Chapitre 2 : Systèmes d'équations algébriques

Enseignant : Dr. Noui Abdelkader

Institut des Séances de la terre et de L'univers, Université Batna 2
Batna 05078, Algérie

1. Introduction

Les systèmes d'équations algébriques jouent un rôle très important en ingénierie. On peut classer ces systèmes en deux grandes familles : les systèmes *linéaires* et les systèmes *non linéaires*.

Ici encore, les progrès de l'informatique et de l'analyse numérique permettent d'aborder des problèmes de taille prodigieuse. On résout couramment aujourd'hui des systèmes de plusieurs centaines de milliers d'inconnues. On rencontre ces applications en mécanique des sols ou fluides et dans l'analyse de structures complexes.

Ces calculs complexes requièrent des méthodes évoluées comme les méthodes d'éléments finis. On obtient généralement des systèmes d'équations non linéaires de taille considérable, qu'on doit résoudre à l'aide de méthodes efficaces qui minimisent le temps de calcul et l'espace-mémoire requis.

Dans ce chapitre, nous allons aborder la principale méthode de résolution des systèmes linéaires, à savoir la méthode d'*élimination de Gauss*.

2. Systèmes linéaires

De façon générale, la résolution d'un système d'équations linéaires consiste à trouver un vecteur $\vec{x} = [x_1 \; x_2 \; x_3 \cdots x_n]^T$ solution de :

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned} \tag{1}$$

On peut utiliser la notation matricielle, qui est beaucoup plus pratique et surtout plus compacte. On écrit alors le système précédent sous la forme :

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{2}$$

Où A est la matrice (Eq. 3) et où $\vec{b} = [b_1 \; b_2 \; b_3 \cdots b_n]^T$ est le *membre de droite*. Bien entendu, la matrice A et le vecteur $\vec{b}$ sont connus. Il reste à déterminer le vecteur $\vec{x}$.

Le problème 3.1 (Eq. 1) (ou 3.2 (Eq. 2)) est un système de n équations et n inconnues. En pratique, la valeur de n varie considérablement et peut s'élever jusqu'à plusieurs centaines de milliers.

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\
. & . & . & \dots & . \\
. & . & . & \dots & . \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}
\end{bmatrix} \tag{3}$$

2.1 Matrice inversible

Dans la plupart des cas, nous traitons des *matrices non singulières* ou *inversibles*, c'est-à-dire dont la matrice inverse existe. Nous ne faisons pas non plus de révision systématique de l'algèbre linéaire élémentaire que nous supposons connue. Ainsi, la solution de l'équation 2 peut s'écrire :

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \tag{4}$$

et la discussion peut sembler close. Nous verrons cependant que le calcul de la matrice inverse A^{-1} est plus difficile et plus long que la résolution du système linéaire de départ.

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}$$

Pour le résoudre, on peut utiliser la méthode classique qui consiste à éliminer les équations une à une par *substitution successive*. Dans un premier temps, on isole x_1 de la première équation :

$$x_1 = \frac{8 - 3x_2}{2}$$

que l'on substitue dans la deuxième équation :

$$3\left(\frac{8 - 3x_2}{2}\right) + 4x_2 = 11$$

Ou encore :

$$12 - \frac{9x_2}{2} + 4x_2 = 12 - 0.5x_2 = 11$$

On déduit alors facilement que $x_2 = 2$ et par la suite que

$x_1 = 1$.

Il est théoriquement possible d'étendre la substitution successive à des systèmes de grande taille. Il est cependant difficile de transcrire cette façon de faire sous forme d'algorithme (qui peut par la suite être programmé dans un langage informatique quelconque). Il est donc préférable de recourir à d'autres méthodes pour simplifier le système d'équations.

On peut d'abord se demander quels types de systèmes linéaires sont faciles à résoudre, et ce, même s'ils sont de grande taille. Le cas le plus simple est sans doute celui des *systèmes diagonaux*, c'est-à-dire dont la matrice A n'a de coefficients non nuls que sur la diagonale.

Par exemple, on a le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

est très facile à résoudre. Il suffit de considérer séparément chaque ligne. On obtient ainsi $\vec{x} = [\,2\ 1\ 3\,]^T$. On voit tout de suite comment résoudre le cas général :

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad \text{pour i = 1, 2, …, n}$$

On remarque de plus que le système a une solution unique seulement si tous les termes diagonaux sont non nuls. Hélas, on rencontre rarement des systèmes diagonaux en pratique et il faudra travailler un peu plus pour s'attaquer aux applications.

2.2 Matrice triangulaire inférieure (ou supérieure)

Une matrice est dite *triangulaire inférieure* (ou *supérieure*) si tous les a_{ij} (ou tous les a_{ji}) sont nuls pour $i < j$. Une matrice triangulaire inférieure a la forme type :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & . & \ldots & . \\ a_{n-11} & a_{n-12} & a_{n-13} & \ldots & a_{n-1n} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Une matrice triangulaire supérieure est tout simplement la transposée d'une matrice triangulaire inférieure.

Les systèmes triangulaires sont également faciles à résoudre. Il suffit en effet de commencer par l'équation qui se trouve à la pointe du triangle (la première pour une matrice triangulaire inférieure et la dernière pour une matrice triangulaire supérieure) et de résoudre une à une les équations. On parle de *descente triangulaire* ou de *remontée triangulaire*, selon le cas.

Par exemple, La descente triangulaire du système :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

consiste à résoudre la première équation :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{9}{3} = 3$$

Puisque x_1 est maintenant connue, on peut déterminer x_2 :

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}} = \frac{7-(1)(3)}{2} = 2$$

La dernière équation s'écrit :

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} = \frac{14-(3)(3)-(2)(2)}{1} = 1$$

De l'exemple précédent, on peut rapidement déduire le cas général pour la descente triangulaire :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \dfrac{\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k\right)}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n \end{cases} \tag{5}$$

Pour la remontée triangulaire, on a :

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \dfrac{\left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik} x_k\right)}{a_{ii}} \quad i = n-1, n-2, n-3, \ldots, 2, 1 \end{cases} \tag{6}$$

Les équations 5 et 6 sont valides si les a_{ii} sont tous non nuls. Dans le cas contraire, la matrice A n'est pas inversible et, donc, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ n'a pas une solution unique. On se souvient en effet que le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure (ou supérieure) est :

$$dét \quad A_{triangulaire} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{7}$$

En d'autres mots, le déterminant est le produit des termes de la diagonale de A. Le produit est donc non nul seulement si aucun des a_{ii} n'est nul.

2.3 Méthode directe

Les matrices triangulaires sont primordiales pour la résolution des systèmes linéaires. Dans les sections qui suivent, nous voyons comment ramener un système linéaire quelconque à un ou plusieurs systèmes triangulaires. Nous abordons essentiellement deux méthodes dites *directes* au sens de la définition suivante.

Une méthode de résolution d'un système linéaire est dite *directe* si la solution du système peut être obtenue par cette méthode en un nombre fini et prédéterminé d'opérations. Autrement dit, les méthodes directes permettent d'obtenir le résultat après un nombre connu de multiplications, divisions, additions et soustractions. On peut alors en déduire le temps de calcul nécessaire à la résolution (qui peut être très long si n est grand).

Les méthodes directes s'opposent sur ce point aux méthodes dites *itératives*, qui peuvent converger en quelques itérations, converger en un très grand nombre d'itérations ou même diverger, selon le cas.

Les deux principales méthodes directes sont la *méthode d'élimination de Gauss* et la *décomposition LU.* Il s'agit en fait d'une seule et même méthode puisque la méthode *d'élimination de Gauss* est un cas particulier de décomposition *LU.* La stratégie de résolution est basée sur la question suivante : *quelles opérations sont permises sur les lignes de l'équation 1 pour le ramener à un système triangulaire ?* Ou encore : pour ramener un système linéaire quelconque à un système triangulaire, quels sont les coups permis, c'est-à-dire *ceux qui ne changent pas la solution du système de départ ?* C'est à ces questions que nous répondons dans la section suivante.

3. Opérations élémentaires sur les lignes

Revenons au système :

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{8}$$

et voyons comment on peut le transformer sans en modifier la solution. La réponse est toute simple. On peut toujours multiplier (à gauche de chaque côté) les termes de cette relation par une matrice *W inversible* ; la solution n'est pas modifiée puisque l'on peut remultiplier par W^{-1} pour revenir au système de départ. Ainsi :

$$WA\vec{x} = W\vec{b} \tag{9}$$

possède la même solution que l'équation 8.

Ce résultat n'est plus vrai si la matrice W n'est pas inversible. On ne peut plus en effet revenir en arrière si la matrice W^{-1} n'existe pas.

Par exemple, Nous avons vu que la solution du système :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix}$$

est $\vec{x} = [\,3\ 2\ 1\,]^T$. Si l'on multiplie ce système par la matrice inversible (Eq. 10), on obtient le nouveau système (Eq. 11), dont la solution est toujours $\vec{x} = [\,3\ 2\ 1\,]^T$.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Par contre, si l'on multiplie le système de départ par la matrice non inversible :

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

on obtient le système singulier, qui possède une infinité de solutions, la dernière équation étant redondante.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 23 \\ 23 \end{bmatrix}$$

Pour transformer un système quelconque en système triangulaire, il suffit d'utiliser trois opérations élémentaires sur les lignes de la matrice. Ces trois opérations élémentaires correspondent à trois types différents de matrices W. C'est la base de la *méthode d'élimination de Gauss*.

On note, $\vec{l_i}$ la ligne i de la matrice A. Cette notation est quelque peu ambiguë, car on se trouve de ce fait à placer une ligne de la matrice A dans un vecteur colonne. Cela n'empêche cependant pas la compréhension de la suite.

Les trois opérations élémentaires dont on a besoin sont les suivantes :

- opération $(\vec{l_i} \leftarrow \lambda\vec{l_i})$: remplacer la ligne i par un multiple d'elle-même ;
- opération $(\vec{l_i} \leftrightarrow \vec{l_j})$: intervertir la ligne i et la ligne j ;
- opération $(\vec{l_i} \leftarrow \vec{l_i} + \lambda\vec{l_j})$: remplacer la ligne i par la ligne i plus un multiple de la ligne j.

Ces trois opérations élémentaires sont permises, car elles équivalent à multiplier l'équation 8 par une matrice inversible.

3.1 Multiplication d'une ligne par un scalaire

Remplacer la ligne i par un multiple d'elle-même $(\vec{l_i} \leftarrow \lambda\vec{l_i})$ revient à multiplier le système linéaire 3.6 par une matrice diagonale inversible $W = M(\vec{l_i} \leftarrow \lambda\vec{l_i})$, dont tous les éléments diagonaux sont 1, sauf m_{ii}, qui vaut λ. Tous les autres termes sont nuls. Cette matrice a pour effet de multiplier la ligne i par le scalaire λ.

Le déterminant de la matrice diagonale $M(\vec{l_i} \leftarrow \lambda\vec{l_i})$ est λ. La matrice est donc inversible si $\lambda \neq 0$.

La matrice inverse de $M(l_i \leftarrow \lambda l_i)$ est simplement $M(l_i \leftarrow \lambda^{-1} l_i)$, c'est-à-dire :

$$M^{-1}(\vec{l_i} \leftarrow \lambda\vec{l_i}) = M(\vec{l_i} \leftarrow (1/\lambda)\vec{l_i}) \tag{12}$$

Il suffit donc de remplacer λ par $1/\lambda$ pour inverser la matrice.

Par exemple, Soit le système :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad (13)$$

dont la solution est $\vec{x} = [\,1\ 1\ 1\,]^T$. Si l'on souhaite multiplier la ligne 2 par un facteur 3, cela revient à multiplier le système par la matrice :

$$M\,(\vec{l_2} \leftarrow 3\vec{l_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et l'on obtient :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 18 & 12 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 33 \\ 10 \end{bmatrix}$$

La solution de ce nouveau système reste la même que celle du système de départ puisque la matrice M ($\vec{l_2} \leftarrow 3\,\vec{l_2}$) est inversible (et son déterminant est 3).

3.2 Permutation de deux lignes

L'opération élémentaire qui consiste à intervertir deux lignes ($\vec{l_i} \leftrightarrow \vec{l_j}$) est également connue sous le nom de *permutation de lignes*. Cette opération est équivalente à la multiplication du système 3.1 par une matrice inversible $W = P$ ($\vec{l_i} \leftrightarrow \vec{l_j}$), obtenue en permutant les lignes i et j de la matrice identité.

Par exemple, On veut intervertir la ligne 2 et la ligne 3 du système de l'exemple précédent. Il suffit de le multiplier par la matrice :

$$P(\vec{l_2} \leftarrow \vec{l_3}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et l'on obtient :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

La matrice P ($\vec{l_i} \leftrightarrow \vec{l_j}$) est inversible. Pour obtenir son inverse, il suffit de réfléchir une seconde. En effet, quelle est l'opération inverse de celle qui inverse deux lignes, sinon l'inversion des deux mêmes lignes ?

L'inverse de la matrice P ($\vec{l_i} \leftrightarrow \vec{l_j}$) est donc la matrice P ($\vec{l_i} \leftrightarrow \vec{l_j}$) elle-même, c'est-à-dire :

$$P^{-1}(\vec{l_i} \leftrightarrow \vec{l_j}) = P(\vec{l_i} \leftrightarrow \vec{l_j}) \qquad (14)$$

On montre assez facilement que le déterminant de P ($\vec{l_i} \leftrightarrow \vec{l_j}$) est -1. *Lorsque l'on permute deux lignes, le déterminant du système de départ change de signe*.

3.3 Opération ($\vec{l_i} \leftarrow \vec{l_i} + \lambda\,\vec{l_i}$)

La dernière opération élémentaire consiste à remplacer la ligne i par la ligne i plus un multiple de la ligne j ($\vec{l_i} \leftarrow \vec{l_i} + \lambda\ \vec{l_j}$). Cela est encore une fois équivalent à multiplier le système de départ par une matrice inversible $W = T$ ($\vec{l_i} \leftarrow \vec{l_i} + \lambda\ \vec{l_i}$) qui vaut 1 sur toute la diagonale et 0 partout ailleurs, sauf t_{ij}, qui vaut λ.

Par exemple, Dans le système (13), on souhaite remplacer la deuxième ligne par la deuxième ligne ($i = 2$) moins deux fois ($\lambda = -2$) la première ligne ($j = 1$). Il suffit alors de multiplier le système par :

$$T\,(\vec{l_2} \leftarrow l_2 - 2\vec{l_2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

La matrice T($\vec{l_i} \leftarrow \vec{l_i} + \lambda\ \vec{l_j}$) est inversible. Pour obtenir son inverse, il suffit de remplacer λ par $-\lambda$, c'est-à-dire :

$$T^{-1}(\vec{l_i} \leftarrow \vec{l_i} + \lambda\vec{l_j}) = T\,(\vec{l_i} \leftarrow \vec{l_i} - \lambda\vec{l_j}) \qquad (15)$$

Cela signifie que pour revenir en arrière il suffit de soustraire la ligne que l'on vient d'ajouter. On peut montrer facilement que le déterminant de T($\vec{l_i} \leftarrow \vec{l_i} + \lambda\vec{l_j}$) est 1.

Des trois opérations élémentaires, seule l'opération ($\vec{l_i} \leftarrow \vec{l_i} + \lambda\ \vec{l_j}$) n'a pas d'effet sur le déterminant. La permutation de deux lignes en change le signe, tandis que la multiplication d'une ligne par un scalaire multiplie le déterminant par ce même scalaire.

4. Élimination de Gauss

Tous les outils sont en place pour la résolution d'un système linéaire. Il suffit maintenant d'utiliser systématiquement les opérations élémentaires pour introduire des zéros sous la diagonale de la matrice A et obtenir ainsi un système triangulaire supérieur.

La validité de la méthode d'*élimination de Gauss* repose sur le fait que les opérations élémentaires consistent à multiplier le système de départ par une matrice inversible.

La méthode d'*élimination de Gauss* consiste à éliminer tous les termes sous la diagonale de la matrice A. Avant de considérer un exemple, introduisons la *matrice augmentée*.

La *matrice augmentée* du système linéaire (Eq. 1) est la matrice de dimension n sur $n+1$ que l'on obtient en ajoutant le membre de droite $\vec{b}$ à la matrice A, c'est-à-dire :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \qquad (16)$$

Puisque les opérations élémentaires doivent être effectuées à la fois sur les lignes de la matrice A et sur celles du vecteur $\vec{b}$, cette notation est très utile.

Considérons l'exemple suivant :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} [2] & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{array}\right] \begin{cases} T_1(\vec{l_2} \leftarrow \vec{l_2} - (6/\boxed{2})\,\vec{l_1} \\ T_2(\vec{l_3} \leftarrow \vec{l_3} - (8/\boxed{2})\vec{l_1} \end{cases}$$

On a indiqué ci-dessus la matrice augmentée de même que les opérations élémentaires (et les matrices associées) qui sont nécessaires pour éliminer les termes non nuls sous la diagonale de la première colonne. Il est à noter que l'on divise par 2 (a_{11}) les coefficients qui multiplient la ligne 1. On dit alors que 2 est le *pivot*. On obtient, en effectuant les opérations indiquées :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & [1] & -6 & -4 \\ 0 & 1 & -7 & -5 \end{array}\right] \left\{ T_3(\vec{l_3} \leftarrow \vec{l_3} - (1/\boxed{1})\vec{l_2} \right.$$

Pour produire une matrice triangulaire supérieure, il suffit maintenant d'introduire des 0 sous la diagonale de la deuxième colonne. L'opération est indiquée ci-dessus et le pivot est 1 puisque maintenant $a_{22} = 1$. On obtient donc :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \qquad (17)$$

Il reste ensuite à faire la remontée triangulaire de l'équations 6 On obtient :

$$x_3 = \frac{-1}{-1} = 1$$

d'où :

$$x_2 = \frac{-4-(-6)(1)}{1} = 2$$

et enfin :

$$x_1 = \frac{10-(1)(2)-(2)(1)}{2} = 3$$

On a construit le système triangulaire (17) en effectuant des opérations élémentaires directement sur les lignes de la matrice. La matrice triangulaire obtenue est notée U. Les opérations effectuées pour obtenir U sont équivalentes à multiplier le système de départ par une suite de matrices inversibles. On a en fait :

$$U = T_3 T_2 T_1 A$$

où les matrices T_i correspondent aux différentes opérations effectuées sur les lignes de la matrice. Plus explicitement, on a :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Si l'on poursuit le raisonnement, on a également :

$$A = T_3^{-1} T_2^{-1} T_1^{-1} U$$

Puisque l'on sait inverser les matrices T_i, on a immédiatement que :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

On remarque que les coefficients de la matrice triangulaire inférieure sont ceux qui ont permis d'éliminer les termes non nuls sous la diagonale de la matrice A. Tout cela revient à décomposer la matrice A en un produit d'une matrice triangulaire inférieure, notée L, et d'une matrice triangulaire supérieure U. C'est ce que l'on appelle une *décomposition LU.*

La méthode d'*élimination de Gauss* revient à factoriser la matrice A en un produit de deux matrices triangulaires L et U *seulement dans le cas où aucune permutation de lignes n'est effectuée*.

Le déterminant de la matrice de départ est le même que celui de la matrice triangulaire 17 puisqu'on n'a effectué que des opérations de la forme ($\vec{l_i} \leftarrow \vec{l_i} + \lambda\ \vec{l_i}$), ce qui revient à multiplier le système de départ par une matrice dont le déterminant est 1. On a donc :

$$dét \quad A = (2)(1)(-1) = -2$$

soit le produit des termes diagonaux de la matrice 17 Pour être plus précis :

$$dét \quad A = dét \quad T_1^{-1} dét \quad T_2^{-1} dét \quad T_3^{-1} dét \quad U = (1)(1)(1) \left[(2)(1)(-1)\right]$$

puisque le déterminant des trois matrices T_i est 1.