Chapitre 4

Équation de continuité (conservation de matière)

La matière a une structure discontinue et la notion de milieu continu est une pure notion « schématique ». Elle consiste à admettre que la masse et toutes ses propriétés sont réparties continûment dans le matériau (ce qui n'exclut pas les discontinuités aux interfaces). Bien entendu ce schéma ne prétend représenter que les phénomènes macroscopiques ou mésoscopique dont les échelles caractéristiques sont très grandes devant la distance intermoléculaire moyenne. Comme il n'est pas question d'ignorer complètement les phénomènes dont le siège est à l'échelle moléculaire (comme celui de la diffusion), ceux-ci devront être représentés à travers une description macroscopique (ou mésoscopique) de leurs conséquences à grande échelle. Le concept du continuum présente l'immense avantage d'autoriser le calcul différentiel et intégral dont les outils sont présentés au premier chapitre d'analyse vectoriel.

4.1 Courant de matière

Soit un flux de matière qui travers une surface élémentaire dS. La quantité de matière traversant dS pendant un temps dt est : $dm = \rho q_V = \rho V.dt.\overrightarrow{dS} = \rho\overrightarrow{v}.\overrightarrow{dS}.dt$= $\rho\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}_{\perp}.dS.dt$

$\Rightarrow dm$ =$\rho\overrightarrow{v}.\overrightarrow{dS}.dt$

Par définition : $\overrightarrow{j} = \rho\overrightarrow{v}$ est la densité de courant de matière (ou de masse).

donc, $\frac{dm}{dt}\Big|_{/dS}=\overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS}$

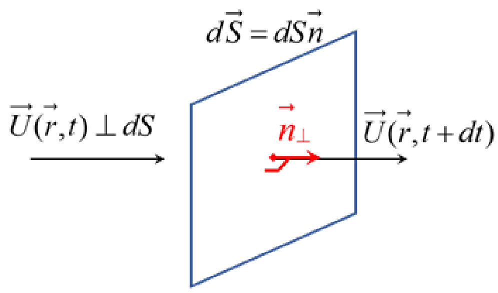

FIGURE 4.1 – Flux de matière

La quantité de matière qui travers dS (ou dite aussi l'intensité de masse), par analogie au courant électrique : $\frac{dq}{dt}\Big|_{/dS}=\overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS} \dashrightarrow \varphi_{/dS}=\overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS}$ (flux).

$$I_{/S} = \iint_S \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS} = \iint_S \overrightarrow{v}.\overrightarrow{dS} \tag{4.1}$$

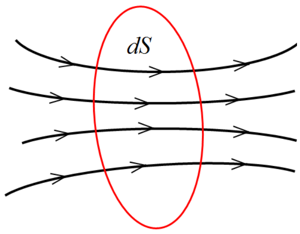

FIGURE 4.2 – Courant de matière

exemple d'une c**Exercice 1 :** analisation, le flux de matière est conservé : $I_{/S_1}=q_{m_1}=\frac{dm}{dt}\Big|_{/S_1}=\iint\limits_S \overrightarrow{j}.\overrightarrow{dS}$

$q_{m_1} = q_{m_2}$[kg/s] : le débit massique est conservé le long d'un tube de lignes de courant (figure 4.3), entre l'entrée (section S1) et la sortie (section S2), c'est similaire à une conduite réelle.

Par analogie au circuit électrique, le courant est conservé le long du circuit (figure 4.4).

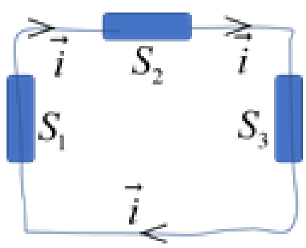

FIGURE 4.4 – Analogie au circuit électrique

Enoncé

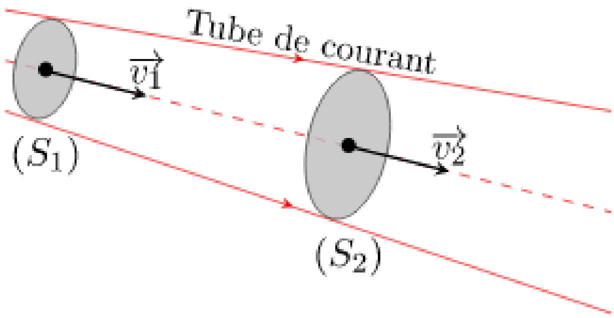

FIGURE 4.3 – Conservation de débit d'une conduite

Un écoulement stationnaire et incompressible, le flux de matière est conservé, comme dans le cas du courant le long d'un dans un fil électrique, et donné par : $I_{/S_1}{=}I_{/S_2}{=}I_{/S_i}$.

4.2 Bilan de matière (conservation de masse)

Soit un élément de volume $dxdydz$: $dm = \rho dV = \rho dxdydz$

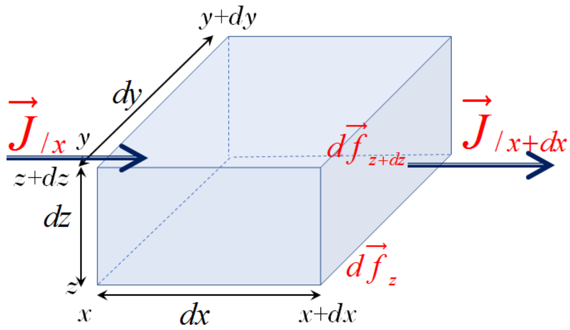

FIGURE 4.5 – Bilan de matière suivant « ox »

Pendant dt la quantité de matière entrante dans l'élément suivant (ox) est : $\vec{j}_{(x)}.dS.\vec{n}_x.dt = \rho.\vec{u}.dydz.\vec{n}$

La quantité qui sorte suivant (ox) est : $-\vec{j}_{(x+dx)}.dS.\vec{n}_x.dt = -\rho.\vec{u}.dydz.\vec{n}_x.dt$

Le bilan de matière sur suivant trois axes :

(ox) : $\vec{j}_{(x)}.dydz.\vec{n}_x.dt = -\vec{j}_{(x+dx)}.dydz.\vec{n}_x.dt = 0$

(oy) : $\vec{j}_{(y)}.dxdz.\vec{n}_y.dt = -\vec{j}_{(y+dy)}.dxdz.\vec{n}_y.dt = 0$

(oz) : $\vec{j}_{(z)}.dydx.\vec{n}_z.dt = -\vec{j}_{(z+dz)}.dydx.\vec{n}_z.dt = 0$

$$\text{on a : } \vec{j} = \vec{j}_x.\vec{n}_x + \vec{j}_y.\vec{n}_y + \vec{j}_z.\vec{n}_z$$

alors : $dm = -dxdydz.dt\left[\frac{\vec{j}_{(x+dx)} - \vec{j}_{(x)}}{dx}\vec{n}_x + \frac{\vec{j}_{(y+dy)} - \vec{j}_{(y)}}{dy}\vec{n}_y + \frac{\vec{j}_{(z+dz)} - \vec{j}_{(z)}}{dz}\vec{n}_z\right]$

$$\Rightarrow dm = -dV.dt\left[\frac{\overrightarrow{j}_{(x)}}{dx}\overrightarrow{n}_x + \frac{\overrightarrow{j}_{(y)}}{dy}\overrightarrow{n}_y + \frac{\overrightarrow{j}_{(z)}}{dz}\overrightarrow{n}_z\right] \Rightarrow \frac{dm}{dt} = -dV\left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j}\right) \Rightarrow \frac{d(\rho dV)}{dt} = -dV\left(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{j}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d(\rho)}{dt} = -div\left(\overrightarrow{j}\right) = -div\left(\rho\overrightarrow{U}\right)$$

Donc :

$$\frac{d\rho}{dt} + div\left(\rho\overrightarrow{U}\right) = 0 \tag{4.2}$$

C'est la dite équation de continuité ou bien dite : « équation de conservation de masse ».

4.3 Flux de matière d'un volume fini "V"

Soit un volume fini de fluide "V" et de surface d'enveloppe Σ(V).

Donc : $\frac{dM}{dt} = \iiint\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV$; avec : $M = \iiint\limits_V \rho dV$

Par ailleurs, le bilan de matière donne :

Flux de matière entrant à travers l'enveloppe Σ : $\frac{dM}{dt} = \oiint\limits_{\Sigma(V)} \oiint j(\overrightarrow{r}, t).d\overrightarrow{S}_{in}$

Flux de matière sortant à travers l'enveloppe Σ : $\frac{dM}{dt} = \oiint\limits_{\Sigma(V)} \overrightarrow{j}(\overrightarrow{r}, t).d\overrightarrow{S}_{out}$

D'après le théorème de Green Ostrogradski : $\oiint \oiint\limits_{\Sigma(V)} \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S} = \iiint\limits_V div\overrightarrow{j}.dV$

Si le fluide est incompressible (ρ=C^{ste}) $\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + div\left(\overrightarrow{j}\right) = 0$

$$\Rightarrow div\left(\rho\overrightarrow{U}\right) = 0$$

$$\Rightarrow div\left(\overrightarrow{U}\right) = 0$$

Courant à travers la surface de l'enveloppe fermée (V) est :

$$I_{/\Sigma} = \oiint\limits_{\Sigma(V)} \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S} = \iiint\limits_V div\overrightarrow{j}.dV = 0$$

Application :

La loi des nœuds (Σ de tout ce qui entre = Σ de tout ce qui sort) à travers la surface de l'enveloppe :

$div\left(\overrightarrow{j}\right) = 0 \Rightarrow \oiint\limits_{\Sigma(V)} \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S}_{out} = 0 \Longrightarrow \oiint\limits_{\Sigma(V)} \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S}_{out} = -\iint\limits_{S_1} \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S}_{flow} + \iint\limits_{S_2} \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S}_{flow} + \iint\limits_{S_3} \overrightarrow{j}.d\overrightarrow{S}_{flow}$

$\Rightarrow 0 = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3$ (c'est la loi de nœuds en électricité).

Par analogie à la loi des nœuds d'électricité, la masse est aussi conservé dans une bifurcation de conduite, qui est considéré comme un nœud.

Selon la loi des nœuds la masse est conservée et le débit aussi, donc la somme des débit entrant est égale à la somme des débits sortant dans le cas de la figure 3.6.

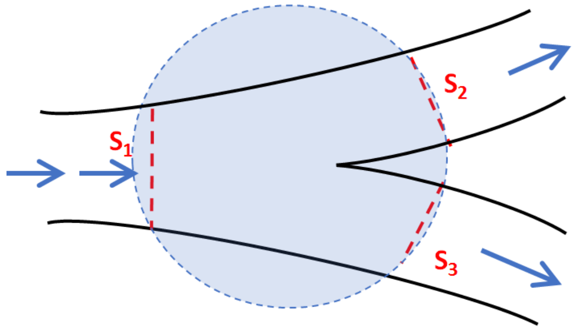

FIGURE 4.6 – Application de la loi des nœuds

Exemples de divergence "$div(\overrightarrow{U})$ " d'écoulement de fluide : la divergence représente la variation de débit entre les lignes de courant pour un écoulement d'un fluide incompressible (figure ci-après).

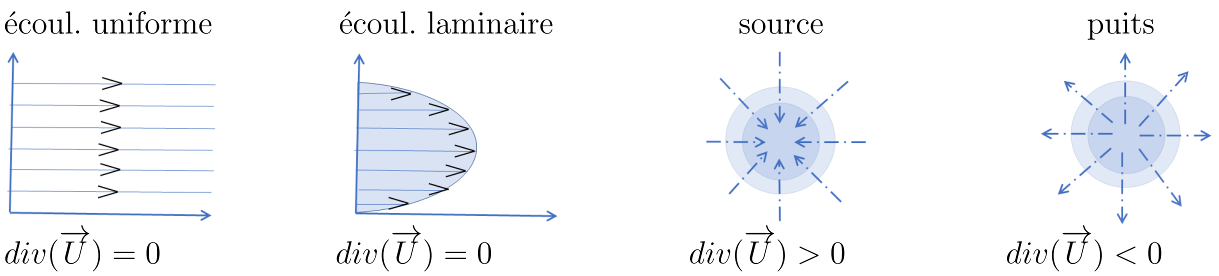

FIGURE 4.7 – Exemples de divergence

4.4 Équation de continuité

Rappel : L'équation de continuité traduit le principe de conservation de masse.

Soit un élément de volume $dV = dxdydz$, sa masse est $dm = \rho dV = \rho dxdydz$.

Si la matière est conservée, sa variation dans le temps est nulle, pendant un temps « dt » on a : $\frac{dm}{dt} = 0$

alors : $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{U} = \frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial t}dt + \frac{\partial m}{\partial x}dx + \frac{\partial m}{\partial y}dy + \frac{\partial m}{\partial z}dz$

on a : $\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\partial m}{\partial t}dt + \frac{\partial m}{\partial x}dx + \frac{\partial m}{\partial y}dy + \frac{\partial m}{\partial z}dz$

$\Rightarrow 0 = \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x}u + \frac{\partial m}{\partial y}v + \frac{\partial m}{\partial z}w$

$\Rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} = -\left(\frac{\partial m}{\partial x}u + \frac{\partial m}{\partial y}v + \frac{\partial m}{\partial z}w\right)$; avec : $m = \rho dV$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho dV}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho dV}{\partial x}u + \frac{\partial \rho dV}{\partial y}v + \frac{\partial \rho dV}{\partial z}w\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t}dV = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)dV$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) \tag{4.3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\overrightarrow{\nabla}\left(\rho\overrightarrow{U}\right) + \sum \rho q_v$$

avec : $q_v > 0$ cas de source et $q_v < 0$ cas puits.

- écoulement permanent (stationnaire) : $\frac{\partial}{\partial t} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\nabla}\left(\rho\overrightarrow{U}\right) = \sum \rho q_v$
- écoulement incompressible : $\rho = C^{ste} \longrightarrow \overrightarrow{\nabla}\left(\rho\overrightarrow{U}\right) = \rho \sum q_v \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{U} = \sum q_v$.
- écoulement conservatif et incompressible : $\sum q_v = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{U} = 0$ (ni puits, ni source)

Exercice 1 : Soit un écoulement dont le potentiel des vitesses est donné par :

$\varphi(x, y) = x^2 - 2y - y^2, avec : \overrightarrow{v} = \overrightarrow{grad}\varphi = \overrightarrow{\nabla}\varphi$

- Démontrer que l'écoulement est : bidimensionnel, permanent et incompressible (vérifiant l'équation de continuité) ?

Exercice 2 : L'équation de la continuité pour l'écoulement permanent isovolume est-elle vérifier ? si les composantes de la vitesse sont les suivantes pour les deux cas (a) et (b) :

$$\text{a)} \begin{cases} u = 2x^2 - xy + z^2 \\ v = x^2 - 4xy + y^2 \\ w = -2xy - yz + y^2 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} u = (2x - 3y)t \\ v = (x - 2y)t \\ 0 \end{cases}$$