Université BATNA 2 – Faculté de Technologie
Département de génie mécanique
**Corrigé type** (MDF Approfondie)

le : 09/02/2022, durée : 01h:30 **Master 1 – Energies renouvelables en Mécanique** 2021/2022

**Questions de cours : [04 points]**

1. Le nom de l'équation est : Equation de EULER. [02 points]

$$\underbrace{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}}_{\substack{terme\\temporaire}} + \underbrace{(\vec{U}.\vec{\nabla})\vec{U}}_{\substack{terme\\convectif}} = \underbrace{\vec{g}}_{\substack{terme\ force\\de\ volumique}} - \underbrace{\overrightarrow{grad}P}_{\substack{terme\ force\\de\ pression}}$$ [0.5+0.5+0.5+0.5 points]

## Exercice 1 : [06 points]

Soit un écoulement plan dont le potentiel des vitesses est :

$$\varphi(x,y) = x^2 - 2y - y^2 \ avec : \vec{V} = \overrightarrow{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi$$

- Présenter les composantes du champ de vitesses :

$$\vec{V}(x,y) = \begin{cases} V_x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ V_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial(x^2 - 2y - y^2)}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial(x^2 - 2y - y^2)}{\partial y} = -2 - 2y \end{cases}$$ [02 points]

- Démontrer que l'écoulement est incompressible (vérifiant l'équation de continuité) ?

$$\nabla V \overset{?}{=} 0 \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial(-2-2y)}{\partial y}$$ [02 points]

$$\Rightarrow \nabla V = 2 - 2 = 0\ (divegence\ nulle)$$

Donc, l'écoulement est incompressible.

## Exercice 2 : [10 points]

1) Appliquant l'équation de Bernoulli entre les deux points (1 et 2) :

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 = C^{ste}$$ [01 point]

Par conservation de matière (débit constant) et section constante :

$$q_1 = q_2 \Rightarrow S_1U_1 = S_2U_2 = C^{ste} \Rightarrow U_1 = U_2$$ [01 point]

Alors l'équation de Bernoulli devient : $P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 \Rightarrow P_2 = P_1 + \rho g(z_1 - z_2)$ [0.5 point]

D'ou: $P_2 = 0,1\times 10^6 + 800 \times 10 \times (10) = 180000\,Pa$ [0.5 point]

2) La puissance fournie par la pompe dans le cas inverse :

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 + \frac{\mathrm{P}_{net}}{q_v}$$ [01 point]

Pour garder la même différence de pression : $\Delta P_{1-2} = P_2 - P_1 = 180000 - 100000 = 80000\,Pa$

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{\mathrm{P}_{net}}{q_v} (car : U_1 = U_2)$$ [0.5 point]

$$\frac{\mathrm{P}_{net}}{q_v} = P_1 - P_2 + \rho g(z_1 - z_2) = -\Delta P + \rho g(-h)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{P}_{net}}{q_v} = -80000 - 800 \times 10 \times 10 = -160000 Pa$$ [0.5 point]

$$\Rightarrow \mathrm{P}_{net} = q_v\left[-\Delta P + \rho g(-h)\right] = U.S.\left[-\Delta P + \rho g(-h)\right]$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_{net} = U \times \frac{\pi d^2}{4} \times \left[-\Delta P + \rho g(-h)\right]$$

[01 point]

$$\Rightarrow \mathrm{P}_{net} == 1 \times \frac{3{,}14 \times 0{,}04}{4} \times (-160000) = 5024 W$$

La puissance nécessaire est : $\frac{\mathrm{P}_{net}}{\mathrm{P}_a} = \eta \Rightarrow \mathrm{P}_a = \frac{\mathrm{P}_{net}}{\eta} = \frac{5{,}024}{0{,}8} = 6280 W$ [01 point]

**Exercice 3 : [10 points]**

1) L'expression de la vitesse $V_B$ :

Appliquant Bernoulli entre M et B :

$$P_M + \rho g z_M + \frac{1}{2}\rho U_M^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2 = C^{ste}$$ [01 point]

On a : $V_M << V_B$ et $P_M = P_B = P_{atm}$ [01 point]

Alors, $\rho g z_M = \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\rho U_B^2 = \rho g(z_M - z_B) = \rho g(h + L\cos 45)$ [0.5 point]

$$\Rightarrow U_B^2 = 2g(h + L\cos 45) = 2 \times 10 \times (5 + \frac{3}{\sqrt{2}})$$ [0.5 point]

$$\Rightarrow U_B = \sqrt{2g(h + L\cos 45)} = 11.93 m/s$$

2) Le débit volumique et massique :

$$q_v = U \times S = U_B \times \frac{\pi d^2}{4}$$

[01 point]

$$\Rightarrow q_v = 11.93 \times \frac{3{,}14 \times 0{,}04 \times 10^{-3}}{4} = 0{,}37 l/s$$

Le débit massique : $q_m = \rho \times q_v = 950 \times 0{,}37 \times 10^{-3} = 0{,}35 kg/s$ [01 point]

3) Calculer la pression au milieu de la conduite $P_C$ :

$$P_C + \rho g z_C + \frac{1}{2}\rho U_C^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2$$ [01 point]

On a : $U_C = U_B$ (même débit et même section)

$$P_C + \rho g z_C = P_B + \rho g z_B \Rightarrow P_C = P_B + \rho g(z_B - z_C)$$

Alors, $\Rightarrow P_C = P_B + \rho g(h + L\cos 45 - h + \frac{L}{2}\cos 45)$

$$\Rightarrow P_C = P_{atm} + \rho g(\frac{L}{2}\cos 45) = 10^5 + 950 \times 10 \times \frac{3}{2\sqrt{2}} = 110076 Pa$$ [01 point]