

Chapitre 2

La physique des fluides

On appelle Mécanique l'étude des déplacements et des déformations des corps au cours du temps, y compris l'étude des conditions qui entraînent ces mouvements. Nous considérerons ici la Mécanique au sens restreint où n'interviennent ni changements d'état physique, ni transformations chimiques (vaporisation, cavitation, combustion. . .). Ce chapitre contient des rappels de base en mécanique des fluides, liés à la physique des fluides et ses concepts fondamentaux.

2.1 Introduction

La dynamique est la partie de la Mécanique des fluides qui étudie (sans expliciter la variable température T) les mouvements ou le repos dans leurs rapports avec les forces qui les engendrent. La cinématique fournit le cadre spatiotemporel dans lequel sont décrits les mouvements dans l'espace euclidien à 3 dimensions. La cinétique se construit à partir de la cinématique en introduisant la notion de masse.

La Mécanique des fluides (MDF) étudie la physique des fluides, afin de décrire un fluide en repos ou en mouvement.

Dans la physique du solide : on s'intéresse à la distance : $d(M_1 M_2) = C^{\text{ste}}$

$$\implies \vec{V}_A \cdot \vec{AB} = \vec{V}_B \cdot \vec{AB}$$

on peut tirer un champ de vitesse pour solide, c'est la projectivité des vitesses (translation, rotation ou les contrainte).

où : $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}$.

Pour un fluide : les molécules peuvent se déplacer « librement », les unes par rapport aux autres, et donc la distance $d(M_1M_2)$ peut varier à n'importe quel instant.

On ne peut pas suivre les particules une par une (impossible!), en thermodynamique (1 mole $\rightarrow \mathcal{N} = 6.10^{23}$) d'un système en équilibre - dit volume de contrôle (VC) - est décrit par des grandeurs moyennes intensives " ρ, x, P, T " et extensives "volume, masse". Cela n'est pas suffisant dans le cas de l'hydrodynamique des fluides, car elles sont non homogènes sur l'ensemble du VC, et les différentes propriétés du fluide ne sont plus les mêmes dans les différents points du volume de contrôle.

2.1.1 Échelle mésoscopique

Entre l'échelle microscopique et macroscopique, il y a l'échelle mésoscopique (échelle ponctuelle). C'est une échelle située entre les deux échelles micro et macro.

Définition : l'échelle mésoscopique « ponctuel » est une échelle inférieure aux échelles sur lesquelles les grandeurs moyennes varient suffisamment grand pour décrire l'échelle moyen et sa variation est très petite d'un point matériel à l'autre.

2.1.2 Champ des vitesses dans un fluide

Pour un petit élément de fluide à l'échelle mésoscopique, le champ des vitesses en un point M est présenté par : $\vec{v}(M) = \langle \vec{v}_i \rangle$.

En chaque point M, il y a une vitesse spécifique \vec{v}_i lié à ce dernier.

Soit deux points matériels M et M' de masse m et de volume élémentaire V suffisamment petit ($V=0$).

En peut définir des champs des différent paramètres :

- Champ des masses volumiques, $\rho(M) = \frac{dm}{dV}$
- Champ des températures T(M), d'après les lois de la statistique à l'équilibre d'un système, la description des particules ne change pas .
- Champ des vitesses $\vec{v}(M)$: la distribution de la vitesse obéie à la probabilité : $P(v_x) = K \exp - \frac{\frac{1}{2}mv_x^2}{k_B T}$

c'est une Gaussienne de forme : $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, la densité de distribution de vitesse est unique à l'équilibre et la seule différence est la largeur de la gaussienne $\langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \langle \frac{3}{2}k_B T \rangle$. La température est le seule et unique paramètre qui détermine la vitesse.

Champ de pression : $P = \frac{1}{3}nmv^2$ ou $P = nkT$, c'est la pression exercée par un fluide sur une paroi immergée dans un fluide.

La 2nd loi de Newton : $m \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_i$, à un instant « t » il y a des milliard de molécule qui viennent frapper la paroi.

On a : $d\vec{F} = P.dS.\vec{n}_\perp$, avec : $P = nk_B T$ et $n = \frac{N}{V} = \frac{\text{nombre de particules}}{\text{volume}}$

où : $PV = Nk_B T \implies PV = n\mathcal{N}_A k_B T \implies PV = nRT$.

Une fois qu'on a compris qu'il y a une distribution de vitesse pour un système à l'équilibre, caractérisée par une grandeur de T et avec le calcul de la pression, on trouve $PV = nRT$. Cela est à l'échelle moléculaire (càd microscopique).

Lorsqu'on a un large système, on n'est pas obligé de suivre chaque molécule, car dès que le système est suffisamment vaste (largement grand) et à l'équilibre, alors la distribution des vitesses est déterminée de la distribution dite de Maxwell Boltzmann.

Pression en un point du fluide à l'équilibre $\implies \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ (c'est l'état statique du fluide).

2.2 Équation fondamentale de l'hydrostatique

En général, lorsqu'il s'agit d'un système solide en équilibre, on a : $(\vec{v} = \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega} = \vec{0})$

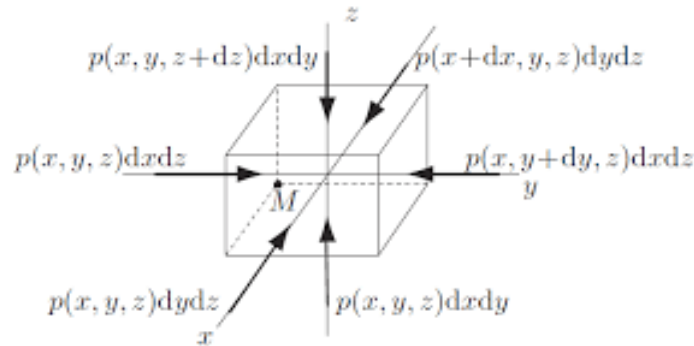
Tandis que pour le cas d'un fluide en équilibre, on a : $(\vec{v}(M) = \vec{0} ; \forall M \implies \vec{v}_A = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})$

càd. $\langle m \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \rangle = \langle \vec{f}_i \rangle \implies M \cdot \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum \vec{f}_{ext}$

Soit un point matériel M de fluide (élément de volume $dV = dxdydz$). En plus des forces standards (poids) qui s'exerce sur l'élément il y a aussi les forces de pression. Dans un récipient, il y a une infinité de particule fluide.

Au repos, le bilan de forces : $\sum \vec{f}_{ext} = \vec{0}$, le fluide est à l'équilibre statique et il est soumis à des forces standards :

— poids : $dm \vec{g} = \rho dV \vec{g} = \rho dxdydz \vec{g}$


 FIGURE 2.1 – Bilan de forces sur un élément de fluide dV

- autres forces éventuelles (magnétique, inertie)
- forces de pression : comme les forces exercées sur chaque parois solide.

2.2.1 Forces de pression d'un fluide en repos

2.2.1.1 Cas de contrainte normale

Pour un élément de volume $dV = dx dy dz$ en équilibre, les projections des forces exercées sur cet élément par rapport aux axes donnent :

$$\text{OX} : d\vec{F}_x = \vec{F}_x - \vec{F}_{x+dx} = P_x \cdot dy dz \cdot \vec{i} - P_{x+dx} \cdot dy dz \cdot \vec{i} \text{ avec : } P_{x+dx} = P_x + dP_x$$

$$\text{d'où : } d\vec{F}_x = -dP_x \cdot dy dz \cdot \vec{i} \implies F_x = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz ; \text{ car : } df_n = \frac{\partial f}{\partial n} dn$$

de même pour les autres axes :

$$\text{OY} : d\vec{F}_y = \vec{F}_y - \vec{F}_{y+dy} \implies d\vec{F}_y = -dP_y \cdot dx dz \cdot \vec{j} \implies F_y = -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx dz$$

$$\text{OZ} : d\vec{F}_z = \vec{F}_z - \vec{F}_{z+dz} \implies d\vec{F}_z = -dP_z \cdot dx dy \cdot \vec{k} \implies F_z = -\frac{\partial P}{\partial z} dz dx dy$$

$$\text{alors, la variation de force de pression est écrite : } d\vec{F}_{\text{pression}} = -\left[\frac{\partial P}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{k} \right] dx dy dz$$

$$\text{on a : } dP = \overrightarrow{\text{grad}}P \cdot d\vec{r} \text{ avec : } d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\text{donc : } d\vec{F}_{\text{pression}} = -\overrightarrow{\text{grad}}P \cdot dV ; \text{ c'est l'effet de variation des forces de pression.}$$

$$\text{et pour les forces volumique (gravitationnelle), on a : } d\vec{F}_{\text{gravité}} = \rho \cdot \vec{g} \cdot dV$$

$$\text{Donc, à l'équilibre : } \sum \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\implies d\vec{F}_{\text{pression}} + d\vec{F}_{\text{gravité}} = \vec{0}$$

$$\implies -\overrightarrow{\text{grad}}P \cdot dV + \rho \cdot \vec{g} \cdot dV = \vec{0}$$

$$\implies \overrightarrow{\text{grad}}P = \rho \cdot \vec{g}$$

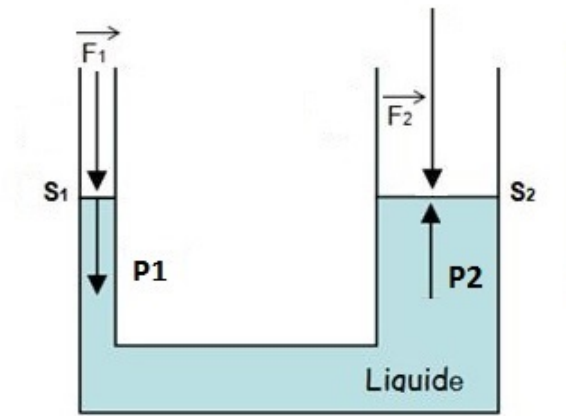


FIGURE 2.2 – forces de vérin hydrostatique

Vérin hydrostatique :

Soit un dispositif de vérin hydraulique, le système est en équilibre et les pistons sont maintenus dans le même niveau. Si on applique une force F_1 de 100N sur le piston P_1 , quelle doit être la charge possible à soulever par le vérin. On donne le rapport de diamètres ($S_2/S_1=10$).

F_1 : La force de pression au point 1 en [N].

F_2 : La force de pression au point 2 en [N].

S_1 : La surface pressée 1 en [m^2].

S_2 : La surface pressée 2 en [m^2].

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

Dans cet exemple, les forces de pression de variation importante sont celles agissant dans la direction verticale. Faisant un bilan de forces sur (OZ) pour chacun des deux cotés du système.

On a à l'équilibre du vérin : $F_2 + P_{atm}S_2 - P_2S_2 = 0 \Rightarrow F_2 + PS_2 = 0$

et à l'équilibre de la pompe : $F_1 + P_{atm}S_1 - P_1S_1 = 0 \Rightarrow F_1 + PS_1 = 0$

à l'équilibre de tout le système, on a : $z_1 = z_2$ et $P_1 = P_2$ d'où : $\frac{F_2}{S_2} = \frac{F_1}{S_1}$, donc : $F_2 = F_1(S_2/S_1) = 100 \times 10^2$

$\Rightarrow F_2 = 10KN$. (c'est la charge qui peut être soulevée).

Poussée d'Archimède :

On prend l'exemple d'un corps complètement émergé dans un fluide, ce dernier reçoit de la part de ce fluide une force verticale appelée (poussée d'Archimède), dirigée vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume du fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps), voir figure ci-dessous (1.2).

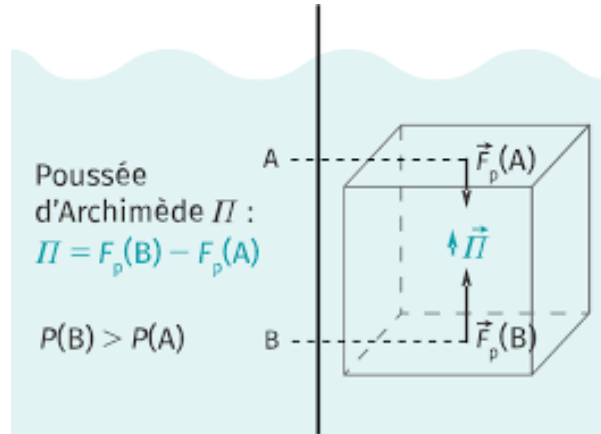


FIGURE 2.3 – Poussée d'Archimède

La différence de pression est : $F_B - F_A = \rho_f \cdot V_{immergé} \cdot g$

La force de poussée est donnée comme suit : $F_{BA} = \rho_f \cdot V_{immergé} \cdot g$

à l'équilibre, on a : $\sum_i \vec{F}_{ext} = 0 \implies F_B - F_A - P = 0 \implies \Pi \cdot A - P = 0$

avec : $P = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$

Alors : $\Pi \cdot A - \rho \cdot V \cdot g = 0$, d'où : $\Pi \cdot A = \rho \cdot V \cdot g$

2.2.1.2 Cas de contrainte tangentielle

On prend l'expérience de Couette, le cas d'un fluide entre deux plaques parallèles de même surface A, distantes de h (voir Figure 2.3), l'une fixe et l'autre est mobile. La plaque mobile se déplace avec une vitesse horizontale U et la force qui cause son déplacement est F.

Il est montré expérimentalement que suite à l'effet de la force F, il résulte une contrainte de cisaillement dans le fluide entre les deux plaques. Cette contrainte (tension) est opposée au mouvement de la plaque et du fluide, elle est exprimée par : $\tau = \frac{F}{A} \left[\frac{N}{m^2} \right]$.

Remarque : L'unité de cette contrainte (de cisaillement) est du Pascal : $\frac{N}{m^2} = Pa$, il s'agit d'une force F par rapport à une surface S, seulement cette force est de direction tangentielle et elle n'est pas normale comme pour la pression ordinaire notée par P.

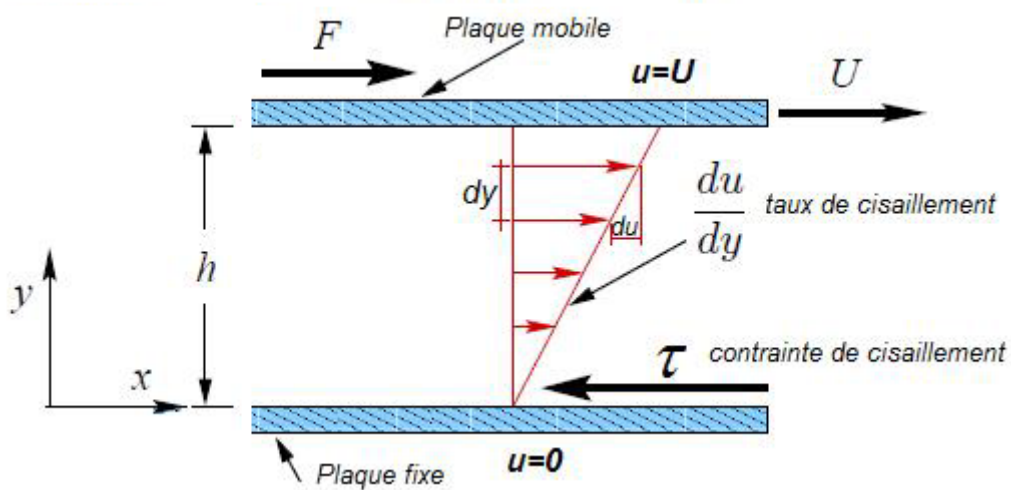


FIGURE 2.4 – Expérience de viscosité

Il est prouvé aussi que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse u suivant la distance h entre les deux plaques : $\tau \sim \frac{\partial u}{\partial y}$

Autrement dit, la contrainte de cisaillement est proportionnelle au taux de déformation et la constante de proportionnalité est **le coefficient de viscosité dynamique (μ)** :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.1}$$

Un réarrangement de l'éq. (1) donne : $\mu = \frac{\text{Contrainte de cisaillement}}{\text{taux de cisaillement}} = \frac{\frac{F_s}{A_s}}{\frac{dU}{dy}} = \tau \frac{dy}{dU} ; \left[\frac{N.s}{m^2} \right] = \left[\frac{kg}{m.s} \right]$ ou $[Pa.s]$

La viscosité cinématique (ν) est définie comme étant : la viscosité dynamique sur la masse volumique, son unité est $[m^2/s]$. Elle est exprimée comme suit : $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]$

2.2.1.3 Variation de force de pression

Pour les gaz (fluide compressible) et dans le cas de l'air (atmosphère), la pression varie avec l'altitude, et obéie à la loi des Gaz Parfait. (figure 2.4)

$$P(z) = P_0 \exp^{-\left(\frac{Mg}{RT}\right)z}$$

tel que : $P_0 = \exp^{-\left(\frac{Mg}{RT_0}\right)z_0}$, pour l'atmosphère à : $T_0 = 300K$

Tendis que pour les liquides (fluide incompressible), la pression varie avec profondeur et obéie à la loi de l'hydrostatique. (figure 2.4)

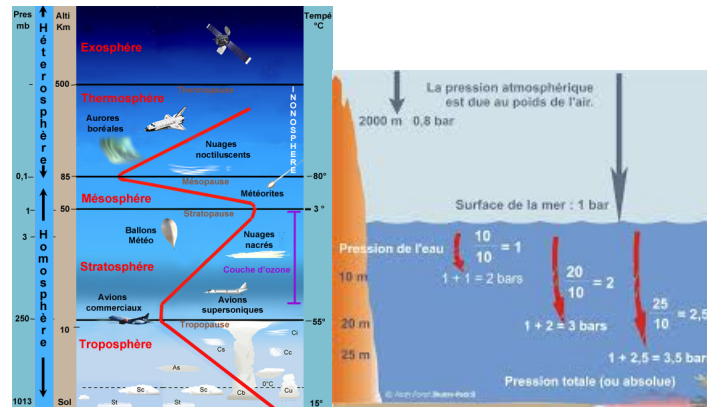


FIGURE 2.5 – variation de pression atmosphérique et sous marine [6]

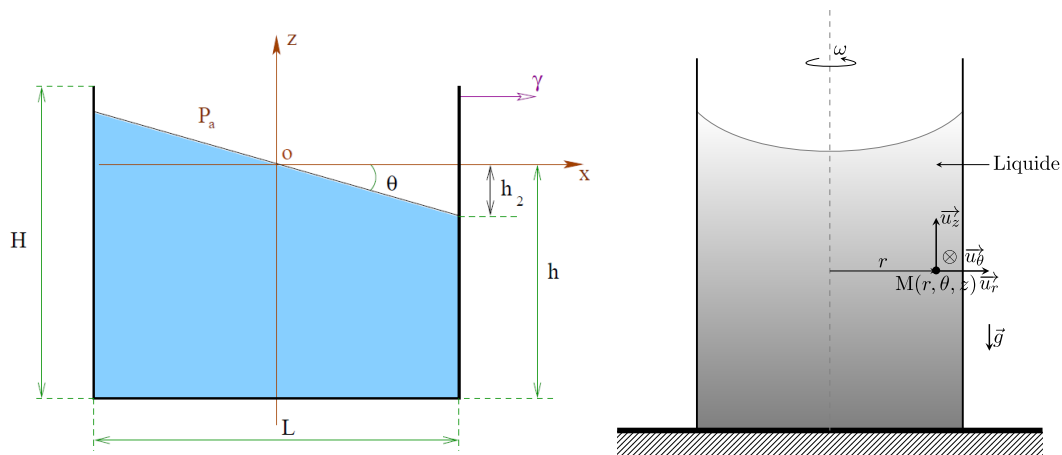


FIGURE 2.6 – Liquides en mouvements uniformes

$$P(z) = P_0 + \rho gh$$

avec : $h = z - z_0$ est la différence de profondeur et $P_0 = P(z_0)$.

2.2.2 Forces de pression d'un fluide en mouvement (uniforme)

L'étude de déformation de la surface libre d'un liquide en mouvement uniforme (à vitesse constante). Par exemple, les deux cas (connus), celui du réservoir (contenant un liquide) en translation à vitesse linéaire constante ($\vec{V} = Cste$) et le second cas est le vortex forcé qui tourne à vitesse angulaire constante ($\omega = Cste$). Dans cette catégorie de problème, il est nécessaire d'appliquer la loi fondamentale de l'hydrostatique. (figure 2.5)

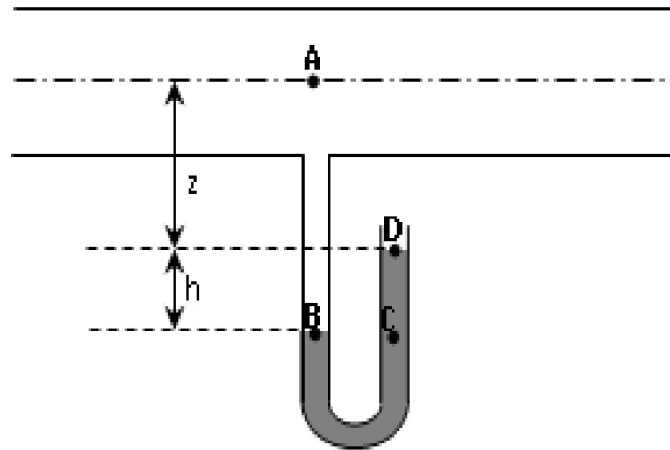


FIGURE 2.7 – Conduite avec tube en U

2.2.3 Forces de pression d'un fluide en mouvement (quelconque)

L'étude de mouvement quelconque d'un fluide (ex. conduites), nécessite parfois la mesure de pression locale ou totale à des endroits bien spécifiés. Pour cela dans l'ingénierie, les instruments de mesure souvent employés utilisent des techniques basées sur l'application de la loi fondamentale de l'hydrostatique, par exemples : les baromètres en U, à cuvette, à siphon, les tubes de Pitot et les l'effet de Venturi...etc.

Bien sûr, ça nous ramène à introduire la notion de conservation d'énergie dans un volume de contrôle (V.C.). C'est à dire, on va ajouter un 3ème terme à l'équation fondamentale de l'hydrostatique et qui deviendra l'équation (très connue) de Bernoulli.

Dans ce genre de problème, on fait appel à la fois à l'équation de Bernoulli et aussi à l'équation de l'hydrostatique (au niveau des sondes de mesure de pression). quelques exemples d'application sont présentés ci-après.

Application 1 : conduite avec tube en U

De l'huile de densité 0,75 circule à travers une conduite horizontale (figure 2.7), et fait monter le mercure dans le manomètre en "U". Calculer la valeur de la hauteur h , si la pression mesuré au point A est égale à $1,4 \text{ kg/cm}^2$. On donne : $z = 0,825 \text{ m}$.

Réponse :

On a : $P_B = P_C$ (points B et C même niveau et même fluide).

En appliquant la loi fondamentale de l'hydrostatique entre les points A-B et C-D, on

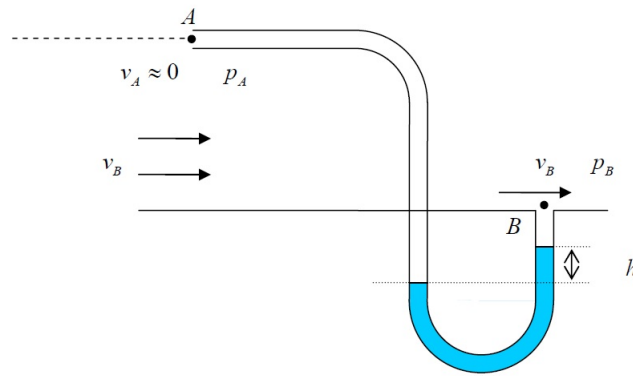


FIGURE 2.8 – Principe de la sonde de Pitot

trouve :

$$\implies P_A + \rho \cdot g \cdot (z + h) = P_D + \rho_m \cdot g \cdot h$$

$$\implies h \cdot g \cdot (\rho_m + \rho) = P_A - P_D + \rho \cdot g \cdot z$$

$$\implies h = \frac{P_A - P_D + \rho \cdot g \cdot z}{g \cdot (\rho_m + \rho)}$$

$$A.N. : \implies h = \frac{1.4 \times 10^5 - 101325 + 750 \times 10 \times 0.825}{10 \cdot (113600 + 750)}$$

$$\implies h = 1.14m$$

Application 2 : sonde de Pitot « tube en U »

La sonde de Pitot permet de mesurer la vitesse d'un écoulement d'air autour d'une structure, par exemple un avion.

A l'entrée du tube, en A, la vitesse de l'air est nulle. Au point B, la vitesse de l'air est sensiblement égale à sa valeur non perturbée par l'instrument. L'équation de Bernoulli nous donne :

$$\implies P_A = P_B + \frac{\rho}{2} v^2$$

donc, la vitesse de l'air est : $v = \sqrt{\frac{\rho}{2} (P_A - P_B)}$ m/s

L'équation de Bernoulli permet de comprendre le principe de divers instruments et appareils tels que trompe à eau, bec Bunsen, pistolet à peinture, carburateur, etc... En revanche, elle ne permet pas d'expliquer les pertes de charge dans les tuyaux, car le fluide est supposé non visqueux.

Application 3 : deux conduites avec tube en U

Soit deux conduites de sections S_A et S_B , qui contiennent de l'eau aux pressions respectives de 2,80 et 1,40 bar. on demande de calculer la dénivellation h de mercure du manomètre différentielle. On donne : $x + y = 2m$. La densité du mercure est : $d = 13,57$.

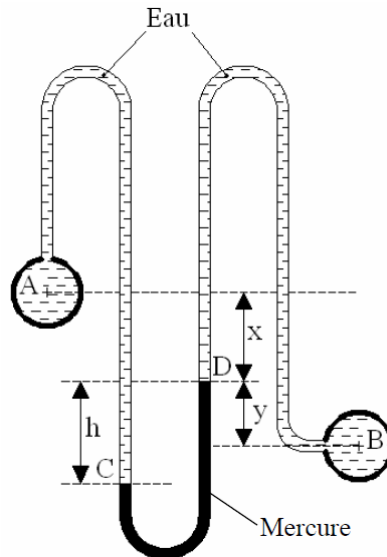


FIGURE 2.9 – Différence de pression entre deux conduites

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points A et C, on trouve :

$$P_C - P_A = \rho_{eau} \cdot g \cdot (Z_A - Z_C) \implies P_C = P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (h + x)$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points C et D, on trouve :

$$P_D - P_C = \rho_{mercure} \cdot g \cdot (Z_C - Z_D) \implies P_D = P_C + d \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot (-h)$$

$$\implies P_D = P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (h + x) + d \cdot \rho_{eau} \cdot g \cdot (-h)$$

$$\implies P_D = P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot x + \rho_{eau} \cdot g \cdot h(1 - d)$$

En appliquant l'équation de l'hydrostatique entre les points D et B, on trouve :

$$P_B - P_D = \rho_{eau} \cdot g \cdot (Z_D - Z_B) \implies P_B = P_D - \rho_{eau} \cdot g \cdot y$$

$$\implies P_B = P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (x + y) + \rho_{eau} \cdot g \cdot h(1 - d)$$

$$\implies h = \frac{P_B - (P_A + \rho_{eau} \cdot g \cdot (x + y))}{\rho_{eau} \cdot g \cdot (1 - d)} = \frac{2,8 \times 10^5 - (1,4 \times 10^5 + 1000 \times 9,81 \times 2)}{1000 \times 9,81 \times (1 - 13,57)}$$

AN : $h = 0,95m$.

2.2.4 Application de de l'équation de BERNOULLI (approche statique)

Le passage de la loi fondamentale de l'hydrostatique à l'équation de Bernoulli, s'effectue selon le principe de conservation d'énergie. Tout en considérant la variation de l'énergie cinétique, qui est (toujours) égale à la somme des travaux des forces extérieures.

$$dE_c = \sum \delta W = -dE_P + \delta W_{\text{forces pression}} \implies \frac{1}{2}v^2 + \frac{g}{\rho}z + \frac{P}{\rho} = C^{te}$$

et l'énergie totale d'un fluide statique est conservé tout point de ce fluide.

$$\text{càd. } E_{\text{totale}} = E_{\text{cinétique}} + E_{\text{potentielle}} + E_{\text{locale}} = C^{te}$$

2.2.4.1 Effet de gravitation sur un liquide

Application de vidange d'un réservoir (formule de Torricelli) Considérons un réservoir de grande section, rempli d'un liquide qui s'écoule à travers un orifice de section faible (devant celle du réservoir) et situé à une hauteur sous la surface libre (voir figure). La pression atmosphérique P_0 s'exerce à la fois sur la surface libre et sur le jet à la sortie de l'orifice. En supposant que le liquide est incompressible et non visqueux, il est possible d'utiliser l'équation de Bernoulli pour déterminer la vitesse de vidange du réservoir.

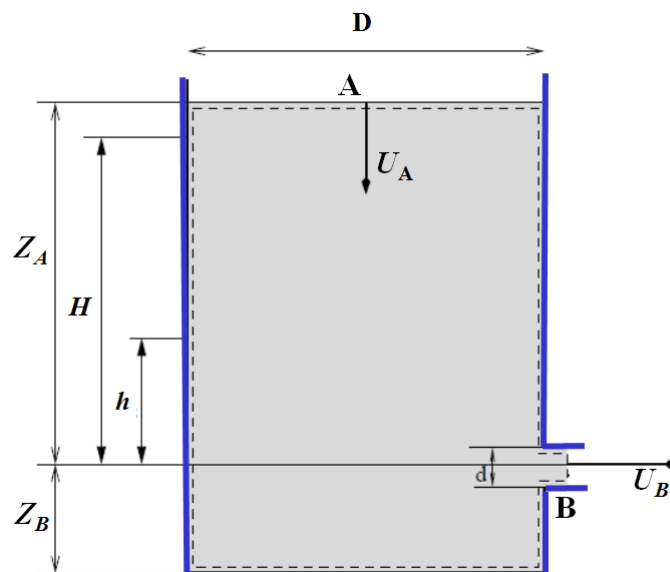


FIGURE 2.10 – Vidange de réservoir

Considérons un point A de la surface libre et un point B situé dans le jet. Il existe une

ligne de courant passant par ces deux points et le long de laquelle on peut appliquer l'équation de Bernoulli :

$$P_A + \rho g Z_A + \frac{1}{2} \rho U_A^2 = P_B + \rho g Z_B + \frac{1}{2} \rho U_B^2$$

Compte tenu du rapport de section entre le réservoir et l'orifice, on peut y négliger U_A devant U_B ($U_A \ll U_B$), car la surface du récipient est grande vis-à-vis de celle de la section l'orifice : $U_A \approx 0$. Par ailleurs, le point A étant situé sur la surface libre, on peut admettre que : $P_A = P_B$ pour de petites différences d'altitude. Dans le domaine du jet où se trouve le point B, les lignes de courant sont rectilignes et parallèles et par conséquent la pression motrice P est uniforme sur une même section. En négligeant les variations d'altitude au sein du jet, il s'ensuit que la pression statique est également à peu près uniforme sur une même section. Or, par continuité de la pression à l'interface jet-atmosphère, la pression atmosphérique règne donc en tout point du jet (ce résultat peut être généralisé à toute situation dans laquelle un liquide s'écoule sous la forme d'un jet libre).

Appliquant Bernoulli entre A et B : $P_A + \rho g Z_A + \frac{1}{2} \rho U_A^2 = P_B + \rho g Z_B + \frac{1}{2} \rho U_B^2$

Comme : $P_A = P_B$ et $U_A \approx 0$, l'équation de Bernoulli prend la forme suivante :

$$\Rightarrow P_0 + \rho g Z_A + 0 = P_0 + \rho g Z_B + \frac{1}{2} \rho U_B^2$$

$$\implies \frac{1}{2} \rho U_B^2 = \rho g (Z_A - Z_B) = \rho g H$$

qui, après simplification, permet d'écrire la formule non-uniforme de Torricelli : $U_B = \sqrt{2gH}$

Remarque :

La vitesse d'écoulement du liquide et le temps de vidange sont indépendants de sa masse volumique du liquide ; le seul paramètre dont ils dépendent est donc la hauteur séparant l'orifice de la surface libre du liquide.

Exercice d'application (Cas d'un Siphon) : On considère un siphon de diamètre $d=10$ mm alimenté par un réservoir d'essence de grandes dimensions par rapport d et ouvert l'atmosphère. On suppose que :

- le fluide est parfait.
- le niveau du fluide dans le réservoir varie lentement.
- L'accélération de la pesanteur $g = 9.81m.s^2$.
- le poids volumique de l'essence : $\omega = 6896N/m^3$.
- $H = Z_A - Z_S = 2,5m$.

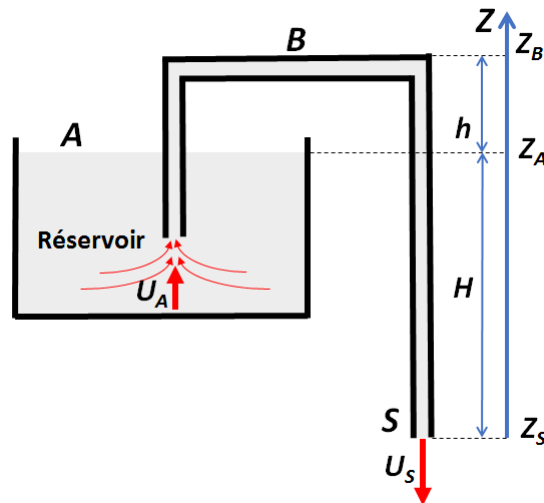


FIGURE 2.11 – Siphon

- 1) En appliquant le Théorème de Bernoulli entre les points A et S, calculer la vitesse d'écoulement V_S dans le siphon.
- 2) En déduire le débit volumique q_V .
- 3) Donner l'expression de la pression P_B au point B en fonction de h , H , et P_{atm} . Calculer P_B pour $h = 0.4m$.
- 4) h peut-elle prendre n'importe quelle valeur? Justifier votre réponse.

Solution :

1) Appliquant l'équation de Bernoulli entre les points S et A : $\frac{P_S}{\omega} + Z_S + \frac{U_S^2}{2\omega} = \frac{P_A}{\omega} + Z_A + \frac{U_A^2}{2\omega}$

on a : $P_S = P_A = P_{atm}$, $U_A = 0$ et $Z_A - Z_S = H$

$U_S = \sqrt{2gH}$, A.N. : $U_S = \sqrt{2 \times 9.81 \times 2.5} = 7m/s$

2) Le débit volumique : $q_{v/S} = U_S \times S = U_S \times \frac{\pi d^2}{4}$ A.N. : $q_{v/S} = 7 \times \frac{3.14 \times (0.01)^2}{4} = 5.5 \times 10^{-4} m^3/s = 0.55l/s$

3) Théorème de Bernoulli entre B et S : $\frac{P_B}{\omega} + Z_B + \frac{U_B^2}{2\omega} = \frac{P_S}{\omega} + Z_S + \frac{U_S^2}{2\omega}$

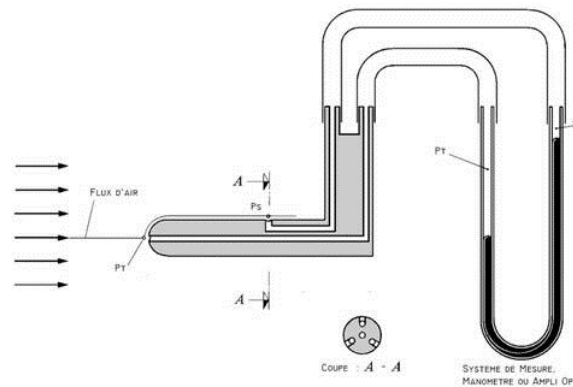
Or : $U_S = U_B$, $Z_B - Z_S = (H + h)$ et $P_S = P_{atm}$

$$P_B = P_{atm} - \omega(H + h) \text{ A.N. : } P_B = 10^5 - 6896 \times (2,5 + 0,4) = 80001,6 Pa = 0,8 bar$$

4) Non ! Il faut que $P_B > 0$

$$\text{Équivaut à : } h < \frac{P_{atm}}{\omega} - H, \text{ A.N. : } h < \frac{10^5}{9.81 \times 700} - 2.5 = 12m.$$

Exercice d'application (tube de Pitot) : Le tube de Pitot, représenté ci-dessus, permet de mesurer la vitesse (ou le débit) d'un fluide dans une canalisation de section S . Le fluide circulant dans la canalisation est animé d'une vitesse U et possède une masse volumique ρ_1 alors que le tube en U est rempli d'un liquide de masse volumique ρ_2 .



Énoncé

FIGURE 2.12 – Tube de Pitot

Le fluide est incompressible ($\rho = Cste$) et parfait ($\mu = 0$). - L'écoulement est permanent ($\partial U / \partial x = 0$).

Nous pouvons donc appliquer la relation de Bernoulli sous la forme :

$$P + \rho g Z + \frac{1}{2} \rho U^2 = Cste$$

- L'ouverture B est dirigée face au jet et constitue un point d'arrêt (la vitesse du fluide en B est nulle, $U_B = 0$).
- $Z_A = Z_B$
- $U_B = U_{B'} = U_{A'} = 0$
- La vitesse dans le tube est nulle (pas de mouvement), ce qui nous laisse écrire en appliquant le principe fondamental de la statique des fluides dans cette partie du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{B'} - P_{A'} = \rho_2 g h \\ P_{A'} - P_A = \rho_1 g (Z_A - Z_{A'}) \\ P_{B'} - P_B = \rho_2 g (Z_B - Z_{B'}) \end{array} \right.$$

$$P_A + \rho_1 g Z_A + \frac{1}{2} \rho_1 U_A^2 = P_B + \rho_1 g Z_B + \frac{1}{2} \rho_1 U_B^2$$

$$\implies P_B = P_A + \frac{1}{2} \rho_1 U_A^2$$

$$P_{A'} - P_A = \rho_1 g (Z_A - Z_{A'})$$

$$P_{B'} - \rho_2 g (Z_B - Z_{B'}) = P_{A'} + \frac{1}{2} \rho_1 U_A^2 - \rho_1 g (Z_A - Z_{A'})$$

$$\implies U_A = \sqrt{2hg \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)}$$

2.3 Théorèmes de transport

2.3.1 Volumes et surfaces de contrôle

Un volume de contrôle est un volume imaginaire sur lequel on procède au bilan intégral d'une grandeur physique comme la masse, la quantité de mouvement ou encore l'énergie. On appelle surface de contrôle l'enveloppe délimitant un volume de contrôle.

Le fluide peut entrer et sortir d'un volume de contrôle c'est-à-dire traverser la surface de contrôle qui peut elle-même être fixe ou mobile.

Le volume de contrôle peut être sous différentes formes. Il peut être fixe (constant), matériel à volume variable (masse constante), ou encore arbitraire dont le déplacement et la déformation sont différents de ceux du fluide qui le traverse.

2.3.2 Théorème de transport

En Mécanique des Fluides, l'évolution des grandeurs matérielles est analysée à l'aide d'équations intégrales de bilan sur des domaines fluides macroscopiques. Le transport de ces grandeurs dans l'écoulement est explicité en suivant le mouvement; il est par conséquent nécessaire d'établir l'expression de la dérivée particulaire d'une intégrale volumique.

Généralement, un volume de contrôle arbitraire est noté par $Va(t)$ limité par l'enveloppe fermée $Sa(t)$. Soient $f(\vec{x}, t)$ une fonction scalaire continue et dérivable et $I(t)$ son intégrale sur le volume Va .

$$I(t) = \iiint_{Va} f(\vec{x}, t) dV$$

Le taux de variation dans le temps de l'intégrale $I(t)$ est donné par :

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{Va} f dV = \iiint_{Va(t)} \frac{df}{dt} dV + \iint_{Sa(t)} f(\vec{V}_a \bullet \vec{n}) dS \text{ —————} (*)$$

où \vec{V}_a désigne la vitesse locale de la surface de contrôle et \vec{n} la normale extérieure. La relation précédente (*), est connue sous le nom de la règle de Leibnitz, s'interprète comme suit :

Taux de variation de l'intégrale de $f(\vec{x}, t)$ sur le volume $Va(t)$	=	Intégrale de la variation temporelle de $f(\vec{x}, t)$ sur le volume $Va(t)$	+	Flux de $f(\vec{x}, t)$ à travers l'enveloppe $Sa(t)$
---	---	---	---	---