

# Chapitre 5

## Équations de Navier-Stokes (fluides réels)

### 5.1 Généralités et définitions

L'étude des écoulements réels (visqueux) est gouvernée par l'équation dite équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{U}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{U} + \rho \vec{g} \rightarrow \text{équation de Navier - Stokes} \quad (5.1)$$

En pratique, la solution analytique de cette équation est impossible. Généralement, on pose des hypothèses simplificatrices et on procède aux solutions numériques basées sur des méthodes numériques (différences finies, volumes finis, éléments finis...etc). Dans toutes les situations, les forces de frottements ont un grand rôle, ou la viscosité n'est plus négligeable (fluide réel), ce qui fait la différence avec un fluide parfait.

### 5.2 Régime d'écoulement

Dans la pratique, parmi les effets de viscosité, on retrouve le changement de la nature et du comportement d'écoulement avec l'accélération (vitesse) sous l'effet des forces visqueuses.

Ce qui caractérise ce qu'on l'appelle régime d'écoulement. O. Reynolds a réalisé une étude systématique du régime d'écoulement en fonction des différents paramètres intervenant (débit, viscosité, dimension de géométrie ... etc). Il a montré que le régime dépend d'une grandeur sans dimension  $Re = \frac{U\rho\ell}{\mu}$ , appelé « Nombre de Reynolds », qui regroupe les grandeurs dimensionnelles suivantes : la vitesse d'écoulement ( $U$ ), la masse volumique ( $\rho$ ), la viscosité dynamique ( $\mu$ ) et la longueur caractéristique de la géométrie ( $\ell$ ). D'un point de vue sens physique, ce nombre adimensionnel, caractérise le rapport des forces d'inertie sur les forces visqueuses.

### 5.3 Tenseur de contraintes

On a un point M qui appartient à une surface  $dS$ , la force de surfacique (de pression), s'exprime :  $d\vec{F} = -\vec{n}PdS$ , qui est normale à la surface  $dS$ .

Pour une contrainte quelconque, on a :  $d\vec{F} = -\vec{T}_n dS$ .

Soit la norme de cette surface :  $\vec{n}_\perp = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$

et dans ce cas :  $\vec{T}_n = T_x \vec{n}_x + T_y \vec{n}_y + T_z \vec{n}_z$

Les projections de cette contrainte surfacique sur les surfaces  $\perp$  aux axes, soient :

— la projection de  $dS$  sur le plan  $\perp$  à X est :  $\vec{T}_x = \sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{yx} \vec{j} + \tau_{zx} \vec{k}$

— la projection de  $dS$  sur le plan  $\perp$  à Y est : Équation des moments  $\vec{T}_y = \tau_{xy} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{zy} \vec{k}$

— la projection de  $dS$  sur le plan  $\perp$  à Z est :  $\vec{T}_z = \tau_{xz} \vec{i} + \tau_{yz} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k}$

Alors :  $\vec{T}_n = T_x \vec{n}_x + T_y \vec{n}_y + T_z \vec{n}_z = (\sigma_{xx} \vec{i} + \tau_{yx} \vec{j} + \tau_{zx} \vec{k}) \vec{n}_x + (\tau_{xy} \vec{i} + \sigma_{yy} \vec{j} + \tau_{zy} \vec{k}) \vec{n}_y + (\tau_{xz} \vec{i} + \tau_{yz} \vec{j} + \sigma_{zz} \vec{k}) \vec{n}_z$

on peut écrire sous forme matricielle :  $\vec{T}_n = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{T}_n = \vec{\bar{T}} \cdot \vec{n}$

--> c'est le tenseur des contraintes.

d'où : on peut le décomposer par la sommation de deux matrices, un tenseur sphérique et un autre de trace nulle.

$$\Rightarrow \bar{\bar{T}} = \alpha \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{T}}' \text{ tel } \bar{\bar{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{\bar{T}}' = \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma'_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \text{c'est le tenseur des}$$

contraintes visqueuses.

$$\text{avec : } \begin{cases} \sigma_{xx} = \alpha + \sigma'_{xx} \\ \sigma_{yy} = \alpha + \sigma'_{yy} \\ \sigma_{zz} = \alpha + \sigma'_{zz} \end{cases} \text{ et } \sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} = 0 = -3\alpha + \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} Tr(\bar{\bar{T}})$$

$$\text{On écrit : } \vec{T}_n = \bar{\bar{T}} \cdot \vec{n} = \alpha \bar{\bar{I}} \cdot \vec{n} + \bar{\bar{T}}' \cdot \vec{n} = \alpha \vec{n} + \bar{\bar{T}}' \cdot \vec{n}$$

donc :  $d\vec{F} = \vec{T}_n \cdot dS = \alpha \vec{n} \cdot dS + \bar{\bar{T}}' \cdot \vec{n} \cdot dS = -P \vec{n} \cdot dS + \bar{\bar{T}}' \cdot \vec{n} \cdot dS$  (où : le 1<sup>er</sup> terme présente les forces de pression hydrostatique).

d'où :  $P = \frac{1}{3} Tr(\bar{\bar{T}})$  et  $Tr(\bar{\bar{T}}') = 0$  avec :  $\alpha = -P$  c'est la pression hydrostatique.

## 5.4 Équation de Navier-Stokes

### 5.4.1 Notion du tenseur de déformation

Il faut voir aussi le tenseur de déformation «  $\bar{\bar{G}}$  » ?

soit un élément de fluide «  $dV$  » en déplacement de  $M$  vers  $M'$ , le champ de vitesses dérive de ce qui suit :

$$\vec{V}' = \vec{V} + d\vec{V} = \vec{V}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) + \vec{V}(d\vec{r}) \text{ et on écrit :}$$

$$\begin{cases} u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w' = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases} \quad \text{—— Équation des moments}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

on note :

$$\overline{\overline{G}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$\overline{\overline{G}}$  : est la matrice Jacobienne ou le Jacobien

$$\Rightarrow \vec{V}(\vec{r} + d\vec{r}) = \vec{V}(\vec{r}) + \overline{\overline{G}}.d\vec{r}$$

On appelle  $\overline{\overline{G}}$  le tenseur de déformation, qui représente quatre types de déformation (translation pure, élongation/contraction, déformation angulaire et rotation pure), comme présenté sur la figure ci-contre.

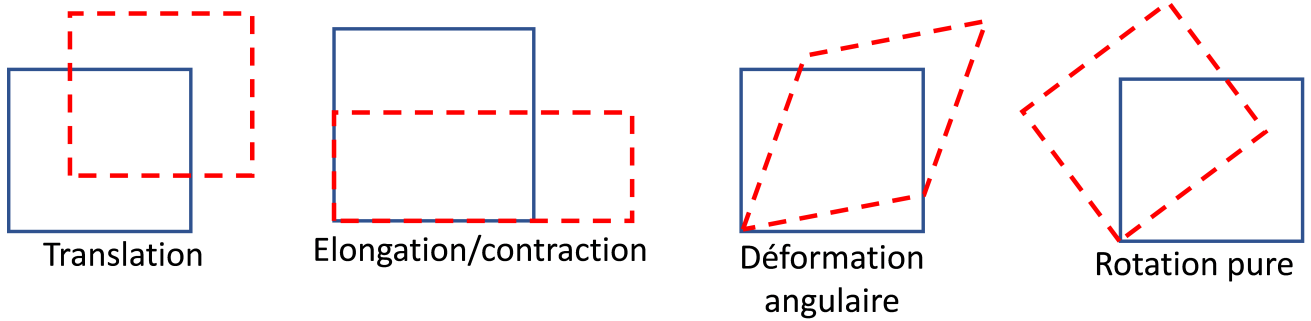


FIGURE 5.1 – Cas de déformations

### 5.4.2 Décomposition du tenseur de déformation

on écrit :  $\overline{\overline{G}} = \overline{\overline{e}} + \overline{\overline{w}}$

$$\text{avec : } \overline{\overline{e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{c'est un tenseur symétrique}$$

$$\text{et } \overline{\overline{w}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{est un tenseur anti-symétrique.}$$

$$\text{On note : } \overline{\overline{w}} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\overline{G}}(d\vec{r}) - \Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{teq} : \bar{\bar{w}} \cdot d\vec{r} &= \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \bar{\bar{w}} \cdot d\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z dy & \Omega_y dz \\ \Omega_z dx & 0 & -\Omega_x dz \\ -\Omega_y dx & \Omega_x dy & 0 \end{bmatrix} = \vec{\Omega} \wedge d\vec{r} \end{aligned}$$

Remarque : On définit le mouvement et la déformation d'une particule fluide en termes de simple translation, élongation/contraction, déformation angulaire et rotation pure, tout en développant l'expression de variation de vitesse ( $d\vec{V}$ ) :

$$\begin{aligned} &= \vec{V}(\vec{r}) + \underbrace{\bar{\bar{G}} \cdot d\vec{r}}_{d\vec{V}} = \vec{V}(\vec{r}) + \bar{\bar{e}} \cdot d\vec{r} + \bar{\bar{w}} \cdot d\vec{r} \\ &\Rightarrow \vec{V}(\vec{r} + d\vec{r}) = \underbrace{\vec{V}(\vec{r})}_{\text{translation}} + \underbrace{\bar{\bar{e}} \cdot d\vec{r}}_{\text{déformation}} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge d\vec{r}}_{\text{rotation pure}} \end{aligned}$$

### 5.4.3 Équation de Navier-Stokes

Par définition d'un fluide est dit « Newtonien », on a le tenseur de contraintes visqueuses  $\bar{\bar{T}}'$  qui dépend linéairement du tenseur de déformation «  $\bar{\bar{e}}$  ».

$\bar{\bar{e}}$  est symétrique  $\longrightarrow e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow e_{ij} = e_{ji}$

On a la relation entre les éléments du tenseur  $\bar{\bar{T}}'$  et  $\bar{\bar{e}}$

pour un fluide isotrope :

$$\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij} + \mu' (e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \delta_{ij} \longrightarrow (*)$$

avec,  $\delta_{ij}$  : symbole Kronecker et  $\delta_{i=j} = 1$  et  $\delta_{i \neq j} = 0$

$\mu$  : viscosité dynamique.

$\mu'$  : viscosité de dilatation.

Les éléments diagonaux du tenseur «  $e_{ij}$  » ne sont que la divergence de la vitesse,

$$\text{c'est à dire : } e_{11} + e_{22} + e_{33} = \sum_{i=1}^3 e_{ii} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \vec{V}$$

pour un fluide incompressible :  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ ,

donc l'équation (\*) devient :  $\sigma'_{ij} = 2\mu e_{ij}$

$$\text{car : } e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = 0$$

Alors, les éléments de  $\overline{\overline{T}}$  et  $\overline{\overline{e}}$  sont directement proportionnels et le coefficient de proportionnalité est la viscosité dynamique du fluide.

$$\text{d'où : } \overline{\overline{T}} = 2\mu\overline{\overline{e}}$$

D'après la seconde loi de la dynamique (Newton) et avec l'hypothèse de fluide Newtonien, incompressible et isotrope :

$$\begin{aligned} \text{on a : } \Sigma \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a} &\Rightarrow -dV \vec{\nabla} P + dV \vec{\nabla} \overline{\overline{T}} + \rho dV \vec{g} = \rho dV \frac{d\vec{V}}{dt} \\ &\Rightarrow -\vec{\nabla} P + 2\mu \vec{\nabla} \overline{\overline{e}} + \rho \vec{g} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \end{aligned}$$

et comme  $\vec{\nabla} \overline{\overline{e}}$  est la notation compacte du tenseur de déformation, qui est égale à :

$$\vec{\nabla} \overline{\overline{e}} = \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} \right) \cdot \vec{e}_i = \sum_i \left[ \sum_j \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \right] \cdot \vec{e}_i$$

$$\text{Enoncé} \Rightarrow \vec{\nabla} \overline{\overline{e}} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left( \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{2} \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} \right) \cdot \vec{e}_i + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \left( \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) \cdot \vec{e}_i$$

$$\text{le second terme est nul : } \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \left( \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_j} \right) \cdot \vec{e}_i = 0 ;$$

car la divergence de vitesse est nulle pour un écoulement incompressible :

$$\left( \sum_j \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = \nabla V_j = 0 \right).$$

et le premier terme est égale à Laplacien de vitesse :

$$\sum_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} = \Delta V_j$$

$$\text{donc : } \vec{\nabla} \overline{\overline{e}} = \frac{1}{2} \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} \right) \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{2} \sum_i (\Delta V_j) \cdot \vec{e}_i$$

et pour un fluide incompressible :  $\nabla V_j = 0$ , alors :

$$\vec{\nabla} \overline{\overline{e}} = \frac{1}{2} \sum_i (\Delta V_j) \cdot \vec{e}_i = \frac{1}{2} \Delta \vec{V}$$

Donc, l'équation de la 2<sup>nd</sup> loi fondamentale de la dynamique s'écrira :

$$-\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{g} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$-\vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{g} = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \left( \vec{V} \vec{\nabla} \right) \vec{V} \rightarrow \text{C'est l'équation de Navier-Stokes}$$

$$\text{avec : } \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( \vec{V} \vec{\nabla} \right) \vec{V}$$

Donc, la projection de l'équation de Navier-Stokes sur les trois axes, on obtient le système d'équations en coordonnées cartésiennes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho g \end{array} \right\} \quad (5.3)$$

Le système d'équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques,

$$\text{avec : } \vec{u} = (u_r, v_\theta, w) \text{ et } \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right) + w \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \\ \rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \rho \left[ u_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_r}{r} \right) + w \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - \rho g \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

Le système d'équations de Navier-Stokes en coordonnées sphérique,

$$\text{avec : } \vec{u} = (u_r, u_\theta, u_\varphi) \text{ et } \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_{\theta \cot \theta}}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

Sur l'axe  $r$  :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} + \rho \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r} \right] &= -\frac{\partial P}{\partial r} + f_r \\ + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

Sur l'axe  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \rho \left[ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^2 \cot \theta}{r} \right] &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + f_\theta \\ + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

Sur l'axe  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + \rho \left[ u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_\varphi \cot \theta}{r} + \frac{u_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + f_\varphi \\ + \mu \left[ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} \right] \end{aligned}$$

## 5.5 Pertes des charges (application aux fluides réels)

Il existe deux types de pertes de charges, les pertes de charges linéaires liées à la longueur et les pertes singulières liées aux changement de formes du circuit de l'écoulement du fluide ( variation des section de passage du fluide).

## 5.6 Pertes de charge linéaires

Les pertes de charge linéaires s'expriment par l'équation (1) donnée Équation des moments en fonction du coefficient de pertes de charge linéaire ( $\lambda$ ) :

$$J_{L12} = -\lambda \frac{v^2}{2g} \left( \frac{D}{L} \right) \quad (5.5)$$

avec :

D : Diamètre hydraulique,

L : Longueur de canalisation,

v : vitesse moyenne d'écoulement,

g : accélération de pesanteur,

$\lambda$  : coefficient de perte de charge linéaire, qui est lié aussi au coefficient de frottement (f : friction factor), donné par l'équation ci-après :

$$f = \frac{\lambda}{4}$$

et  $f = \frac{2\tau}{\rho v^2}$  avec :  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$  n : normale à la direction d'écoulement.

$\lambda$  n'est fonction que du nombre de Reynolds et de la rugosité relative de la paroi ( $\varepsilon/D$ ), qui peut être obtenue du diagramme de Moody.

On distingue différent cas :

- Si  $Re < 2300$  : Cas du régime laminaire, appelé aussi droite de Poiseuille, où  $\lambda$  n'est fonction que du nombre de Re :

$$\lambda = \frac{Re}{64}$$

- si  $2300 < Re < 10000$  : cas d'écoulement turbulent et paroi lisse, où  $\lambda$  dépend encore que de  $Re$  et on utilise la droite de Blasius :

$$\lambda = 0.316 \times Re^{-0.25}$$

ou encore l'équation de Van Karman :  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log (Re \sqrt{\lambda}) - 0.8$

qui se résout par méthode itérative (Newton) avec :  $\lambda_0 = 0.02$  comme solution initiale.

- Si  $Re > 10000$  : Cas de régime d'écoulement turbulent et rugueux, alors  $\lambda$  ne dépend plus du nombre de Reynolds. D'après le diagramme de Moody, en très peu de cas la courbe  $\varepsilon/D$  est presque une droite horizontale. Pour les calculs industriels on utilise la relation de Blench :

$$\lambda = 0.790 \sqrt{\frac{\varepsilon}{D}} \rightarrow \text{équation de Blench}$$

Remarque : pour les conduites expérimentales de rugosité uniforme, on utilise la relation de Karman Nikuradse :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log \left( \frac{D}{2\varepsilon} \right) + 1.74$$

Loi générale du coefficient de pertes de charge en régime turbulent et paroi lisse ou rugueuse, ainsi que pour le transitoire. Colebrook et White ont regroupé les lois de Prandtl et Karman, en proposant l'équation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.71D} \right)$$

### 5.6.1 Application (mesure de la viscosité) :

Dans un large réservoir, on place un liquide de masse volumique  $\rho$ . On fixe au fond du récipient un long tube fin horizontal (longueur  $L$  rayon  $R$ ) ; les forces de viscosités sont prépondérantes ici, l'écoulement est très lent (goutte à goutte). La mesure du débit permet de calculer la viscosité  $\mu$ .

En appliquant Bernoulli, dans le réservoir (les forces de viscosité n'interviennent pas là) on obtient :

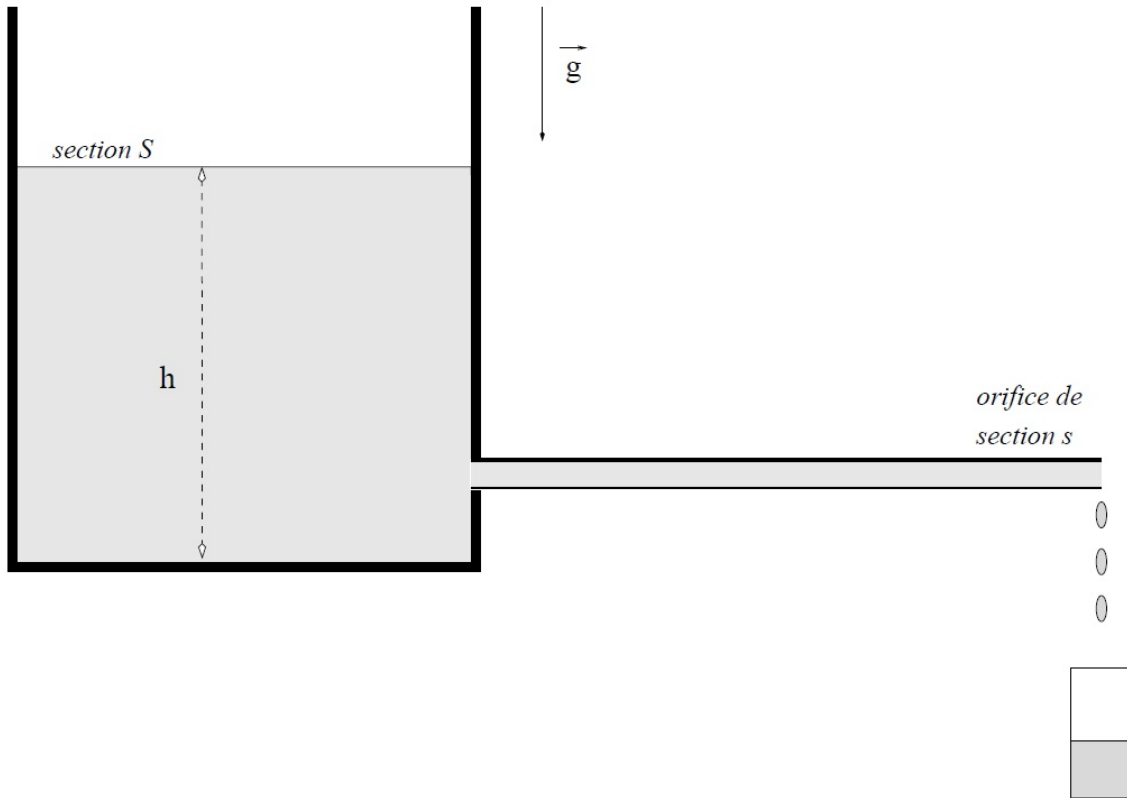


FIGURE 5.2 – Mesure de la viscosité

$$\Delta P = \rho gh - \frac{1}{2}\rho v^2 \approx \rho gh.$$

La loi de poiseuille donne :  $Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \frac{\rho gh}{L} \Rightarrow \mu = \frac{\pi R^4}{8Q} \frac{\rho gh}{L}$

par exemple, pour l'huile de masse volumique  $\rho = 860 \text{ kg/m}^3$ ,  $h = 0.3 \text{ m}$ ,  $R = 2 \text{ mm}$ ,  $L = 0.15 \text{ m}$  et on mesure un débit :  $Q = 53 \text{ ml/min}$ . D'où :

$$\mu = \frac{\pi (2 \cdot 10^{-3})^4}{8 \times (53 \cdot 10^{-6} / 60)} \frac{860 \times 9.81 \times 0.3}{0.15} = 0.12 [\text{kg/m}^2 \cdot \text{s}] = 0.12 [\text{Pa} \cdot \text{s}]$$

## 5.7 Pertes de charge singulières

Ce type de pertes de charge est lié à des accidents ponctuels (changement de forme de tuyauteries), par exemple l'élargissement et le rétrécissement brusques ou progressifs, coudes, formes « U, T et Y », vannes, robinets, clapets ...etc.

Elles s'expriment à partir d'un coefficient de pertes de charge adimensionnel noté par « e » et donnée par la formule suivante :

$$J_{S12} = -e \frac{v^2}{2g}$$

avec :

$e$  : coefficient des pertes de charge singulière,

$v$  : vitesse moyenne d'écoulement à la section de passage considérée,

$g$  : accélération de pesanteur,

Le coefficient «  $e$  » est déterminé explicitement pour quelques cas (ou bien par formule empiriques), ou encore par des abaques. on peut retenir quelques exemples des cas ci-après :

- Élargissement brusque :  $e = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2$
- Rétrécissement brusque :  $e = 0.45 \times \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right)^2$
- Tube plongeant dans un bac :  $e = 1$
- Coude  $90^\circ$  :  $e = 0.8$
- Vanne ouverte :  $e = 1.2$

### 5.7.1 Coefficient de contraction :

L'évaluation du débit de vidange nécessite de prendre en compte la contraction du jet. Comme le montre l'encart de la figure (..) , la vitesse évaluée précédemment correspond à une section plus faible que celle de l'orifice. En conséquence, le débit volumique de vidange s'obtient en calculant :  $q_v = U_B \times S_B$

où  $S_B$  est la section du jet où les lignes de courant peuvent être considérées rectilignes et parallèles. On peut ainsi définir un coefficient de contraction  $C_c = S_B/S$ , lequel dépend essentiellement du type de paroi ainsi que du profil de l'orifice dans la paroi. On peut alors reformuler le débit de vidange ainsi :  $q_v = U_B \times S \times C_c$

**Exemple :** Les figures ci-après donnent de manière non exhaustive quelques valeurs typiques du ce coefficient de contraction.

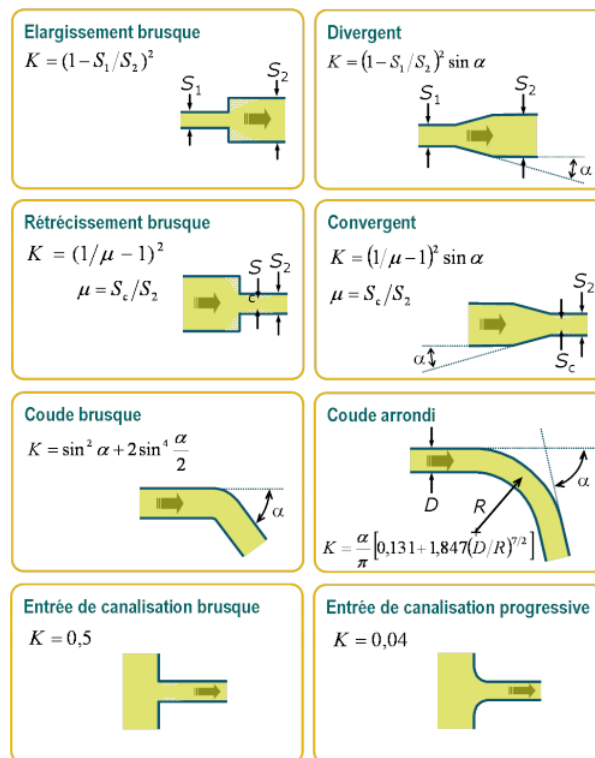


FIGURE 5.3 – Coefficient de contraction [5]

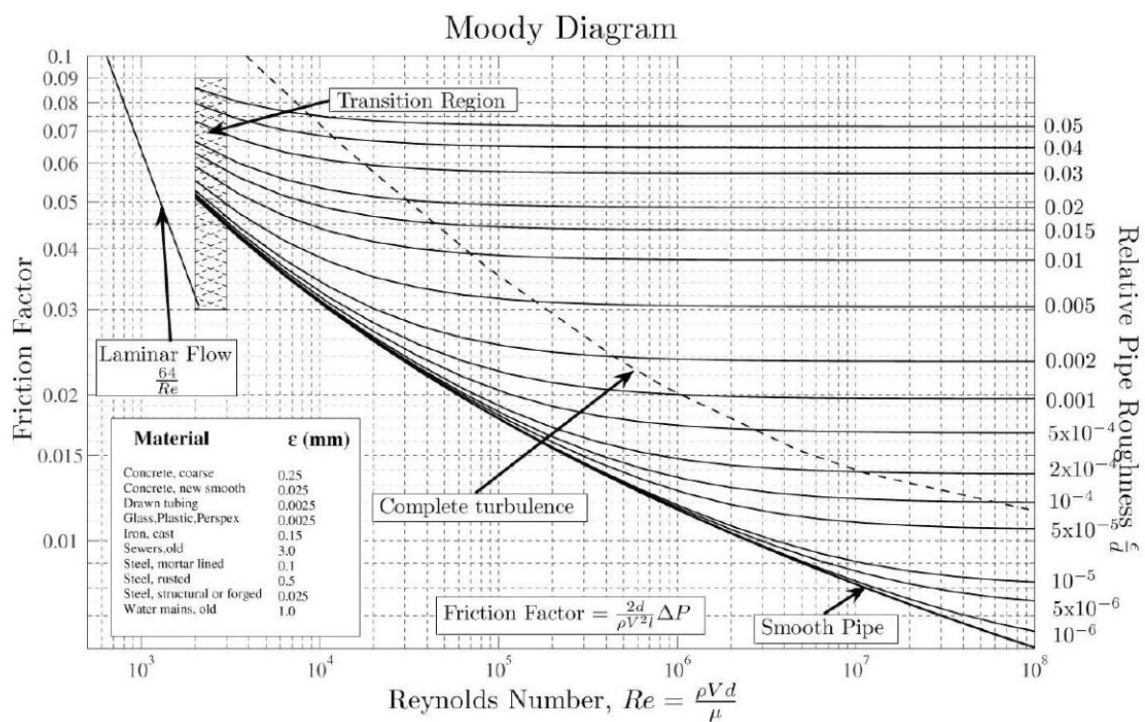


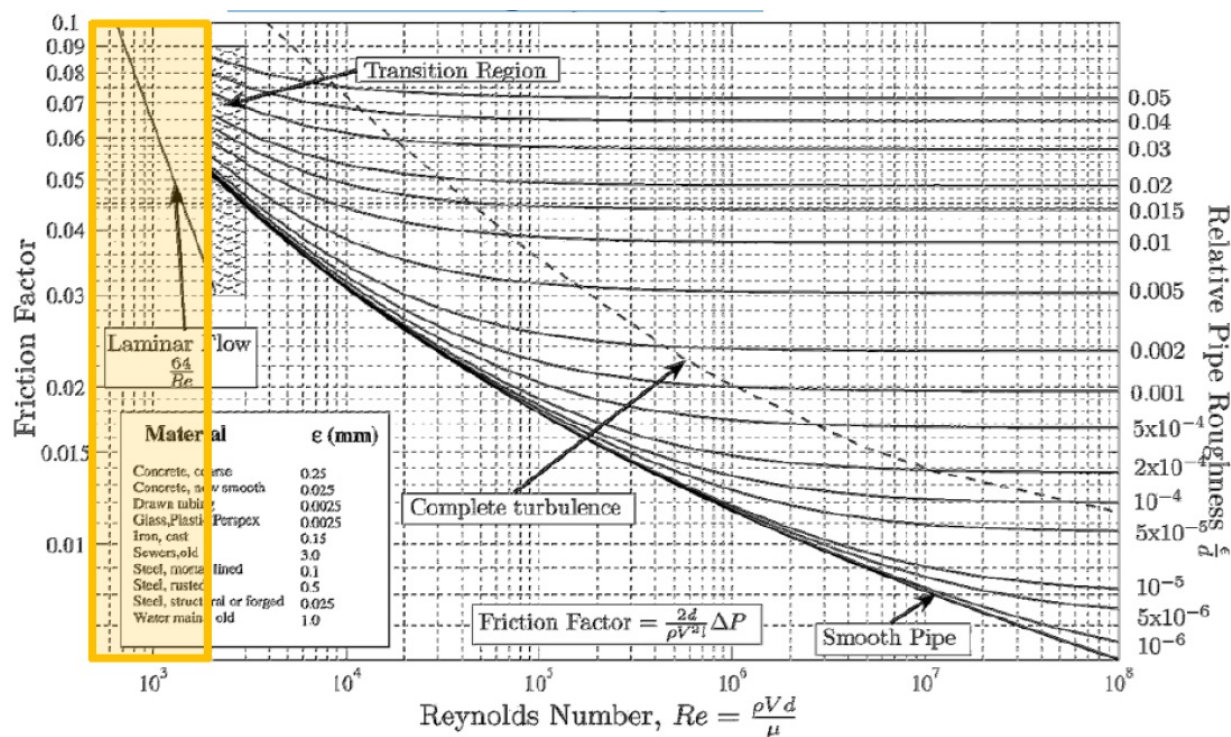
FIGURE 5.4 – Diagramme de Moody[5]

### 5.7.2 Diagramme de Moody

Présentation et lecture du diagramme :

Utilisation en régime laminaire :

Le coefficient se lit directement à partir de la droite  $64/Re$ , ( voir figure ci-dessous).



Le coefficient se lit directement à partir de la droite  $64/Re$

FIGURE 5.5 – Régime laminaire

### Utilisation en régime turbulent :

Le coefficient se lit directement à partir de la zone délimitée par les deux profils en rouge, ( voir figure ci-dessous).

On calcule la rugosité relative  $\epsilon$  et on sélectionne la courbe correspondante 0.02 ou  $5 \cdot 10^{-4}$  (ici, dans la figure ci-après). On détermine le nombre de Reynolds et on lit à l'intersection de la courbe et de la verticale

- On voit qu'au-delà de la courbe « Complète turbulence », le coefficient ne dépend plus que de la rugosité et est indépendant du nombre de Reynolds.
- La ligne « Smooth Pipe » correspond à la limite du diagramme en régime turbulent : les conduites ne sont plus rugueuses sur cette ligne.

On peut se demander quelle zone du diagramme est intéressante pour les écoulements habituels dans les conduites horizontales : Si on fixe  $Re$  à 2000 (valeur critique laminaire – turbulent), on peut calculer les vitesses critiques  $v^*$ , au-delà desquelles le régime est turbulent :

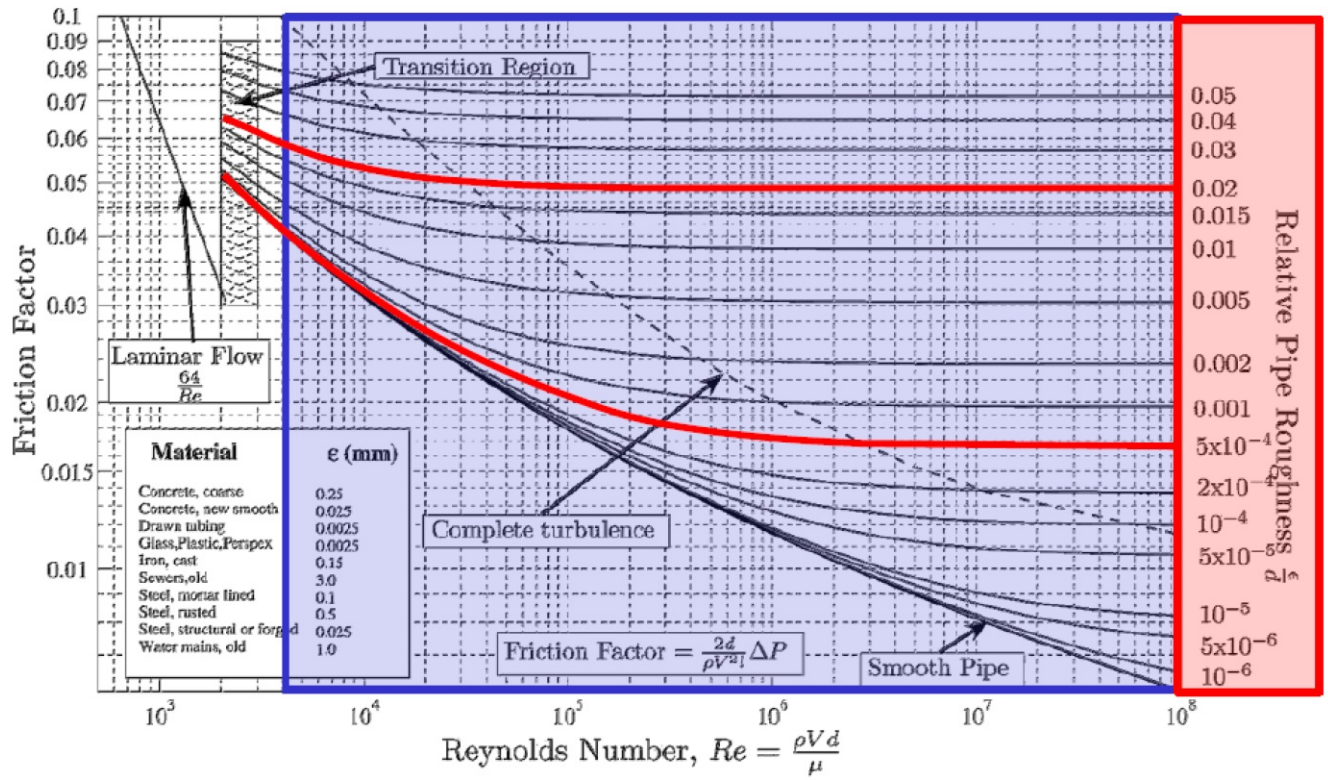


FIGURE 5.6 – Régime turbulent - a

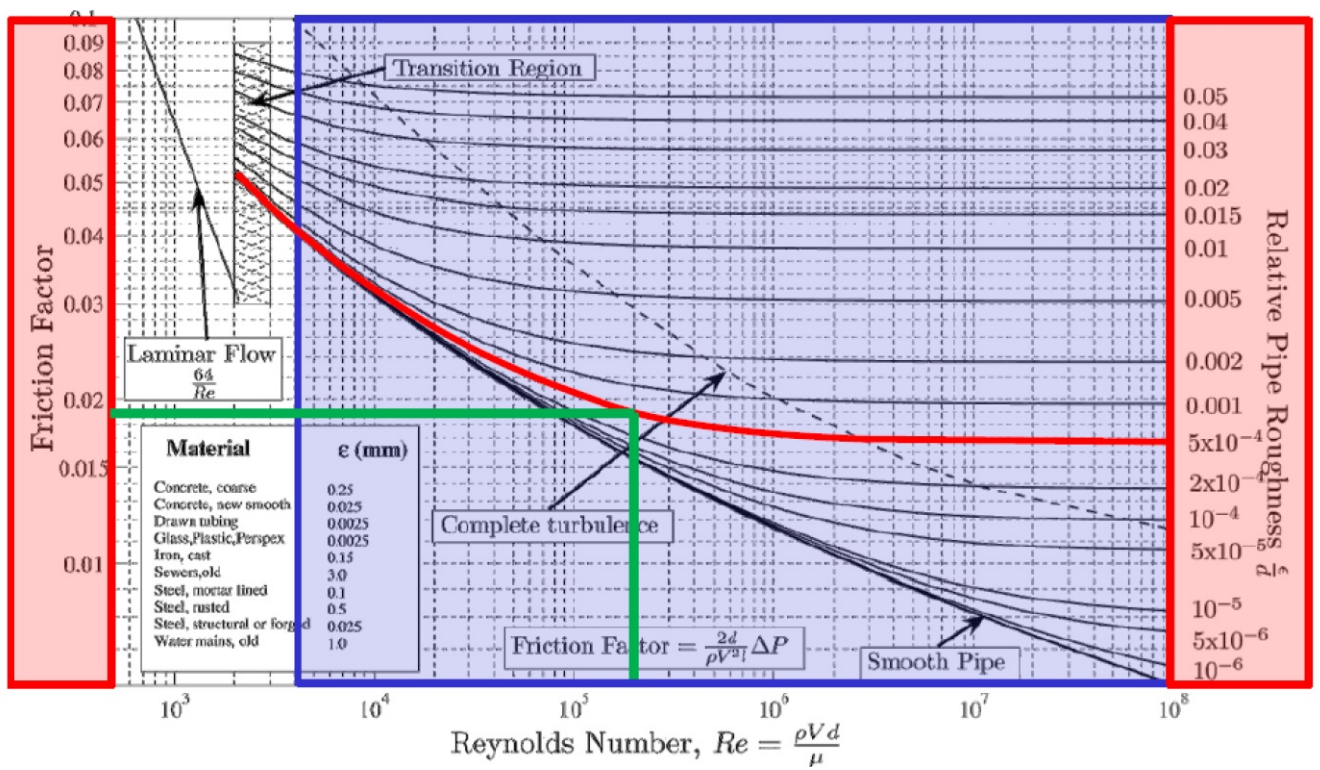


FIGURE 5.7 – régime turbulent - b

$$V > v^* = 2000 \cdot \nu / D$$

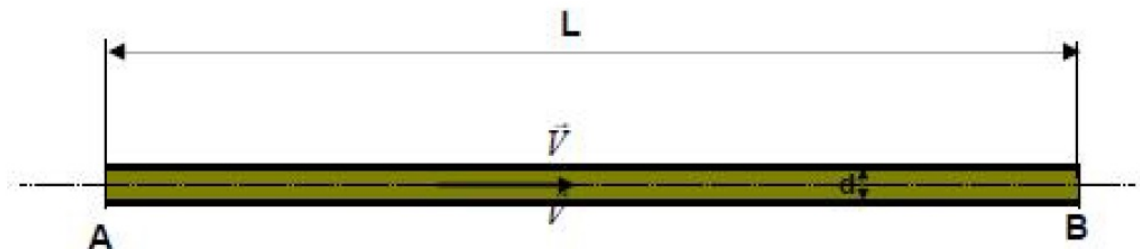
où :  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

<i>vitesse critiques de l'eau [m/s]</i>				
<i>t</i>	<i>v</i>	1/2"	1"	2"
[°C]	[m²/s]	16,4 mm	27,4 mm	53,2 mm
10°C	$1,30 \cdot 10^{-6}$	0,16	0,09	0,05
50°C	$0,54 \cdot 10^{-6}$	0,07	0,04	0,02
80°C	$0,39 \cdot 10^{-6}$	0,05	0,03	0,01

On voit bien que les vitesses critiques sont très inférieures aux vitesses usuellement rencontrées donc les régimes seront toujours turbulents.

### Exercice d'application :

Un pipe-line de diamètre  $d = 25\text{cm}$  est de longueur  $L$  est destiné à acheminer du pétrole brut d'une station A vers une station B avec un débit massique  $q_m = 18\text{kg/s}$ .



Les caractéristiques physiques du pétrole sont les suivantes :

- masse volumique  $\rho = 900\text{kg/m}^3$ ,
- viscosité dynamique  $\mu = 0,261\text{Pa.s}$ .

On suppose que le pipe-line est horizontal.

- 1) Calculer le débit volumique  $q_v$  du pétrole.
- 2) Déterminer sa vitesse d'écoulement  $\vec{V}$ .
- 3) Calculer le nombre de Reynolds  $Re$ .
- 4) Quelle est la nature de l'écoulement ?

5) Calculer la valeur du coefficient des pertes de charge linéaire.

6) Exprimer la relation de Bernoulli entre A et B.

Préciser les conditions d'application et simplifier.

7) Déterminer la longueur L maximale entre deux stations A et B à partir de laquelle la chute de pression ( $\Delta P = P_A - P_B$ ) dépasse 3 bar.

**Réponse :**

$$1) \text{ Débit volumique : } q_v = \frac{q_m}{\rho}, \text{ A.N.: } q_v = \frac{18}{900} = 0,02 m^3/s$$

$$2) \text{ Vitesse d'écoulement : } V = \frac{4q_v}{\pi \cdot d^2}, \text{ A.N.: } V = \frac{4 \cdot 0,02}{\pi \cdot (0,25)^2} = 0,407 \text{ m/s}$$

$$3) \text{ Nombre de Reynolds : } R = \frac{V \cdot d}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)}, \text{ A.N.: } R = \frac{0,407 \cdot 0,25}{\left(\frac{0,269}{900}\right)} = 350,862$$

4)  $Re < 2000$  : il s'agit d'un écoulement laminaire.

$$5) \text{ Coefficient de perte de charge linéaire : } \lambda = \frac{64}{Re}, \text{ A.N.: } \lambda = \frac{64}{350,862} = 0,1824$$

$$6) \text{ Equation de Bernoulli : } \frac{1}{2}(V_B^2 - V_A^2) + g(Z_B - Z_A) + \frac{1}{\rho}(P_B - P_A) = J_L$$

Conditions d'application :  $V_B = V_A$ ,  $Z_B = Z_A$

$$\text{Equation de Bernoulli simplifiée : } \frac{1}{\rho}(P_B - P_A) = J_L$$

$$7) \text{ Calcul de la longueur de la conduite : } \frac{1}{\rho}(P_B - P_A) = J_L \text{ avec : } J_L = -\lambda \frac{V^2}{2} \left(\frac{L}{d}\right)$$

$$\text{Donc: } L = \frac{2d \cdot (P_B - P_A)}{\lambda \cdot \rho \cdot V^2},$$

$$\text{A.N.: } L = \frac{2 \cdot 0,25 \cdot 3 \cdot 10^5}{0,1824 \cdot 900 \cdot (0,407)^2} = 5516,137 m$$