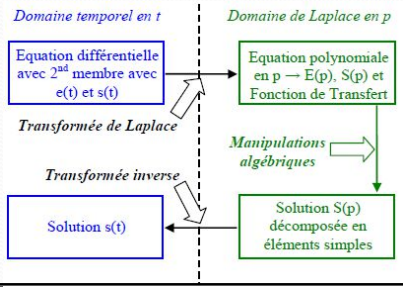
1

Chapitre 2

Modélisation mathématique et Dynamique des systèmes asservis

1. Modélisation mathématique des systèmes asservis

2. Dynamique des systèmes asservis



$$f\left[e(t), s(t), \frac{de(t)}{dt}, \frac{ds(t)}{dt} \ldots\ldots\right] = 0$$

2

1. Modélisation mathématique des systèmes asservis

$$f\left[e(t), s(t), \frac{de(t)}{dt}, \frac{ds(t)}{dt} \ldots\ldots\right] = 0$$

1.1. Définitions
1.2. Modélisation par la transformée de Laplace
1.3. La fonction de transfert
1.4. Stabilité d'un système asservi
1.5. Précision d'un système asservi

classe	0	1	2	3
échelon	$\frac{U}{1+To}$	0	0	0
rampe	∞	$\frac{a}{To}$	0	0
parabole	∞	∞	$\frac{2a}{To}$	0

3

1.1. Définitions

Un système est linéaire si les grandeurs de sortie sont reliées aux grandeurs de commande par des équations différentielles linéaires.

Équations dont les coefficients sont constants ou variables mais indépendants de la fonction et de ses dérivées

Nous cherchons à déterminer une relation entre l'entrée et la sortie telle que :

$$f\left[e(t), s(t), \frac{de(t)}{dt}, \frac{ds(t)}{dt} \ldots\ldots\right] = 0$$

Nous cherchons un modèle simplifié. Un modèle d'équations différentielles linéaire à coefficients constants de la forme :

$$b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + b_o e(t) = a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + a_o s(t)$$

C'est un système d'ordre n (ordre = plus grande dérivée de la sortie). Dans un système physique, nous avons n≥m.

4

1.2. Modélisation par les transformés de Laplace

Technique de transformation mettant en rapport les fonctions du temps avec les fonctions de la variable complexe dépendant de la fréquence: On l'appelle Transformation de Laplace.

1. 2. 1. Définition de la Transformée de Laplace

A toute fonction f (t) nulle pour t<0 et définie pour t>0, on fait correspondre une fonction F(p) de la variable complexe p que l'on appelle transformée de Laplace et que l'on note:

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

La variable p qui entre dans cette intégrale porte le nom d'opérateur, c'est une quantité complexe de la forme: p = a + jω

5

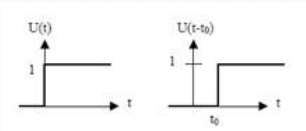
1. 2. 2. Exemples

a. Fonction Echelon

$$Si \quad t\langle 0, \quad e(t) = 0$$
$$Si \quad t \geq 0, \quad e(t) = e(t)U(t)$$

avec U(t) fonction unité telle que

$$E(p) = \int_0^{\infty} e(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} E e^{-pt} dt = E \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{E}{p}$$



$$e(t) = 1 \quad si \quad t \geq 0$$
$$e(t) = 0 \quad si \quad t\langle 0$$

6

b. Fonction exponentielle

$$f(t) = Ee^{-at} \quad Si \quad t \rangle 0,$$
$$f(t) = 0 \quad Si \quad t \langle 0,$$

$$F(p) = \int_o^\infty Ee^{-pt} e^{-at} dt = E\int_o^\infty e^{-(p+a)t} dt = \frac{E}{p+a}$$

Remarque: Inversement nous dirons que f (t) est la transformée inverse ou l'original de F(p) que nous notons:

$$f(t) = L^{-1} F(p)$$

1.2.3. Propriétés de la transformée de Laplace

- Linéarité

$$L[af(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} af(t) dt = a\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt = aF(p)$$

7

- Additivité

$$L[f(t) + g(t)] = \int_0^\infty e^{-pt} [f(t) + g(t)] dt = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt + \int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt = F(p) + G(p)$$

- Théorème du retard

$$L[f(t-\tau)] = \int_0^\infty e^{-pt} [f(t-\tau)] dt = e^{-\tau p} F(p)$$

Avec τ réel positif non nul

- Théorème du décalage fréquentiel

$$L\left[f(t) e^{-\omega_0 t}\right] = F(p + \omega_0)$$

Avec ω_0 un réel positif

8

• Théorème de la dérivation

f(0)= valeur initiale de f(t) et f'(0) valeur initiale de f'(t)

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\int_0^{\infty}e^{-pt}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]dt=pF(p)-f(0)$$

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]=\int_0^{\infty}e^{-pt}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right]dt=p[F(p)-f(0)]-f'(0)$$

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\int_0^{\infty}e^{-pt}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]dt=pF(p)-f(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} u=e^{-pt} \quad \Rightarrow \quad du=-pe^{-pt} \\ v=f(t) \quad \Rightarrow dv=f'(t) \end{array}\right\} \Rightarrow L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=e^{-pt}f(t)\Big|_0^{\infty}+p\int_0^{\infty}e^{-pt}[f(t)]dt=pF(p)-f(0)$$

9

• Tableau récapitulatif

propriété	fonction du temps	fonction de p
linéarité	$a.f_1(t)+b.f_2(t)$	$a.F_1(p)+b.F_2(p)$
dérivation	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p)$
intégration	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
translation dans le temps	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
translation en p	$f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$

• Théorème de l'intégration

Avec les conditions initiales nulles

$$L\left[\int_0^{t\geq 0}f(u)du\right]=\int_0^{\infty}e^{-pt}\left[\int_0^{t\geq 0}f(u)du\right]dt=\frac{F(p)}{p}$$

Remarques

Si les conditions initiales sont nulles, dériver en temporel revient a multiplier par p en Laplace. De la même manière, intégrer en temporel revient à diviser par p en Laplace

10

• Théorème de la valeur initiale

Résultat est validé que si les deux limites existent

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p) \quad (2)$$

• Théorème de la valeur finale

Résultat est validé que si les deux limites existent

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p) \qquad (3)$$

Remarques

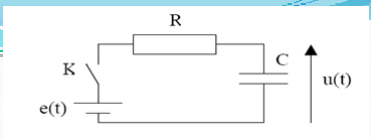
La transformée de Laplace et son inverse ou original ont plusieurs propriétés importantes qui peuvent être utilisées avec avantage dans la résolution des équations différentielles à coefficients constants.

L'intérêt des relations 2 et 3 provient de ce qu'elles permettent de déterminer les valeurs initiale et finale d'une fonction concrète f (t) lorsqu'on ne connaît pas f (t), mais qu'on connaît sa Transformée de Laplace F(p).

11

1.2.4.Exemples d'application

• Exemple 1



Soit le circuit électrique représenté sur la figure ci contre. A t=0

- La charge du condensateur est nulle
- On ferme l'interrupteur K

On veut déterminer l'allure de la tension de sortie en passant par la transformée de Laplace

$$on\ a \quad e(t) = Ri(t) + u(t) \quad avec\ q(t) = Cu(t)\ et\ i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du(t)}{dt}$$

$$d'ou \quad e(t) = RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) \qquad (4) \quad on\ a\ e(t) = 5V,\ alors \quad E(p) = \frac{5}{p}$$

En utilisant la transformée de la Laplace de l'équation (4)

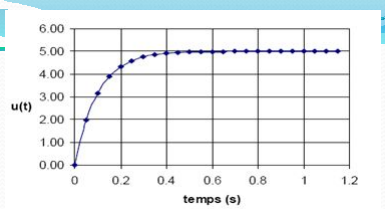
$$on\ obtient\ alors \quad E(p) = RCpU(p) + U(p) \Rightarrow U(p) = E(p)\frac{1}{1+RCp} = \frac{5}{p(1+RCp)} \qquad (5)$$

En utilisant la transformée de la Laplace Inverse de l'équation (5)

$$on\ obtient\ alors \quad U(p) = \frac{5}{p(1+RCp)} = \frac{5/RC}{p(p+1/RC)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+1/RC)}$$

12

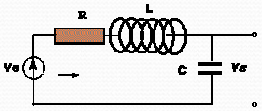
$$U(p) = \frac{5}{p} - \frac{5}{(p+1/RC)}$$



En utilisant les transformées de Laplace usuelles, il est possible de trouver la réponse temporelle de la sortie

$$u(t) = 5[1 - \exp(-t/RC)]$$

• Exemple 2



Nous avons

$$v_e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_S(t) \qquad (1)$$

$$v_R(t) = Ri(t) \qquad (2) \qquad\qquad v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad (3)$$

mais $\quad i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} \quad$ *et* $\quad q(t) = Cv_s(t)$

Alors les équations (2) et (3) deviennent

$$v_R(t) = Ri(t) \;\Rightarrow\; v_R(t) = RC\frac{dv_s(t)}{dt}$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \;\Rightarrow\; v_L(t) = LC\frac{d^2v_s(t)}{dt^2}$$

13

Ainsi remplaçons dans (1) nous obtenons

$$v_e(t) = RC\frac{dv_S(t)}{dt} + LC\frac{d^2v_S(t)}{dt^2} + v_S(t) \qquad (4)$$

En prenant les transformées de Laplace de chaque membre de l'équation (4) nous obtenons

$$V_e(p) = LCp^2V_s(p) + RCpV_s(p) + V_s(p) \quad \Rightarrow \quad V_e(p) = V_s(p)/[LCp^2 + RCp + 1]$$

En utilisant les transformées de Laplace usuelles, il est possible de trouver la réponse temporelle de la sortie

On défini ainsi la fonction de transfert comme étant le rapport entre la transformée de Laplace du signal de sortie et la transformée de Laplace du signal d'entrée

$$F(p) = \frac{V_S(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

14

1.3. La Fonction de Transfert

Introduction

Pour calculer la réponse s(t) d'un système linéaire à une entrée quelconque e(t). On applique la Transformée de Laplace à l'équation différentielle linéaire à coefficients constants liant e(t) et s(t). Équation que l'on peut mettre sous la forme générale :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_o s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_o e(t) \quad (1)$$

1. 3. 1. La Fonction de transfert

Si les Conditions Initiales nulles et en utilisant la Transformée de Laplace de l'équation (1) nous obtenons

$$L\left[a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \ldots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_o s(t)\right] = L\left[b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \ldots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_o e(t)\right]$$

$$L\frac{d^m e(t)}{dt^m} = p^m E(p) \qquad L\frac{d^n s(t)}{dt^n} = p^n S(p)$$

$$L\frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} = p^{m-1} E(p) \qquad L\frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} = p^{n-1} S(p)$$

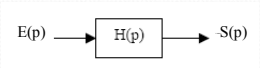
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L\frac{de(t)}{dt} = pE(p) \qquad L\frac{ds(t)}{dt} = pS(p)$$

15

$$S(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_{i-1} p^{i-1} + \ldots b_o}{a_n p^n + \ldots + a_{i-1} p^{i-1} \ldots + a_o} E(p)$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots b_1 p + b_o}{a_n p^n + \ldots a_1 p + a_o}$$



$$S(p) = H(p) E(p)$$

Lorsque les conditions initiales sont nulles, le système est en transformée de Laplace, un opérateur de multiplication par H(p).

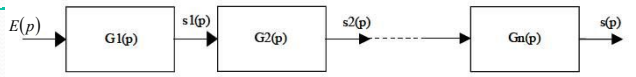
Remarque

La fonction H(p) est aussi qualifiée de fonction de transfert en boucle ouverte car elle ne comporte pas de réaction

16

1.3.2. Fonctions de transfert par schéma bloc

✓ Systèmes en série :

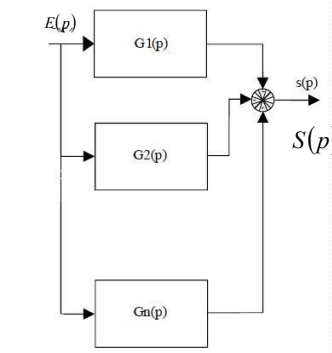


Nous avons

$$S(p)=G_n(p).S_{n-1}(p)=G_n(p)G_{n-1}(p)S_{n-2}(p).....=[G_n(p)G_{n-1}(p)....G_1(p)]E(p)$$

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=G_1(p)G_2(p).....G_n(p)=\prod_{i=1}^{n}G_i(p)$$

✓ Systèmes en parallèle :



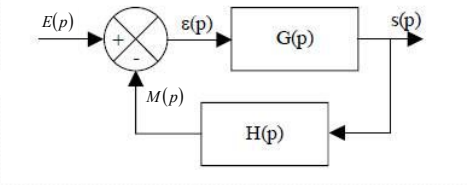
Nous avons

$$S(p)=S_1(p)+S_2(p)+.....+S_n(p)=G_1(p)E(p)+G_2(p)E(p)+.....+G_n(p)E(p)=$$

$$S(p)=[G_1(p)+G_2(p)+.....+G_n(p)]E(p)$$

$$H(p)=G_1(p)+G_2(p)+.....+G_n(p)=\sum_{i=1}^{n}G_i(p)$$

✓ Fonction de transfert en boucle ouverte et fermée :



$$S(p)=G(p)\varepsilon(p)=G(p)[E(p)-M(p)]$$

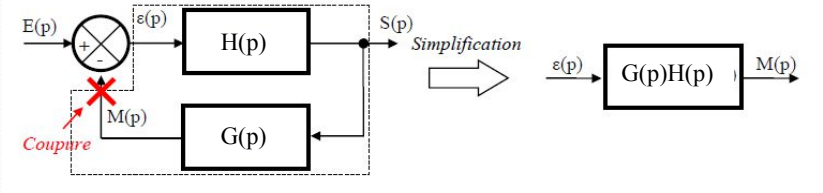
$$or \quad M(p)=H(p)S(p) \quad \Rightarrow \quad S(p)=G(p)[E(p)-H(p)S(p)]$$

$$\Rightarrow \quad S(p)[1+G(p)H(p)]=G(p)E(p)$$

$$F(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{G(p)}{1+G(p)H(p)}$$

est appelée la fonction de transfert en Boucle Fermée

✓ Fonction de transfert en boucle ouverte :



$$T(p) = G(p)H(p)$$

Est appelée la fonction de transfert en Boucle Ouverte

1.4. Stabilité d'un système asservi

1.4.1.Notion de stabilité : Définitions

Un système est stable si et seulement si écarté de sa position d'équilibre (point ou trajectoire), il tend à y revenir. Une faible perturbation des conditions initiales du système engendre une faible perturbation de sa trajectoire

19

Théorème de stabilité

Un système linéaire continu à temps invariant est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots b_1 p + b_o}{a_n p^n + \ldots a_1 p + a_o} \Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{\prod_i (p + z_i)}{\prod_j (p + p_j)}$$

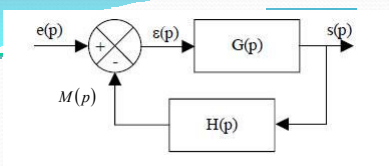
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \sum_i \frac{A_i}{(p + p_i)} \Rightarrow h(t) == \sum_i A_i e^{-p_i t}$$

Ainsi la réponse impulsionnelle est

La réponse impulsionnelle converge si les termes $e^{-p_i t}$ sont convergents c'est-à-dire si les p_i sont négatifs

20

1.4.2. Application du théorème de stabilité aux systèmes en Boucle Fermée



$$F(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{G(p)}{1+G(p)H(p)}=\frac{b_m p^m+...b_1 p+b_o}{a_n p^n+...a_1 p+a_o}=\frac{N(p)}{D(p)}$$

$H_{BO}(p)=G(p)\,H(p)$ *est la FT en Boucle Ouverte*

Le système asservi est stable si et seulement si les pôles de F(p) sont à parties réelles négatives

- Equation caractéristique du système asservi : $1+G(p)\,H(p)=1+H_{BO}(p)=0$
- Le système asservi est stable si et seulement si les racines de l'équation caractéristique sont à parties réelles strictement négatives.

Critère Algébrique de Stabilité

Ceux sont des règles permettant de savoir si les racines de l'équation algébrique ont leur partie réelle négative, sans savoir à résoudre l'équation caractéristique du système; c'est à dire au dénominateur de sa fonction de transfert égale à 0.

$D(p)=1+G(p)\,H(p)=1+H_{BO}(p)=0$ soit $a_n p^n+...a_1 p+a_o=0$

21

Condition nécessaire

Pour qu'il y ait stabilité, il faut que tous les coefficients a_i du dénominateur de la fonction de transfert soient présents et de même signe. Cette condition n'est suffisante que dans le cas des systèmes du premier et du second ordre .

Condition nécessaire et suffisante: Critère de Routh

Soit un système possédant une fonction de transfert du type F(p)

$$D(p)=a_n p^n+...a_1 p+a_o \quad avec \quad a_n \rangle o$$

Ligne 1	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…
Ligne2	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…
Ligne 3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	…
Ligne 4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	…
⋮	…	…	…	…	…

$$a_{31}=-\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

$$a_{32}=-\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$$

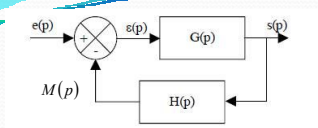
$$a_{41}=-\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{a_{31}}$$

$$a_{42}=-\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{a_{31}}$$

Un système est asymptotiquement stable si et seulement si tous les coefficients de la première colonne du tableau de Routh sont tous de même positifs

22

Exemple 1 : étude de la stabilité du système en BF



$$G(p)=\frac{K}{p(p+1)}$$

$$H(p)=\frac{1}{(p+5)}$$

$$F(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{G(p)}{1+G(p)H(p)}=\frac{K(p+5)}{p^3+6p^2+5p+K}=$$

$$D(p)=p^3+6p^2+5p+K$$

Ligne 1	1	5
Ligne2	6	K
Ligne 3	$\frac{30-K}{6}$	0
Ligne 4	K	0

D'après le critère de Routh, la condition de stabilité impose :

$$K\rangle 0 \quad et \quad \frac{30-K}{6}\rangle 0 \quad \Rightarrow 0\langle K\langle 30$$

23

1.5. Précision d'un système asservi

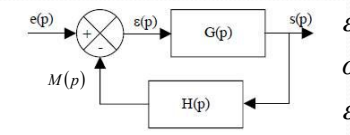
Introduction

Le but d'une boucle d'asservissement est de faire en sorte que la sortie du système suive la consigne d'entrée.

Pour cela, au travers d'un capteur, la sortie est réinjectée à l'entrée dans un comparateur (soustracteur idéal).

La différence entre l'entrée et la sortie (appelée erreur) est calculée et forme le signal de commande de la chaîne directe (correcteur + Système).)

1.5.1. Erreur du Système



$$\varepsilon(p)=[E(p)-M(p)]=[E(p)-S(p)H(p)]=$$

$$or \quad S(p=)\varepsilon(p)G(p) \quad alor \quad \varepsilon(p)=[E(p)-\varepsilon(p)G(p)H(p)]$$

$$\varepsilon(p)[1+G(p)H(p)]=E(p)$$

$$\varepsilon(p)=\frac{E(p)}{1+G(p)H(p)}$$

24

Si H(p)=1 alors l'erreur du système devient

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+G(p)}$$

On voit donc que l'erreur d'un système asservi dépend à la fois du type de consigne e(t) et de sa fonction de transfert en boucle ouverte.

C'est pour cela qu'on étudie la précision d'un Système Asservi pour des entrées de forme simple qui sont :

- l'échelon : e(t) = Eu(t) → E(p) = U/p
- la rampe : e(t) = atu(t) → E(p) = a/p²
- la parabole : e(t) = at²u(t) → E(p) = 2a/p³

L'erreur en régime permanent, qui seule nous intéresse, est la valeur de l'erreur lorsque le régime transitoire est terminé, c'est-à-dire au bout d'un temps très long, c'est à dire en faisant tendre t → ∞

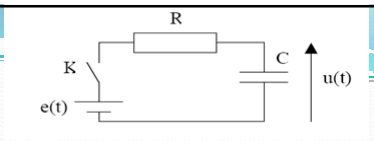
Si nous appliquons le théorème de la valeur finale nous obtenons l'équation suivante :

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\left[\frac{E(p)}{1+G(p)H(p)}\right]$$

25

Exemple d'application

Soit le circuit



nous avons $E(p) = RCpU(p) + U(p) \Rightarrow U(p) = E(p)\frac{1}{1+RCp}$ *et* $\varepsilon(p) = E(p)\frac{1}{1+RCp}$

- e(t) une entrée échelon

$$e(t) = Eu(t),\ alors\quad E(p) = \frac{E}{p}\qquad alors\quad \varepsilon(p) = \frac{E}{p(1+RCp)}$$

$$\varepsilon_{p=} \lim_{t\to\alpha} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\left[\frac{E}{p(1+RCp)}\right] = E$$

- e(t) une entrée rampe

$$e(t) = atu(t),\ alors\quad E(p) = \frac{a}{p^2}\qquad alors\quad \varepsilon(p) = \frac{a}{p^2(1+RCp)}$$

$$\varepsilon_{p=} \lim_{t\to\alpha} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\left[\frac{a}{p^2(1+RCp)}\right] = \infty$$

26

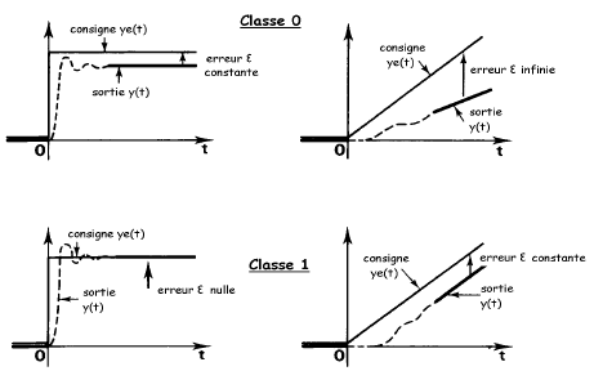
1.5.2. Influence de la fonction de transfert en Boule Ouverte

$$\lim_{p \to 0} T(p) \approx \frac{T_0}{p^{\alpha}}$$

l'entier α s'appelle la classe du système

la classe est égale au nombre d'intégrations dans la fonction de transfert en Boucle Ouverte

15.3. Allure de l'erreur pour un système de classe 0 et de classe 1.



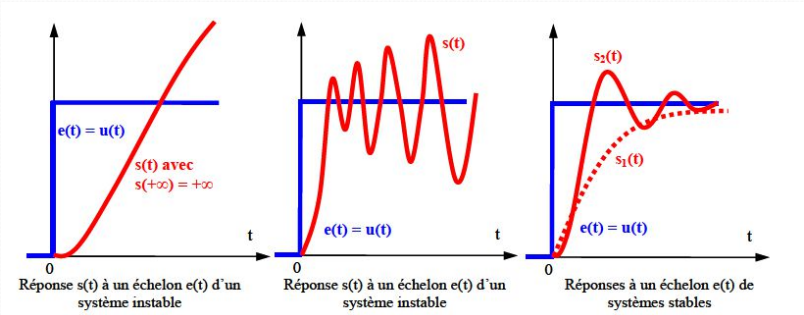
27

1.5.4. Erreur du Système

classe	0	1	2	3
échelon	$\frac{U}{1+To}$	0	0	0
rampe	∞	$\frac{a}{To}$	0	0
parabole	∞	∞	$\frac{2a}{To}$	0

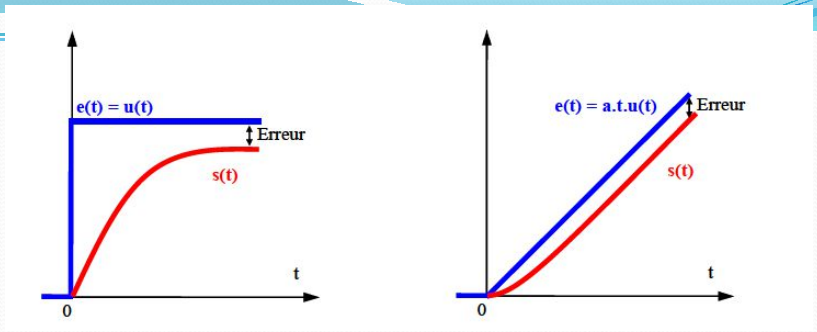
Conclusion

- ✓ Stabilité

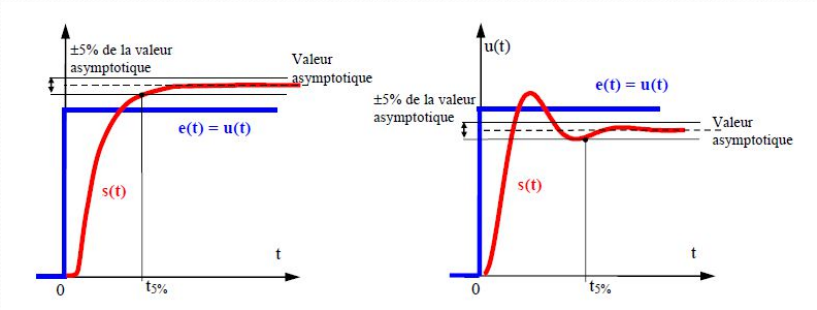


28

✓ Précision



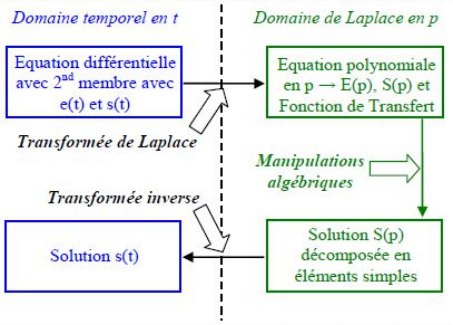
✓ Rapidité



29

2. Dynamique des systèmes asservis

2.1. Réponse à des entrées typiques
2.2. Réponse en régime permanent
2.3. Performances d'un système asservi



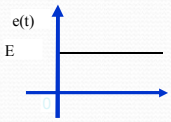
30

Introduction

Pour analyser le comportement d'un système, on utilise un nombre restreint de signaux d'entrée, correspondant à des signaux type. L'évolution de la sortie du système soumis à ces signaux type permettra de caractériser le système, et facilitera la comparaison des résultats obtenus.

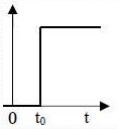
2.1. Réponse à des entrées typiques

2.1.1. Entrée Echelon



$$e(t) = E \times u(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \frac{E}{p}$$

Dans le cas d'un échelon unitaire ➡ $e(t) = 1 \times u(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \frac{1}{p}$

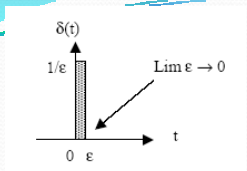


$e(t-t_0)$ est un échelon débutant en t_0.

La réponse d'un système soumis à un échelon est appelée réponse Indicielle

31

2.1.2. Entrée Impulsion de Dirac

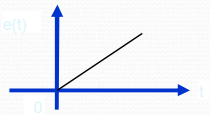


$$e(t) = A.\partial(t): \quad \text{impulsion de Dirac} \quad \Rightarrow \quad E(p) = A$$

Dans le cas d'une impulsion unitaire ➡ $e(t) = 1 \times \partial(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = 1$

La réponse d'un système soumis à une impulsion de Dirac est appelée réponse impulsionnelle

2.1.3. Entrée Rampe



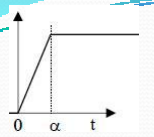
$$e(t) = \alpha \times t.u(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \frac{\alpha}{p^2}$$

Dans le cas d'une fonction rampe unitaire ➡ $e(t) = 1 \times t.u(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \frac{1}{p^2}$

La réponse d'un système soumis à une rampe est appelée réponse à une rampe

32

Remarque



On considère quelquefois que l'échelon est obtenu à partir d'une rampe saturée, avec $\alpha \to 0$.

2.1.4. Tableau récapitulatif

signal	fonction du temps	fonction de p
échelon	$f(t) = U(t)$	$\frac{1}{p}$
impulsion de Dirac	$f(t) = \delta(t)$	1
rampe	$f(t) = at$	$\frac{a}{p^2}$
exponentielle	$f(t) = e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$

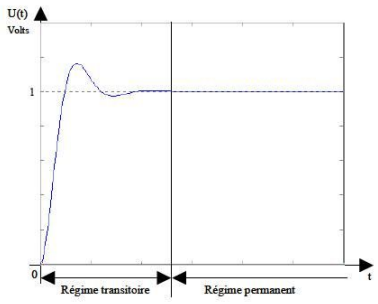
33

Conclusion

1. Soumettre un système à un essai échelon, c'est porter brusquement son entrée d'une valeur constante (prise comme zéro) à une autre valeur constante E
2. Le soumettre quand il est au repos à un essai de rampe, c'est lui imposer brusquement, à partir du temps t = o une commande de vitesse constante
3. Cependant, le soumettre à une entrée harmonique, c'est à un certain instant qu'on prend conventionnellement comme origine des temps, lui imposer une telle entrée

2.2. Réponse en régime permanent

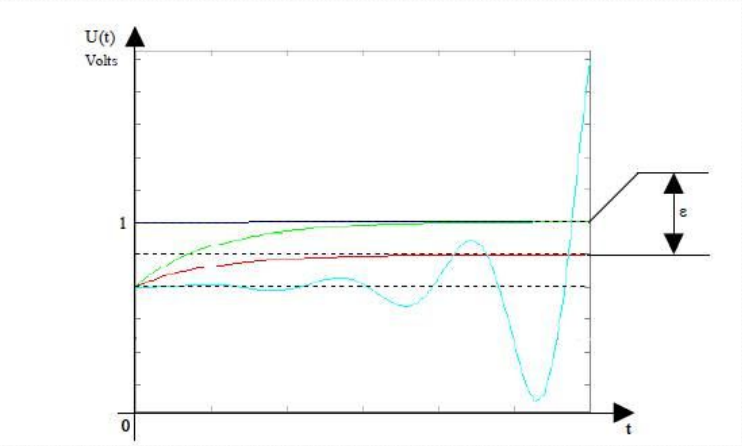
Si nous soumettons un système à une de ces entrées, la sortie finira par avoir la même forme que l'entrée. A ce moment là, nous dirons que le système a atteint son régime **permanent.**



34

2.2.1. Réponse indicielle

L'erreur permanente s'appelle l'écart statique ou erreur de position

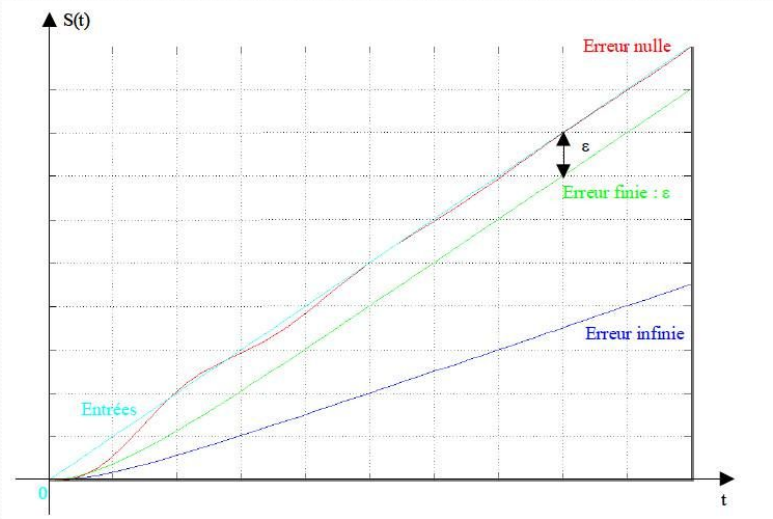


Erreur nulle
Erreur finie : ε
Erreur infinie (instabilité)

35

2.2.2. Réponse a une vitesse ou a une rampe

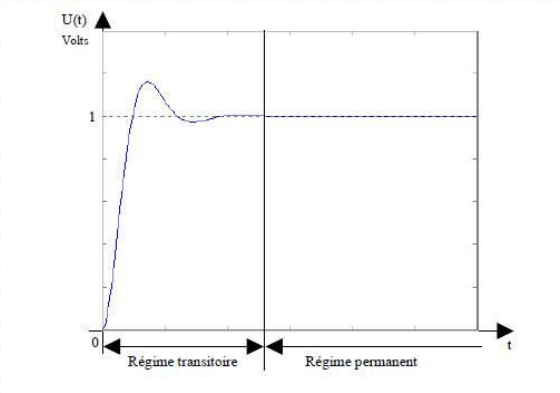
L'erreur permanente s'appelle erreur de traînage ou erreur de vitesse.



36

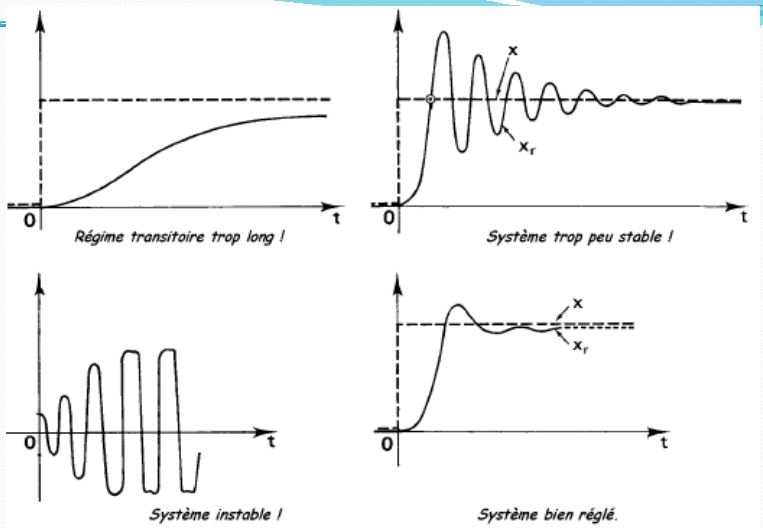
2.2.3. Le régime transitoire

Lorsqu'un système est soumis aux entrées précédentes, il lui faut un certain temps pour atteindre son régime permanent. Nous appelons cette période le régime **transitoire.**



37

2.2.4. Récapitulatif: Exemples de réponses de systèmes asservis.



Remarque :

un asservissement idéal sera caractérisé par une sortie égale à la consigne, soit Y = Ye et donc x = xr et ε=0

38

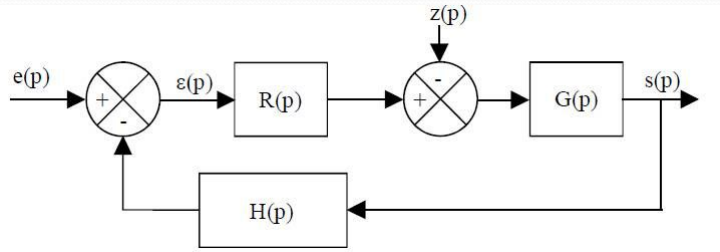
2.3. Performances d'un système asservi

4.3.1. Le gain statique

$$Gs = \lim_{p \to 0} p^i G(p)$$

avec $$G(p) = \frac{Gs}{p^i} G_0(p) \quad avec\ i = nombre\ d'\text{int}egrateur\ pur$$

2.3.2. Erreur d'un système asservi



1er cas : Aucune erreur d'asservissement : Z(p) = 0

$$\varepsilon = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t)$$

Si nous appliquons le théorème de la valeur finale nous obtenons l'équation suivante :

$$\varepsilon = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\varepsilon(p)$$

Nous obtenons ainsi $$s(p) = G(p)R(p)\varepsilon(p)$$

$$H_{BF}(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{R(p)G(p)}{1 + G(p)R(p)H(p)}$$

$$s(p) = G(p)R(p)\varepsilon(p) = \frac{e(p)R(p)G(p)}{1 + G(p)R(p)H(p)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{e(p)}{1 + G(p)R(p)H(p)} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(p) = \frac{e(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

Si nous appliquons le théorème de la valeur finale nous obtenons l'équation suivante :

$$\varepsilon = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\left[\frac{e(p)}{1+G(p)R(p)H(p)}\right]$$

2ème cas : Erreur de régulation: $Z(p) \neq 0$

Nous avons $\varepsilon(p) = -s(p)H(p)$ et $s(p) = [R(p)\varepsilon(p) - Z(p)]G(p)$

Alors

$$s(p) = [-R(p)s(p)H(p) - Z(p)]G(p) \Rightarrow s(p)[1 + R(p)s(p)H(p)G(p)] = -Z(p)G(p)$$

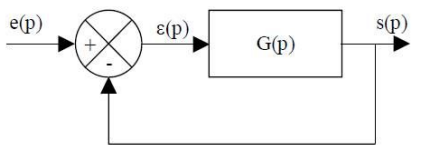
$$s(p) = \frac{-Z(p)G(p)}{[1+R(p)s(p)H(p)G(p)]}$$

et

$$\varepsilon(p) = \frac{H(p)G(p)}{[1+R(p)s(p)H(p)G(p)]}Z(p)$$

41

2.3.3. Systèmes possédant des intégrateurs



Nous disons que G(p) possède un intégrateur s'il peut s'écrire sous la forme

$$G(p) = \frac{1}{p}C(p) = \frac{1}{p}\left[\frac{b_0 + b_1 p + ...b_m p^m}{a_0 + a_1 p + ...a_n p^n}\right]$$

$$\varepsilon_p = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\left[\frac{e(p)}{1+G(p)}\right] = \lim_{p\to 0} p\left[\frac{\frac{E_0}{p}}{1+\frac{1}{p}C(p)}\right] = \lim_{p\to 0}\left[\frac{pE_0}{p+C(p)}\right] = 0$$

Un système bouclé possédant un intégrateur a une erreur de position nulle (avec l'entrée du type $e(p) = \frac{E_0}{p}$)

42

et une erreur de traînage pour une entrée $e(p)=\frac{E_0}{p^2}$ constante

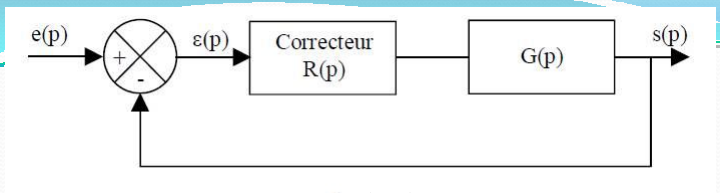
$$\varepsilon_v=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p\varepsilon(p)=\lim_{p\to 0}p\left[\frac{e(p)}{1+G(p)}\right]=\lim_{p\to 0}p\left[\frac{\frac{E_0}{p^2}}{1+\frac{1}{p}\left[\frac{b_0+b_1p+.....b_mp^m}{a_0+a_1p+.....a_np^n}\right]}\right]=$$

$$\varepsilon_v=\lim_{p\to 0}\left[\frac{E_0}{p+\frac{b_0+b_1p+.....b_mp^m}{a_0+a_1p+.....a_np^n}}\right]=E_0\frac{a_0}{b_0}$$

Conclusion

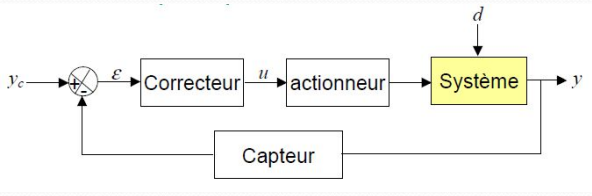
Pour améliorer la précision, il faut envisager des dispositifs complémentaires: régulateurs ou correcteurs.

43



Un correcteur de type intégrateur $\left(\frac{1}{T_ip}\right)$ annule l'erreur de position. Dans le cas où le système

$G(p)=\frac{1}{p^i}G_0(p)$ possède un intégrateur pur, cela annule aussi l'erreur de position.



yc : consigne
ε = yc – y : signal d'erreur (écart entre consigne et sortie du système)
Correcteur : élabore la loi de commande u
Actionneur : applique la commande au système. Joue en général le rôle d'amplificateur de puissance
y : sortie du système ou grandeur à asservir

44