

Université : Batna 2

Faculté de Technologie

Département Socle Commun en Sciences et Technologies

# COURS

# MECANIQUE DES FLUIDES

Deuxième année (S3) socle commun en sciences et technologies

**Mr** Salhi Hicham

Maître de Conférences classe B

<b>Introduction générale</b>	1
<b>Chapitre I: Propriétés des fluides</b>	
I. 1 Définition d'un Fluide	2
I.2 Forces de volume et forces de surface	2
I.3 Fluide parfait	3
I.4 Fluide réel	3
I.5 Contrainte en un point	4
I.6 Propriétés physiques du fluide	4
I.6.1 Masse volumique	4
I.6.2 Densité	5
I.6.3 Poids volumique	6
I.6.4 Viscosité	6
<b>Chapitre II: Statique des fluides</b>	
II.1 Définition	9
II.2 Pression en point d'un fluide	10
II.3 Equation fondamentale de la statique des fluides	10
II.4 Surface de niveau	12
II.5 Cas d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur : Hydrostatique	13
II.6 Cas d'un fluide non miscible	15
II.7 Théorème de pascal	16
II.8 Force de poussée d'Archimède	17
II.9 Calcul des forces de pression	19
II.9.1 Résultante des forces de pression sur une paroi plane	19
II.9.2 Centre de poussée	20

## **Chapitre III : Dynamique des fluides parfaits incompressibles**

III.1. Ecoulement permanent	24
III.2 Ecoulement permanent en moyenne (ou stationnaire)	24
III.3 Débit de masse et débit de volume	24
III.4 Equation de continuité	25
III.5 Equation de Bernoulli	27
III.6 Application du théorème de Bernoulli	28
III.6.1 Tube manométrique	28
III.6.2 Tube de Pitot	29
III.6.3 Tube de venturi	30
III.6.4. Diaphragmes	30
III.6.5 Tube de Prandtl	31
III.6.6 Etude du vidange d'un réservoir	32
III.7 Théorème d'Euler	36

## **Chapitre IV : Dynamique des fluides réels incompressibles**

IV.1 Régimes d'écoulement	38
IV.2 Analyse dimensionnelle, théorème de Vashy-Buckingham	39
IV. 3 Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel avec pertes de charges	41
IV.3.1 Coefficient de pertes de charges linéaires	42
IV.3.2 Coefficient de pertes de charges singulières	43
IV.4 Théorème de Bernoulli généralisé	43
<b>Bibliographie</b>	46

## **Introduction générale**

La mécanique des fluides est la branche de la physique qui étudie (la statique et la dynamique) des fluides lorsqu'ils subissent des forces ou des contraintes. La mécanique des fluides se compose de deux grandes sous branches:

La statique des fluides : ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.

La dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement à leur viscosité, une de leur caractéristique physico-chimique. La famille des fluides "newtoniens" et celle des fluides "non newtoniens".

Le contenu de ce document pédagogique est abordé selon une approche classique. Dans le premier chapitre, on se limite à la présentation des concepts de base qui sont largement utilisés dans l'étude des écoulements des fluides. On a traité dans le deuxième chapitre les équations générales de la statique des fluides, théorème de Pascal, la poussée d'Archimède. Pour le troisième chapitre, nous nous limiterons aux mouvements des fluides parfaits, c'est à dire sans frottement (fluides non visqueux). On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier l'équation de continuité (conservation de la masse), le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement).

Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie) avec pertes de charges linéaire et singulier est le contenu principal du quatrième chapitre.

## Chapitre I : Propriétés des fluides

### I.1 Définition d'un Fluide

Le fluide est un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité, qui peut se déformer sous l'action d'une force très faible. Un fluide représente les états gazeux et liquide de la matière. De cette définition, on peut tirer les caractéristiques suivantes d'un fluide :

- Un fluide n'a pas de forme propre, donc il se déforme facilement ; Les molécules d'un fluide sont peu liées entre elles (le cas du liquide) voir même libres et sans interaction mutuelle (le cas du gaz).
- Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement par leur viscosité.
- La viscosité est une de leur caractéristique physico-chimique qui sera définie dans la suite du cours et qui définit le frottement interne des fluides. Les fluides peuvent être classés en deux grande familles : La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...).

Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température.

La deuxième famille est constituée par les fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent.

### I.2 Forces de volume et forces de surface

Comme tout problème de mécanique, la résolution d'un problème de mécanique des fluides passe par la définition du système matériel  $S$ , particules de fluide à l'intérieur d'une surface fermée limitant  $S$  (Figure II.1).



**Figure II.1** : Ensembles des particules fluides à l'intérieur d'une surface  $S$ .

À ce système on applique les principes et théorèmes généraux de mécanique et thermodynamique :

Principe de la conservation de la masse (Principe de continuité) ;

Principe de conservation de la quantité de mouvement (principe fondamental de la dynamique) ;

Principe de la conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique).

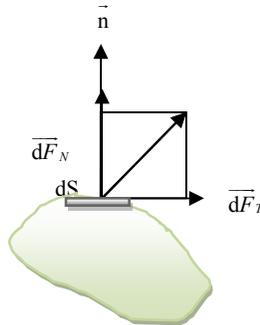
Par ailleurs, les forces qui agissent sur les particules situées à l'intérieur de  $S$  peuvent être classées en deux catégories :

**Les forces de surface :** ce sont les forces qui s'exercent uniquement sur les particules de la surface  $S$ . Elles sont proportionnelles aux éléments de surface, par exemple les forces de pression et les forces de frottement.

**Les forces de volume :** ce sont les forces qui s'exercent sur les molécules intérieures à  $S$ , elles sont proportionnelles aux éléments de volume. Exemple : force de pesanteur, force magnétique et électrique...). Les seules de ce type que nous aurons à considérer habituellement seront les forces de pesanteur.

### I.3 Fluide parfait

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante tangentielle est nulle ( $\overline{dF}_\tau = 0$ ). Autrement dit, la force d'interaction est normale à l'élément de surface  $dS$  ( $\overline{dF} = \overline{dF}_N$ ).



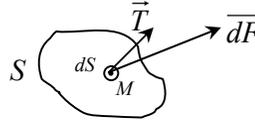
**Figure II.2 :** Schéma explicatif d'un fluide parfait ou réel.

### I.4 Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, un fluide réel est un fluide dont le mouvement s'accompagne d'une résistance dite force de viscosité, s'opposant au glissement des couches fluides les unes sur les autres. Le fluide est alors dit visqueux.

### I.5 Contrainte en un point

Considérons un élément de surface  $dS$  tracé sur  $S$  et entourant un point  $M$  de  $S$  (Figure II.3). Le système des forces de surface agissant sur  $dS$  est réductible à une force unique  $\overline{dF}$  appliquée en  $M$  et un couple  $\overline{dC}$ . On suppose que  $\overline{dF}$  est infiniment petit.



**Figure II.3 :** Contrainte en un point.

Lorsque  $dS$  tend vers zéro, autour de  $M$  fixe, le vecteur  $\frac{\overline{dF}}{dS}$  tend vers le vecteur  $\vec{T}$  qu'on appelle contrainte en  $M$  sur l'élément  $dS$ .

La force  $\overline{dF}$  est donnée donc par :

$$\overline{dF} = \vec{T} dS$$

### I.6 Propriétés physiques du fluide

#### I.6.1 Masse volumique

La masse volumique d'un fluide est la masse d'une unité de volume de ce fluide.

On la calcule par la relation :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (\text{I.1})$$

avec

$\rho$  : La masse volumique ( $\text{kg} / \text{m}^3$ ),

$m$  : La masse (kg),

$V$  : Le volume ( $\text{m}^3$ ),

#### Exemple .1 : Calcul d'une masse volumique

**Question :** Un flacon contient 200 mL d'alcool. La masse de cet alcool est de 170 g.

Quelle est la masse volumique de cet alcool ?

**Réponse :** D'après la définition :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{170}{0.200} = 875 \text{ g} / \text{L}$$

**Exemple.2 : Calcul d'une masse**

Question : L'essence a une masse volumique de  $800 \text{ kg.m}^{-3}$ . Pour remplir le réservoir, un conducteur met  $40,0 \text{ L}$  d'essence.

Quelle est la masse d'essence dans le réservoir ?

**Réponse** : Il faut convertir les unités :  $40,0 \text{ L} = 40,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

On utilise ensuite la définition de la masse volumique :

$$m = \rho \times V = 800 \times 40 \cdot 10^{-3} = 32 \text{ kg}$$

**Exemple.3: Calcul d'un volume**

**Question** : Le mercure est le liquide le plus dense Sa masse volumique est de  $13,6 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Quelle est le volume de  $1,0 \text{ kg}$  de mercure ?

**Réponse** : On utilise la définition de la masse volumique :

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{1}{13,6 \cdot 10^3} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 74 \text{ cm}^3 = 74 \text{ ml}$$

**I.6.2 Densité**

La densité est une grandeur sans unité définie par :

$$d = \frac{\text{la masse volumique du fluide}}{\text{la masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (\text{I.2})$$

Dans le cas des liquides on prendra l'eau comme fluide de référence.

Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence

**Exemple : Calcul d'une densité**

**Question** : La pesée de  $100 \text{ mL}$  d'huile donne une masse de  $72 \text{ g}$ . Quelle est la densité de l'huile ?

**Réponse** : La masse volumique est :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{72}{0.100} = 720 \text{ g/L}$$

Comme  $1,0 \text{ L}$  d'eau pèse  $1000 \text{ g}$ , on a :

$$d = \frac{\rho}{\rho_{ref}} = \frac{720}{1000} = 0,720$$

### I.6.3 Poids volumique

$$w = \frac{mg}{V} = \rho g \quad (\text{I.3})$$

#### Exemple : Calcul d'un poids volumique

**Question :** Déterminer le poids volumique de l'essence sachant que sa densité  $d=0,7$ . On donne :

- l'accélération de la pesanteur  $g=9,81 \text{ m/s}^2$
- la masse volumique de l'eau  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

**Réponse :**

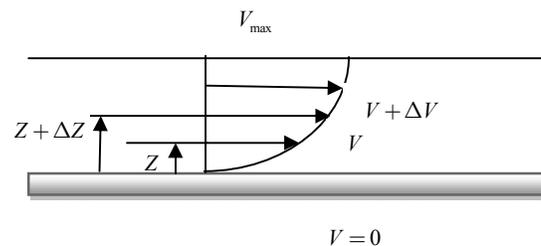
$$w = \rho g = d \rho_{\text{ref}} g = 0,7 \times 1000 \times 9,81 = 6867 \text{ N/m}^3$$

### I.6.4 Viscosité

On peut définir la viscosité d'un fluide comme étant le frottement interne entre les couches durant l'écoulement. La conséquence importante de cette propriété est l'adhérence du fluide à la surface du solide en contact avec lui. Aussi, à cause de cette propriété visqueuse des fluides, il existe des contraintes de cisaillement (force de glissement tangentielle exprimée par unité de surface).

#### Viscosité dynamique

Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et les forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse. On dit qu'il existe un profil de vitesse (Figure II.4).



**Figure II.4 :** Profil de vitesse d'une particule.

Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement d'ensemble, la courbe lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse. Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant

du glissement des couches de fluide les unes sur les autres, la vitesse de chaque couche est une fonction de la distance  $z$ .

La force de frottement  $F$  qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit  $\Delta V$ , à leur surface  $S$  et inversement proportionnelle à  $\Delta Z$  : Le facteur de proportionnalité  $\mu$  est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$F = -\mu.S.\frac{\Delta V}{\Delta Z} \quad (I.4)$$

$F$  : force de glissement entre les couches en (N).

$\mu$  : Viscosité dynamique en (kg/m.s).

$S$  : surface de contact entre deux couches en (m<sup>2</sup>).

$\Delta V$  : Écart de vitesse entre deux couches en (m/s).

$\Delta Z$  : Distance entre deux couches en (m).

### Viscosité cinématique

La viscosité cinématique c'est le rapport de la viscosité dynamique  $\mu$  et de la masse volumique  $\rho$  :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (I.5)$$

### Exemple1 : Calcul d'une viscosité dynamique

**Question** : Déterminer la viscosité dynamique de l'huile d'olive sachant que sa densité est 0,918 et sa viscosité cinématique est 1,089 Stockes.

**Réponse** :

On a :

$$\nu = 1,089st = 1,089.10^{-4} \frac{m^2}{s}$$

Et comme 1,0 L d'eau pèse 1000 g, on a :

$$d = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \Rightarrow \rho = \rho_{ref} \times d = 918kg / m^3$$

Donc

$$\mu = \nu \times \rho = 1,089.10^{-4} \times 918 \approx 0,1 \text{ kg} / \text{m.s} = 0,1 \text{ Pa.s}$$

**Exemple2 : Calcul d'une viscosité cinématique**

**Question** Du fuel porté à une température  $T=20^\circ\text{C}$  a une viscosité dynamique  $\mu = 95.10^{-3} \text{ Pa.s}$  . Calculer sa viscosité cinématique  $\nu$  en stockes sachant que sa densité est  $d=0,95$ . On donne la masse volumique de l'eau est  $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg} / \text{m}^3$

**Réponse :**

On a :

$$d = \frac{\rho}{\rho_{\text{eau}}} \Rightarrow \rho = \rho_{\text{eau}} \times d = 0,95 \times 1000 = 950 \text{ kg} / \text{m}^3$$

Donc

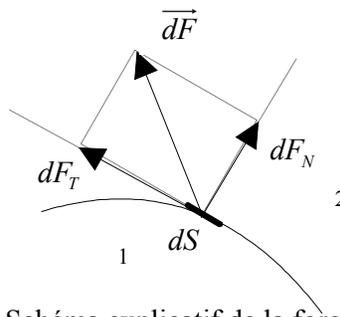
$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{95.10^{-3}}{950} = 10^{-4} \text{ m}^2 / \text{s} = 1 \text{ st}$$

## Chapitre II : Statique des fluides

### II.1.Définition :

La statique des fluides est la discipline qui étudie les conditions d'équilibre des fluides au repos. C'est à dire le fluide n'est soumis qu'à un champ de pesanteur que l'on prendra uniforme. Comme la viscosité ne se manifeste que s'il y a mouvement relatif des particules (déformation), la statique des fluides visqueux (ou réel) se confond avec la statique des fluides parfaits.

Nous verrons en particulier dans ce chapitre les équations générales de la statique des fluides, théorème de pascal, la poussée d'Archimède et la grandeur pression



**Figure II.1:** Schéma explicatif de la force de pression.

Dans un milieu quelconque, donc aussi dans un milieu fluide, la force que la partie (1) exerce sur la partie (2) à travers un élément de surface réel ou fictif  $dS$  a une direction quelconque.

Mais cette force  $\vec{dF}$  peut toujours être décomposée en :

- une **composante tangentielle**  $dF_T$
- une **composante normale**  $dF_N$

La quantité  $dF_T / dS$  représente la contrainte tangentielle et  $dF_N / dS$  la contrainte normale.

Par définition on appelle **Pression** la contrainte normale :  $p = \frac{dF_N}{dS}$

#### **Remarque :**

En statique des fluides, seules interviennent les forces de pression  $dF_N$ , normales à l'élément  $dS$ . Les forces tangentielles  $dF_T$  n'apparaissent qu'en dynamique des fluides : elles correspondent aux frottements visqueux des couches fluides en mouvement les unes par rapport aux autres et par rapport à la paroi de la conduite.

Plusieurs unités existent:

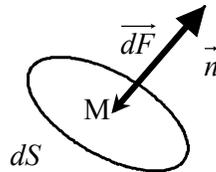
- le pascal (Pa) : unité SI, peu employée en pratique
- le bar (bar) et son sous multiple le millibar (mbar)

- le millimètre de mercure ou Torr
- le millimètre de colonne d'eau ou le mètre de colonne d'eau (m CE)
- l'atmosphère (atm) La correspondance entre ces unités est la suivante:  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 1000 \text{ mbar} \approx 760 \text{ mm de mercure} \approx 10,2 \text{ m CE} \approx 0,987 \text{ atm}$ . **La pression atmosphérique** est la pression exercée par l'atmosphère à la surface de la terre. Au niveau de la mer cette pression est équivalente à celle exercée par une colonne d'environ 760 mm de mercure. Elle varie tous les jours légèrement: elle est néanmoins toujours voisine de 1 bar.
- **Pression absolue et pression relative** La pression absolue est la pression mesurée par rapport au vide absolu (c'est-à-dire l'absence totale de matière). Elle est toujours positive. La pression relative se définit par rapport à la pression atmosphérique existant au moment de la mesure: cette pression peut donc prendre une valeur positive si la pression est supérieure à la pression atmosphérique ou une valeur négative si la pression est inférieure à la pression atmosphérique.

## II.2.Pression en point d'un fluide :

En tout point d'un fluide il existe une certaine pression. Soit un point M dans un fluide. Si on considère une surface imaginaire  $dS$  passant par M, la résultante de toutes les forces, agissantes sur  $dS$ , des particules de fluides en mouvement désordonné est perpendiculaire à cette surface  $dS$  et on peut écrire :

$$\overline{dF} = - p \vec{n} dS \quad (\text{II.1})$$



**Figure II.2:** Schéma explicatif de la force de pression en un point.

$\vec{n}$  étant le vecteur unitaire de la normale à  $dS$  orienté vers l'extérieur.

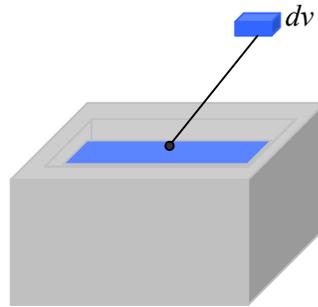
Cette force  $\overline{dF}$  dépend évidemment de la surface  $dS$  envisagée, mais la pression  $p_M$  au point M du fluide ne dépend pas de  $dS$ .

## II.3. Equation fondamentale de la statique des fluides :

L'objectif de cette partie est de déterminer la distribution de la pression au sein d'un fluide en équilibre. Pour cela, on considère un élément arbitraire ( $dV$ ) d'un fluide dans un réservoir

parallélépipédique (figure II.3). Le réservoir et le fluide sont en équilibre, alors on peut écrire le premier principe de Newton :

$$\sum \overrightarrow{dF}_{sys} = \vec{0} \tag{II.2}$$



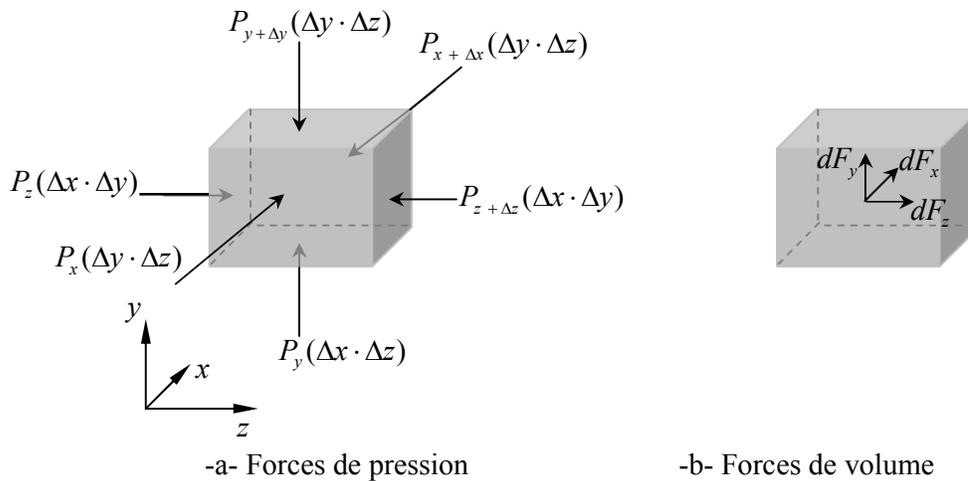
**Figure II.3:** Réservoir contenant un fluide au repos.

Les seules forces agissantes sur le système  $dv$  sont :

- Les forces de pression ;
- Les forces de volume.

Tout d’abord, on commence par l’étude d’un élément fluide ayant les dimensions  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  et  $\Delta z$ , puis on déduit l’équation différentielle désirée.

La figure II.4 montre les forces agissants sur les six faces de l’élément fluide.



**Figure II.4:** Forces agissants sur les six faces de l’élément fluide.

La projection de l'équation (II.2) sur les trois axes donne :

$$\begin{cases} P_x \Delta y \Delta z - P_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z + \rho X \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \\ P_y \Delta x \Delta z - P_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z + \rho Y \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \\ P_z \Delta x \Delta y - P_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y + \rho Z \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

$X$ ,  $Y$  et  $Z$  sont les composantes de la force active par unité de masse.

En simplifiant l'équation (II.3) on trouve :

$$\begin{cases} -\frac{P_{x+\Delta x} - P_x}{\Delta x} + \rho X = 0 \\ -\frac{P_{y+\Delta y} - P_y}{\Delta y} + \rho Y = 0 \\ -\frac{P_{z+\Delta z} - P_z}{\Delta z} + \rho Z = 0 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

On sait que quand  $\Delta x \rightarrow 0$  ;  $\frac{P_{x+\Delta x} - P_x}{\Delta x} = \frac{\partial P}{\partial x}$ . La même règle s'applique pour  $\Delta y$  et  $\Delta z$ .

Alors le système (II.4) devient :

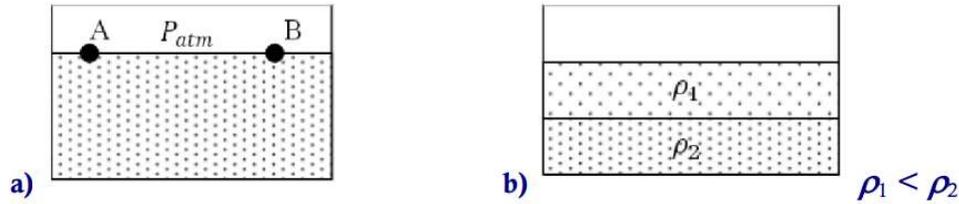
$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho X = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho Y = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho Z = 0 \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Les équations (II.5) sont les équations fondamentales de la statique des fluides. L'écriture vectorielle de ces équations est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{F} \quad (\text{II.6})$$

#### II.4.Surface de niveau

Une surface de niveau se caractérise par une même pression en chacun de ses points. C'est la surface libre d'un liquide qui ; en chacun des ses points, elle est perpendiculaire à la pesanteur. La surface des océans (environ 70 % de la surface terrestre totale) est généralement considérée comme surface de niveau, c'est-à-dire d'une surface équipotentielle du champ de pesanteur. En effet, la surface des océans et des mers est contrôlée essentiellement par la force de pesanteur, avec quelques phénomènes perturbateurs tels les courants marins, les variations de salinité, les marées, la houle causée par les vents, les variations de la pression atmosphérique, etc.



**Figure II.5:** Surface de niveau : a) Surface libre b) Fluides non miscible.

### II.5. Cas d'un fluide incompressible dans le champ de pesanteur : Hydrostatique

Les forces de volume se réduisent aux seules forces de pesanteur.  $\vec{F}$  représente le poids de l'unité de masse du fluide, c'est un vecteur dirigé vers le centre de la terre, son module est égale à l'accélération de la pesanteur. Dans ce cas, les équations fondamentales peuvent être

écrite sous la forme suivante :

$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Le système(II.7)montre que la pression  $P$  ne dépend pas  $x$  et de  $z$ . Dans ce cas la dérivée partielle peut être remplacée par la dérivée ordinaire :

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad (\text{II.8})$$

Pour un fluide incompressible ( $\rho = \text{constante}$ ), on peut intégrer l'équation 8 dans la direction  $y$  pour trouver la variation de la pression en fonction de la hauteur,  $P(y)$  :

$$\int_{P_0}^{P(y)} dP = -\int_{y_0}^y \rho g dy \quad (\text{II.9})$$

Ce qui donne :

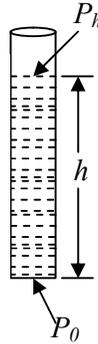
$$P(y) - P_0 = -\rho g(y - y_0) \quad (\text{II.10})$$

Ou encore :

$$P(y) = P_0 - \rho g(y - y_0) \quad (\text{II.11})$$

**Application :**

L'utilisation de cette relation est très facile en considérant une colonne d'un fluide dans un tube (figure II.6).



**Figure II.6:** Variation de la pression en fonction de la hauteur.

La pression  $P_h$  est donnée donc par :

$$P_h = P_0 - \rho gh \quad (\text{II.12})$$

Donc la pression en bas de tube est supérieure à celle du haut.

L'équation (II.12) signifie que la différence de pression entre deux points d'un fluide pesant en équilibre est égale au poids d'un cylindre de ce fluide, de base égale à l'unité de surface et de hauteur égale à la différence de niveau des deux points.

On peut écrire l'expression (II.12) sous la forme :

$$\frac{P}{\rho g} + y = \frac{P_0}{\rho g} + y_0 = h_z \quad (\text{II.13})$$

$h_z$  : **hauteur piézométrique.**

Comme il est possible de recommencer la même démonstration pour tous les points, nous pouvons écrire :

$$\frac{P}{\rho g} + z = C^{te} \quad (\text{II.14})$$

On peut aussi écrire :

$$P + \rho gz = C^{te} = P_g \quad (\text{II.15})$$

$P_g$  est appelée **pression motrice.**

Et la loi fondamentale des fluides s'écrit : dans un fluide incompressible au repos la pression motrice est constante. Cette loi est valable dans tous les cas, quelle soit la forme donnée au liquide, à condition qu'il s'agisse d'un liquide homogène et au repos.

## II.6.Cas d'un fluide non miscible

Pour le premier fluide

$$P_B = P_A - \rho_1 g h_1$$

Deuxième fluide

$$P_B = P_C - \rho_2 g h_2$$

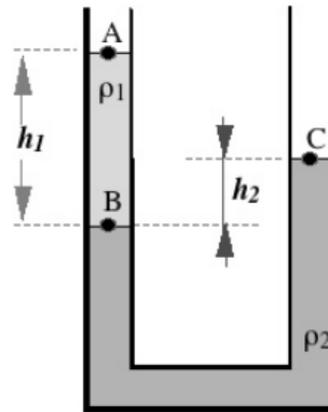
O na  $P_A = P_C = P_0$

Donc

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 \quad (\text{II.16})$$

Les dénivellations de deux liquides non miscibles sont en rapport inverse de leurs masses volumiques.

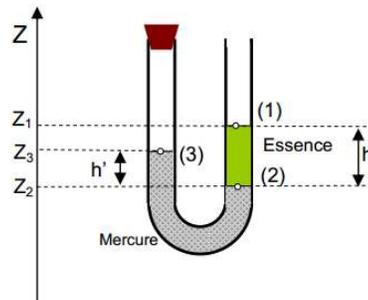
Si  $\rho_1 = \rho_2$  Un fluide est à la même hauteur dans deux vases communicants.



**Figure II.7:** Tube en U avec deux liquides.

**Exemple :**

Soit un tube en U fermé à une extrémité (Figure II.8). qui contient deux liquides non miscibles.



**Figure II.8:** Exercice d'application : loi fondamentale de la statique des fluides.

Les surfaces :

- (1) et (2) il s'agit de l'essence de masse volumique  $\rho_{\text{essence}}=700 \text{ kg/m}^3$ .

- (2) et (3), il s'agit du mercure de masse volumique  $\rho_{\text{mercure}}=13600 \text{ kg/m}^3$ .

La pression au-dessus de la surface libre (1) est  $P_1=P_{\text{atm}}=1 \text{ bar}$ .

L'accélération de la pesanteur est  $g=9,8 \text{ m/s}^2$ .

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression  $P_3$  qu'on cherche à calculer.

1) En appliquant la loi fondamentale de la statique des fluides pour l'essence, calculer la pression  $P_2$  (en mbar) au niveau de la surface de séparation (2) sachant que  $h=(Z_1-Z_2)=728 \text{ mm}$ .

2) De même, pour le mercure, calculer la pression  $P_3$  (en mbar) au niveau de la surface (3) sachant que  $h'=(Z_3-Z_2)=15 \text{ mm}$ .

**Réponse :**

1) pour l'essence :  $P_2 - P_1 = \rho_{\text{essence}} \cdot g (Z_1 - Z_2)$

$$P_2 = P_1 + \rho_{\text{essence}} \cdot g \cdot h$$

$$P_2 = 10^5 + 700 \cdot 9,8 \cdot 0,728 = 1,05 \cdot 10^5 \text{ pascal} = 1050 \text{ mbar}$$

2) pour le mercure :  $P_2 - P_3 = \rho_{\text{mercure}} \cdot (Z_3 - Z_2) \cdot g$

$$P_3 = P_2 - \rho_{\text{mercure}} \cdot g \cdot h'$$

$$\text{A.N. } P_3 = 1,05 \cdot 10^5 - 13600 \cdot 9,8 \cdot 0,015 = 1,03 \cdot 10^5 \text{ pascal} = 1030 \text{ mbar}$$

### II.7. Théorème de pascal :

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

Supposons qu'au point  $G_1$  intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne  $P + \Delta P_1$ .

$\Delta P_1$  étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression  $\Delta P_2$  qui en résulte en  $G_2$ .

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre  $G_1$  et  $G_2$  pour le fluide :

$$\text{- à l'état initial: } P_1 - P_2 = \rho g(z_2 - z_1) \quad (\text{II.17})$$

$$\text{- à l'état final : } (P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = \rho g(z_2 - z_1) \quad (\text{II.18})$$

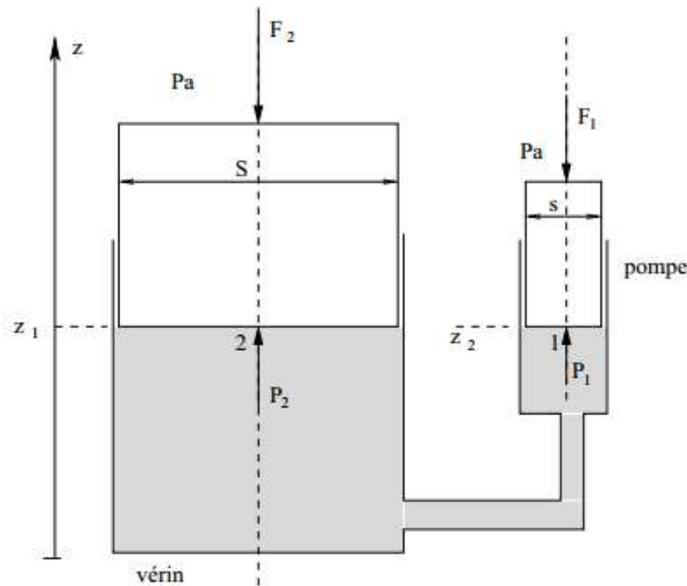
En faisant la différence entre les équations (II.17) et (II.18) on obtient :

$$\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0$$

$$\text{D'où } \Delta P_1 = \Delta P_2$$

**Exemple :**

Soit le vérin hydraulique ci-dessous (Figure 9). Le système étant en équilibre et les pistons sont sur la même horizontale. Si on applique un effort  $F_1$  de 100 N sur le piston de la pompe, calculer la charge qu'il est possible de soulever avec le vérin. On donne :  $D/d = 10$ .



**Figure II.9:** Exercice d'application : théorème de pascal [3].

**Réponse :**

$$\text{Equilibre du vérin : } F_2 + P_a S - P_2 S = 0$$

$$\text{Equilibre de la pompe : } F_1 + P_a s - P_1 s = 0$$

$$Z_1 = Z_2 \text{ et } P_1 = P_2 \text{ d'où } (F_2/S) = (F_1/s)$$

donc

$$F_2 = F_1(D/d)^2$$

$$F_2 = 100 \cdot 10^2 = 10 \text{ KN.}$$

**II.8. Force de poussée d'Archimède :**

Les forces exercées par un fluide pesant en équilibre sur un solide complètement immergé, admettent une résultante égale et directement opposée au poids du fluide déplacé, et appliquée au centre de gravité  $G$  du fluide déplacé appelé **centre de poussée**.



Appliquer le théorème d'Archimède et déterminer la hauteur  $h$  immergée.

**Réponse :**

1) Théorème d'Archimède : la poussée d'Archimède est égal au poids du volume déplacé:

$$P_{\text{ARCH}} = a^2 \cdot h \cdot \rho_2 \cdot g$$

2) Equation d'équilibre :  $P_{\text{ARCH}} = \text{Poids}$

Donc

$$a^2 \cdot h \cdot \rho_2 \cdot g = a^3 \cdot \rho_1 \cdot g$$

équivalent à

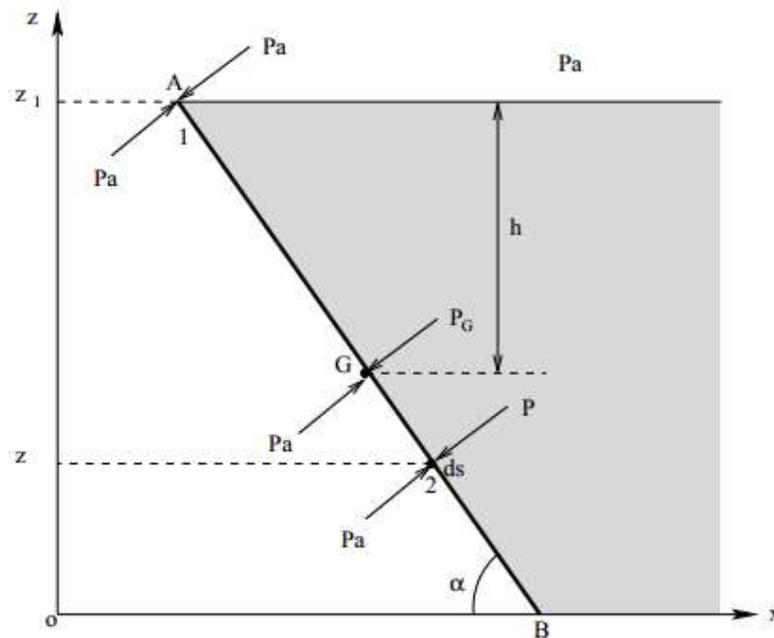
$$h = (\rho_1 / \rho_2) \cdot a$$

$$h = (7800 / 13600) \cdot 50 = 28,676 \text{ cm}$$

## II.9. Calcul des forces de pression :

### II.9.1. Résultante des forces de pression sur une paroi plane

Soit une paroi de surface  $S$ , faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale (Figure II.12). Nous avons :



**Figure II.12:** Résultante des forces de pression [3].

Au point 1 :  $P_1 = P_a \Rightarrow P_{\text{eff}} = 0$ .

Au point G :  $P_G = P_a + \rho g h \Rightarrow P_{\text{Geff}} = \rho g h$ .

Au point 2 :  $P_z = P_a + \rho g (z_1 - z) \Rightarrow P_{\text{zeff}} = \rho g (z_1 - z)$ .

La force élémentaire exercée sur l'élément de surface  $ds$  est :

$$dF = P_{\text{zeff}} ds = \rho g (z_1 - z) ds$$

$$F = \int_s \rho g (z_1 - z) ds = \rho g \int_s (z_1 - z) ds$$

D'après la définition du centre de gravité, le moment statique :

$$\int_s (z_1 - z) ds = h \cdot S$$

$$F = \rho g h S = P_{\text{Geff}} \quad (\text{II.21})$$

La résultante des forces (poussée effective) exercée par un liquide sur une paroi plane est égale au poids d'une colonne cylindrique de ce liquide ayant pour base la surface pressée et pour hauteur la distance du centre de gravité de la paroi à la surface libre du liquide.

### II.9.2. Centre de poussée :

On appelle ainsi le point d'application de la résultante des forces de pression sur la paroi. En général, il n'est pas confondu avec le centre de gravité. On obtient sa position par une équation de moments (Figure II.13).

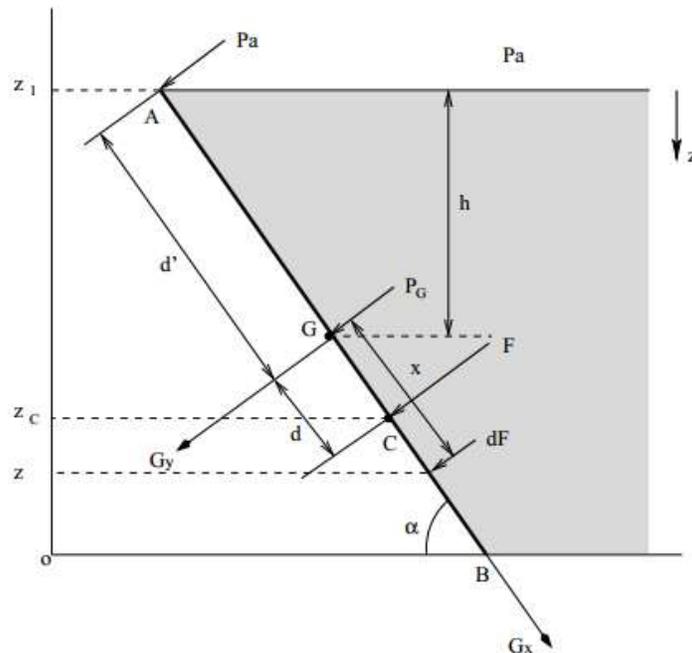


Figure II.13: Centre de poussée [3].

Afin de faciliter la résolution, prenons comme référence la surface libre du fluide et comme sens positif, l'axe vertical dirigé vers le bas. Nous aurons alors, d'après (figure II.13) :

$z = h + x \sin \alpha$ . Faisons maintenant un changement de repère et prenons  $(G, G_x G_y)$  lié à la paroi.

Le moment élémentaire  $dM$  d'une force  $dF$  est :  $dM_{/G_y} = dF \cdot x$

$$MF_{/G_y} = F \cdot d = \sum dM_{/G_y} = \int x dF = \int_S \rho g z x ds$$

$$F \cdot d = \rho g \int_S (h + x \sin \alpha) x ds = \rho g h \int_S x ds + \rho g \sin \alpha \int_S x^2 ds$$

$$\int_S x ds = 0 \text{ par définition du centre de gravité } G (x_G = 0).$$

$$\int_S x^2 ds = I_{G_y} \text{ est, par définition, le moment d'inertie (ou moment quadratique) de la}$$

surface  $S$  par rapport à l'axe  $G_y$ .

Donc :

$$F \cdot d = \rho g \sin \alpha I_{G_y} = \rho g h S d$$

d'où, d'après la relation (20) :

$$d = (I_{G_y} \sin \alpha) / (h S) \quad (\text{II.22})$$

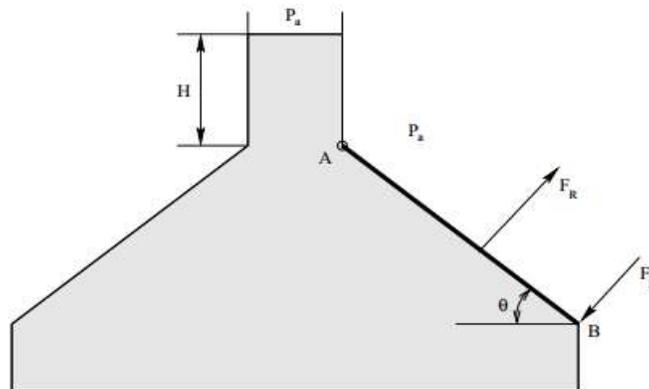
Le point d'application de la force  $F$  se trouve donc à la distance  $d$  du point  $G$  et à  $(d' + d)$  c'est-à-dire  $(x_G + I_{G_y} / S x_G)$  du point  $A$ .

### Exemple :

La porte rectangulaire  $AB$  est articulée en  $A$  (Figure II.14). Sa longueur est  $AB = L = 1,5 \text{ m}$  et sa largeur est  $W = 2 \text{ m}$ .

1. Calculer la résultante des forces  $F_R$  exercées par l'eau sur la porte  $AB$ .
2. Calculer la force  $F_B$  à appliquer au point  $B$  pour maintenir la porte fermée.

On donne :  $\rho = 999 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $H = 3 \text{ m}$  et  $\theta = 25^\circ$ .



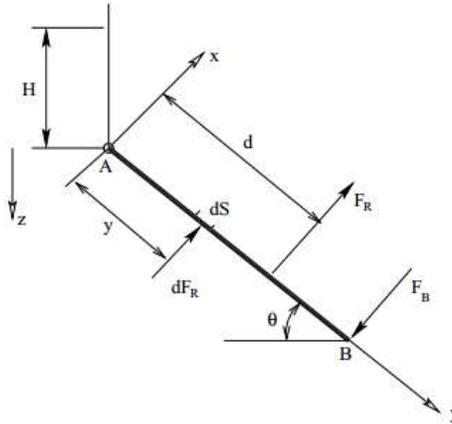
**Figure II.14:** Exercice d'application : Résultante des forces [3].

**Réponse :**

Dans le but de faciliter la résolution de cet exercice, faisons un changement de repère lié à la porte AB (Figure II.15).

1- Chaque élément de surface  $dS$  est soumis à une force élémentaire  $dF_R$  due à la pression du fluide :

$$dF_R = P_{z\text{eff}} \cdot dS = \rho g z dS = \rho g z W dy$$



**Figure II.15:** Changement de repère [3].

Or chaque point de la porte est soumis à la hauteur de pression au dessus du point A

donc :

$$z = H + y \sin \theta$$

d'où l'expression globale de la force élémentaire en chaque point de la porte :

$$dF_R = \rho g W (H + y \sin \theta) dy$$

La résultante des forces est obtenue par intégration des forces élémentaires le long de la porte :

$$F_R = \rho g W \int_s (H + y \sin \theta) dy = \rho g W \left( HL + \frac{L^2}{2} \sin \theta \right)$$

d'où finalement :

$$F_R = \rho g WL \left( H + \frac{L}{2} \sin \theta \right)$$

A.N :

$$F_R = (999.9 \cdot 81.2 \cdot 1.5 \cdot (3 + (1.5/2) \cdot \sin 25)) = 97.52 \text{ kN.}$$

2-Pour calculer la force à appliquer sur la porte pour qu'elle reste fermée, il faut considérer l'équilibre de cette porte dans la position indiquée sur la figure. Nous pouvons alors annuler le moment de la porte AB par rapport à A :

$$\sum M_{F/A} = 0 \Rightarrow F_R d = F_B L \Rightarrow F_B = \frac{d}{L} F_R \quad (a)$$

La résultante des forces  $F_R$  étant connue, il faut alors déterminer son point d'application (distance  $d$ ). Pour cela, appliquons toujours une équation de moment par rapport à A des forces élémentaires :

$$\begin{aligned} \sum dM_{dF_R/A} &= M_{F_R/A} \Leftrightarrow \sum dF_R y = F_R d \\ \Rightarrow d &= \frac{1}{F_R} \int_0^L \rho g W (H + y \sin \theta) y dy = \frac{\rho g W}{F_R} \int_0^L (H \cdot y + y^2 \sin \theta) dy \\ \Rightarrow d &= \frac{\rho g W L^2}{F_R} \left( \frac{H}{2} + \frac{L}{3} \sin \theta \right) \end{aligned}$$

Ou encore, en remplaçant  $F_R$  par son expression :

$$\Rightarrow d = \frac{\frac{H L}{2} + \frac{L^2}{3} \sin \theta}{H + \frac{L}{2} \sin \theta}$$

A.N :

$$d = \frac{\frac{3,1,5}{2} + \frac{1,5^2}{3} \sin 25}{3 + \frac{1,5}{2} \sin 25} = 0,774m$$

et en remplaçant dans la relation (a), nous auront finalement :

$$F_B = \rho g W d \left( H + \frac{L}{2} \sin \theta \right) = \rho g W L \left( \frac{H}{2} + \frac{L}{3} \sin \theta \right)$$

AN :

$$F_B = 999.9,81.2.1,5 \left( \frac{3}{2} + \frac{3,5}{3} \sin 25 \right) = 50,32KN$$

## Chapitre III : Dynamique des fluides parfaits incompressibles

### III.1 Ecoulement permanent

Un écoulement est dit permanent si les champs de vitesses ainsi que la pression et la masse volumique en chaque point ne dépendent pas du temps.

Les lignes de courant sont alors indépendantes du temps et confondues avec les trajectoires et avec les lignes d'émission. Pour beaucoup de problèmes simples (écoulements dans les tuyaux et canaux), on peut souvent assimiler l'ensemble de l'écoulement à un seul tube de courant et considérer uniquement la vitesse moyenne dans ce tube.

### III.2 Ecoulement permanent en moyenne (ou stationnaire)

Très souvent, dans les écoulements industriels,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  ainsi que la pression et la masse volumique dépendent du temps mais restent constants en moyenne, c'est à dire que les quantités moyennes sont constantes à condition que  $T$  soit suffisamment grand :

$$\begin{aligned}\bar{v}_1 &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_1 dt, \\ \bar{v}_2 &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_2 dt, \\ \bar{v}_3 &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v_3 dt\end{aligned}\tag{III.1}$$

### III.3 Débit de masse et débit de volume

On appelle débit en masse (ou débit massique) à travers une surface  $S$  la quantité :

$$q_m = \iint_S \rho v_n d\sigma = \iint_S (\rho v_1 dx_2 dx_3 + \rho v_2 dx_1 dx_3 + \rho v_3 dx_1 dx_2)\tag{III.2}$$

$\rho$  : masse volumique du fluide ;

$d\sigma$  : élément de surface ;

$v_n$  : projection de la vitesse  $\vec{v}$  au centre de l'élément de surface sur la normale à l'élément  $d\sigma$ .

On appelle débit en volume (ou débit volumique) à travers une surface  $S$  la quantité :

$$q_v = \iint_S v_n d\sigma = \iint_S (v_1 dx_2 dx_3 + v_2 dx_1 dx_3 + v_3 dx_1 dx_2)\tag{III.3}$$

#### *Interprétation physique des débits*

##### **Débit-masse :**

Si  $\Delta m$  est la masse de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le

temps  $\Delta t$ , par définition le débit-masse est :  $q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t}$ , unité :  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$

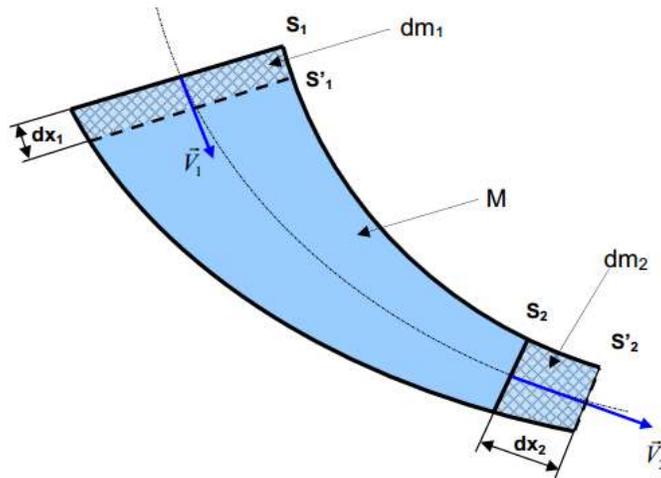
#### Débit-volume :

Si  $\Delta v$  est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le

temps  $\Delta t$ , par définition le débit-volume est :  $q_v = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ , unité :  $\text{m}^3\cdot\text{s}^{-1}$

### III.4 Equation de continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique  $\rho$  animée d'un écoulement permanent.



**Figure III.1:** Schéma explicatif d'une veine d'un fluide incompressible [1].

On désigne par :

- 1)  $S_1$  et  $S_2$  respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant  $t$ .
- 2)  $S'_1$  et  $S'_2$  respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant  $t'=(t+dt)$ .
- 3)  $V_1$  et  $V_2$  les vecteurs vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections  $S_1$  et  $S_2$  de la veine.
- 4)  $dx_1$  et  $dx_2$  respectivement les déplacements des sections  $S_1$  et  $S_2$  pendant l'intervalle de temps  $dt$ .
- 5)  $dm_1$  : masse élémentaire entrante comprise entre les sections  $S_1$  et  $S'_1$ ,
- 6)  $dm_2$  : masse élémentaire sortante comprise entre les sections  $S_2$  et  $S'_2$ .
- 7)  $M$  : masse comprise entre  $S_1$  et  $S_2$ .
- 8)  $dV_1$  : volume élémentaire entrant compris entre les sections  $S_1$  et  $S'_1$ .
- 9)  $dV_2$  : volume élémentaire sortant compris entre les sections  $S_2$  et  $S'_2$ .

A l'instant  $t$  : le fluide compris entre  $S_1$  et  $S_2$  a une masse égale à  $(dm_1 + M)$ .

A l'instant  $t+dt$  : le fluide compris entre  $S'_1$  et  $S'_2$  a une masse égale à  $(M + dm_2)$ .

Par conservation de la masse:

$$dm_1 + M = M + dm_2 \Rightarrow dm_1 = dm_2$$

Donc

$$\rho_1 \cdot dV_1 = \rho_2 \cdot dV_2 \Rightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot dx_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot dx_2$$

En divisant par  $dt$  on abouti à :

$$\rho_1 \cdot S_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \cdot S_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \Rightarrow \rho_1 \cdot S_1 \cdot V_1 = \rho_2 \cdot S_2 \cdot V_2$$

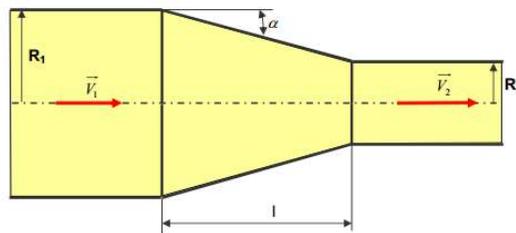
Puisque le fluide est incompressible :  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

On peut simplifier et aboutir à l'équation de continuité suivante :

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2 \quad (\text{III.4})$$

### Exemple :

On veut accélérer la circulation d'un fluide parfait dans une conduite de telle sorte que sa vitesse soit multipliée par 4. Pour cela, la conduite comporte un convergent caractérisé par l'angle  $\alpha$  (schéma ci-dessus).



- 1) Calculer le rapport des rayons ( $R_1/R_2$ ).
- 2) Calculer ( $R_1 - R_2$ ) en fonction de  $l$  et  $\alpha$ . En déduire la longueur  $l$ . ( $R_1 = 50$  mm,  $\alpha = 15^\circ$ ).

### Réponse :

On applique l'équation de continuité :

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \frac{\pi \cdot R_1^2}{\pi \cdot R_2^2} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} = 2$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{R_1 - R_2}{l} \Rightarrow l = \frac{R_1 - R_2}{\operatorname{tg} \alpha}$$

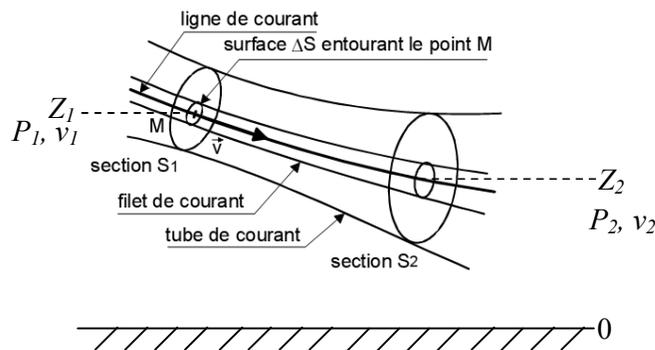
$$\text{A.N } l = \frac{R_1 - \frac{R_1}{2}}{\operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow l = \frac{R_1}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 93,3 \text{ mm}$$

### III.5 Equation de Bernoulli

On considère un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible, entre les sections  $S_1$  et  $S_2$ , entre les quelles il n'y a aucune machine hydraulique, (pas de pompe, ni de turbine).

Soit  $m$  la masse  $m$  et  $V$  le volume du fluide qui passe à travers la section  $S_1$  entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ .

Pendant ce temps la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section  $S_2$ .



**Figure III.2:** Schéma explicatif du théorème de Bernoulli.

Tout se passe comme si ce fluide était passé de la position (1) à la position (2).

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$  (la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), on obtient :

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = m g (z_1 - z_2) + (P_1 - P_2) V \quad (\text{III.5})$$

$E_v = \frac{1}{2} m v^2$  : énergie cinétique,

$E_z = m \cdot g \cdot z$  : énergie potentielle de gravité,

$E_p = P V$  : énergie potentielle de pression.

L'équation (III.5) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + m g z_1 + P_1 V = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g z_2 + P_2 V \quad (\text{III.6})$$

Ou encore :

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{P_2}{\rho} \quad (\text{III.7})$$

Si on effectue la même démarche entre les différentes sections du tube de courant, on obtient :

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} = Cte \quad (\text{III.8})$$

L'équation (III.8) est l'équation de Bernoulli. Cette équation est une forme particulière du théorème de la conservation de l'énergie mécanique d'un fluide en mouvement.

En divisant tous les termes de la relation (III.9) par g, on écrit tous les termes dans la dimension d'une hauteur (pressions exprimées en mètres de colonne de fluide).

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g} = H = Cte \quad (\text{III.9})$$

H : hauteur totale

$\frac{P}{\rho g}$  : hauteur de pression

$\frac{v^2}{2g}$  : hauteur cinétique

z : la cote.

$z + \frac{P}{\rho g}$  : hauteur piézométrique.

### III.6 Application du théorème de Bernoulli

#### III.6.1 Tube manométrique

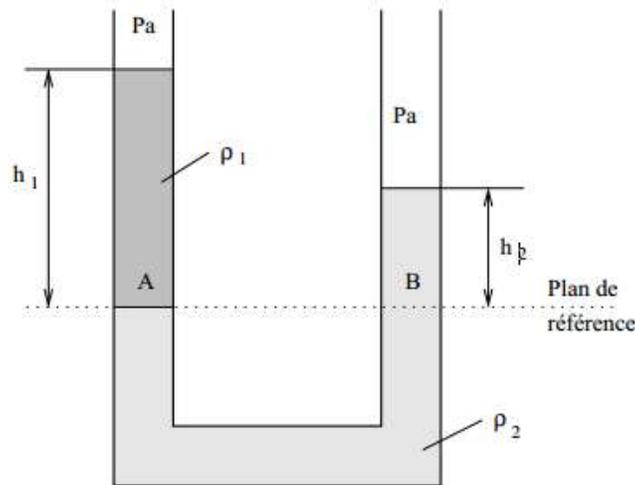


Figure III.3: Tube manométrique [3].

On appliquons la loi fondamentale de la statique :

$$\begin{cases} P_A = P_a + \rho_1 g h_1 \\ P_B = P_b + \rho_2 g h_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_A - P_B = g(\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2)$$

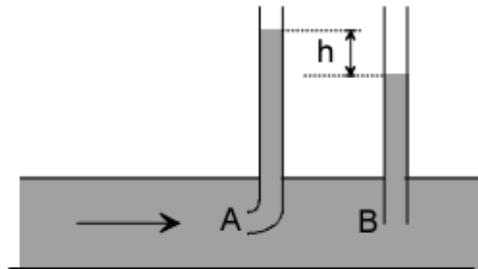
Or  $P_A = P_B$  puisque les points A et B appartiennent au même fluide et sont situés dans un même plan horizontal. Donc :

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

Cette relation pratique permet, par exemple, de déterminer la masse volumique inconnue  $\rho_2$  connaissant celle de l'autre liquide  $\rho_1$  ainsi que les hauteurs  $h_1$  et  $h_2$  qui peuvent être facilement mesurées.

### III.6.2 Tube de Pitot

On considère un liquide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans le liquide, les deux extrémités étant à la même hauteur (figure III.4). Au point B, le liquide a la même vitesse  $v$  que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide  $P = P_B$ .



**Figure III.4** Tube de Pitot.

En A, point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression est  $P_A$ . D'après le théorème de Bernoulli,

$$P_B + \frac{1}{2} \rho v^2 = P_A$$

Soit

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \rho g h \quad (\text{III.10})$$

En mesurant la dénivellation  $h$  du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse  $v$  d'écoulement du fluide.

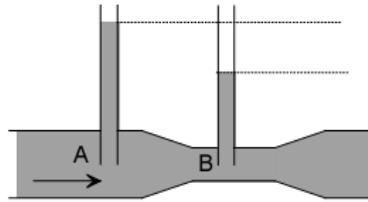
### III.6.3 Tube de venturi

Une conduite de section principale  $S_A$  subit un étranglement en B où sa section est  $S_B$ . La vitesse d'un fluide augmente dans l'étranglement, donc sa pression y diminue :

$$v_B > v_A \Rightarrow P_B < P_A$$

Le théorème de Bernoulli s'écrit ici :

$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 \quad (\text{III.11})$$



**Figure III.5** Tube de venturi.

D'autre part, en écrivant la conservation du débit volumique,

$$q_v = v_A S_A = v_B S_B \quad (\text{III.12})$$

D'où on tire :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho \left( \frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2} \right) q_v^2 = k q_v^2 \quad (\text{III.13})$$

La différence de pression est proportionnelle au carré du débit ; application à la mesure des débits.

### III.6.4 Diaphragmes

Il s'agit d'un disque percé en son centre, réalisé dans le matériau compatible avec le liquide utilisé. Le diaphragme concentrique comprime l'écoulement du fluide, ce qui engendre une pression différentielle de part et d'autre de celui-ci. Il en résulte une haute pression en amont et une basse pression en aval, proportionnelle au carré de la vitesse d'écoulement. C'est le dispositif le plus simple, le moins encombrant et le moins coûteux. Domaine d'utilisation incompatible aux liquides contenant des impuretés solides car celles-ci peuvent s'accumuler à la base du diaphragme. Il introduit une perte de charge importante. Les diaphragmes doivent être centrés exactement par rapport à la conduite et ils doivent

être implantés sur des parties rectilignes à une distance suffisante des coudes, piquages, vannes, changement de section pour éviter les perturbations.

**Principe** : Un resserrement de la conduite ou un changement de direction créent entre amont et aval une différence de pression  $\Delta P$  liée au débit par une relation de la forme:

$$Q_v = K.(\Delta P)^{1/2} \quad (\text{III.14})$$

Avec  $K$  : constante réelle

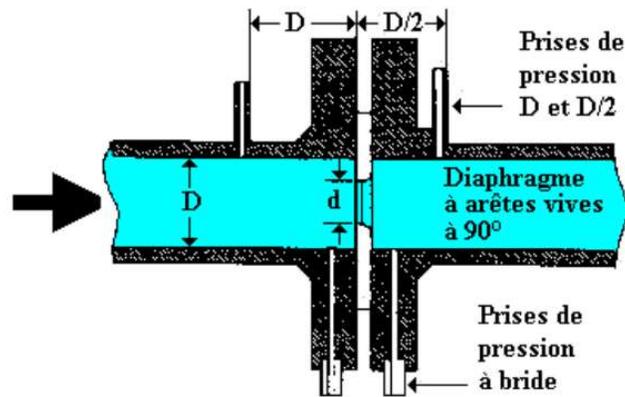


Figure III.6 Diaphragmes [8].

### III.6.5 Tube de Prandtl

Le tube étant assez mince pour ne pas perturber l'écoulement.

Le théorème de Bernoulli s'écrit ici :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P + \frac{1}{2}\rho v^2$$

Le tube de Prandtl sert donc à mesurer la vitesse en un point quelconque de l'écoulement par la formule suivante :

$$v = \sqrt{\frac{2(P_0 - P)}{\rho}} \quad (\text{III.15})$$

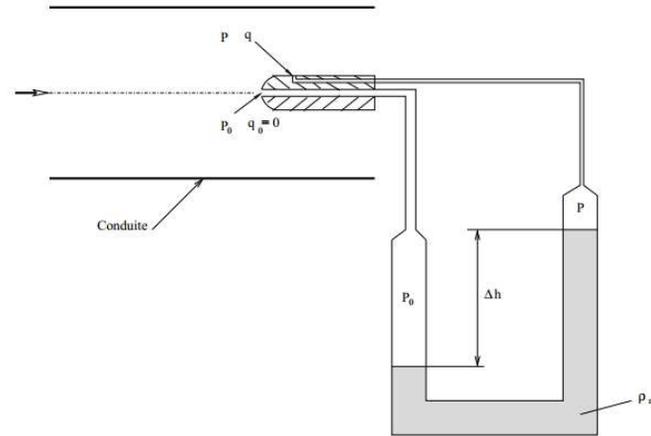


Figure III.7 Tube de Prandtl [3].

à l'équilibre du manomètre on a :

$$P_0 - P = \rho_m g \Delta h \quad (\text{III.16})$$

### III.6.6 Etude du vidange d'un réservoir

Considérons un réservoir muni d'un petit orifice à sa base, de section  $s$  et une ligne de courant partant de la surface au point (1) et arrivant à l'orifice au point (2). En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points (1) et (2),

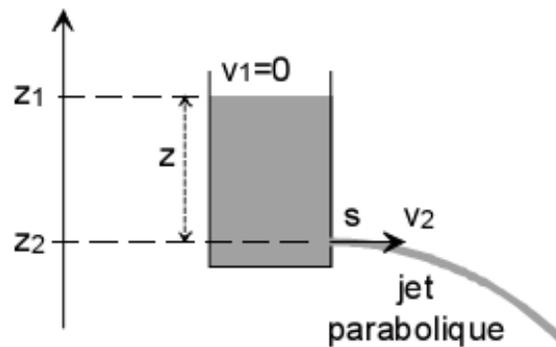


Figure III.8 Vidange d'un réservoir.

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (\text{III.17})$$

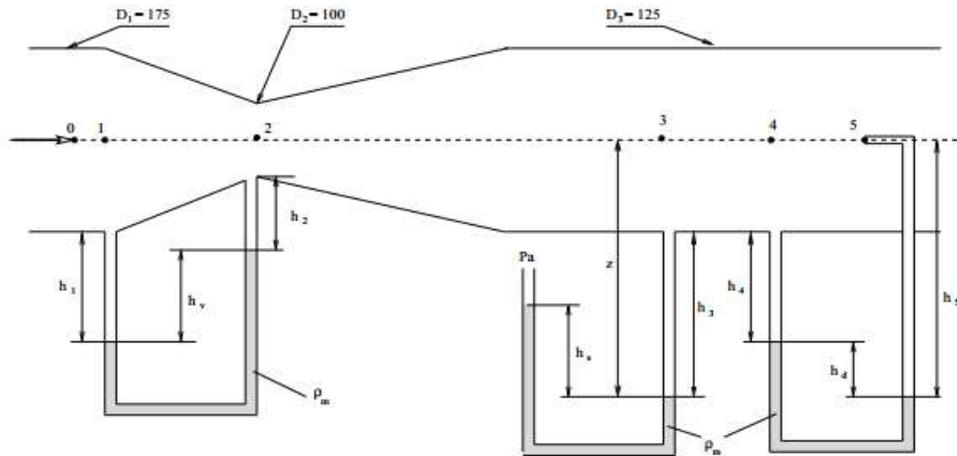
Or  $P_1 = P_2$ , pression atmosphérique. Et  $v_1 \ll v_2$  d'où :

$$v_2 = \sqrt{2gz} \quad (\text{III.18})$$

La vitesse d'écoulement est la même que la vitesse de chute libre entre la surface libre et l'orifice, quelle que soit la masse volumique du liquide.

**Exemple:**

Un circuit hydraulique horizontal a les dimensions indiquées (Figure.II.8). Il comporte un venturi, une prise de pression statique et une prise de pression double. Ces divers appareils sont reliés à des manomètres à mercure. Les tubes de liaison aux manomètres sont remplis d'eau.



**Figure III.8** Circuit hydraulique horizontal [3].

On donne :

- Masse volumique du mercure :  $\rho_m = 13600 \text{ Kg/m}^3$ .
  - Pression absolue au point 0 :  $P_0 = 1,5 \text{ bar}$ .
  - Pression atmosphérique :  $P_a = 1 \text{ bar}$ .
  - Hauteur  $z$  :  $z = 1 \text{ m}$ .
1. Sachant que la dénivellation  $h_v = 40 \text{ mm}$ , calculer le débit volumique dans la conduite.
  2. Calculer la dénivellation  $h_s$ .
  3. Calculer la dénivellation  $h_d$  dans la prise de pression double.

**Réponse :**

- 1) Pour calculer le débit volumique, nous écrivons la conservation du débit entre les points 1 et 2 dans le Venturi.

$$Q_v = v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

D'autre part, l'équation de Bernoulli entre ces deux points nous donne :

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + g(z_1 - z_2) = 0$$

On a  $z_1 = z_2$

$$\frac{P_1 - P_2}{\rho} = \frac{1}{2} v_1^2 \left( \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^2 - 1 \right) = \frac{1}{2} v_1^2 \left( \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right)$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho \left( \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right)}}$$

Comme la pression motrice  $P_g$  est constante dans chaque section de la conduite, alors :

$$Pg_1 = P_1 + \rho g (D_1/2) \text{ et } Pg_2 = P_2 + \rho g (D_2/2)$$

Au niveau du Venturi nous pouvons écrire :

$$Pg_1 + \rho g h_1 = Pg_2 + \rho g h_2 + \rho_m g h_v$$

et en remplaçant les pressions motrices :

$$P_1 + \rho g (h_1 + (D_1/2)) = P_2 + \rho g (h_2 + (D_2/2)) + \rho_m g h_v$$

d'où, en simplifiant :

$$P_1 - P_2 = g h_v (\rho_m - \rho)$$

En remplaçant cette différence de pression dans l'équation donnant  $v_1$ , puis dans celle de la conservation du débit, nous aurons finalement :

$$Q_v = \frac{\pi D_1^2}{4} \sqrt{\frac{2gh_v(\rho_m - \rho)}{\rho \left( \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^4 - 1 \right)}} = \frac{\pi(0,175)^2}{4} \sqrt{\frac{2.9,81.0,04(13,6-1)}{(1,75)^4 - 1}}$$

$$\Rightarrow Q_v = 0,02613 \text{ m}^3 / \text{s}$$

2) L'équation de Bernoulli entre les points 2 et 3 nous donne (sachant que  $z_2 = z_3$ ) :

$$\frac{P_3 - P_2}{\rho} + \frac{1}{2}(v_3^2 - v_2^2) = 0 \Rightarrow P_3 = P_2 + \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_3^2)$$

l'équilibre du manomètre nous donne :

$$P_a + \rho_m g h_s = P_{g3} + \rho g h_3 = P_3 + \rho g \frac{D_3}{2} + \rho g \left( z - \frac{D_3}{2} \right) = P_3 + \rho g z$$

d'où :

$$h_s = \frac{P_3 - P_a + \rho g z}{\rho_m g}$$

Il faut donc calculer la pression  $P_3$  pour pouvoir évaluer la dénivellation  $h_s$ . Pour cela, calculons d'abord les vitesses dans les différentes sections de la conduite :

$$v_1 = \frac{4Q_v}{\pi D_1^2} = \frac{4.0,02613}{3,1415(0,175)^2} \Rightarrow v_1 = 1,086 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{4Q_v}{\pi D_2^2} = \frac{4.0,02613}{3,1415(0,1)^2} \Rightarrow v_2 = 3,328 \text{ m/s}$$

$$v_3 = \frac{4Q_v}{\pi D_3^2} = \frac{4.0,02613}{3,1415(0,125)^2} \Rightarrow v_3 = 2,129 \text{ m/s}$$

$$\frac{P_1 - P_0}{\rho} + \frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = 0$$

et  $Q_v = S_0 v_0 = S_1 v_1 \Rightarrow v_0 = v_1$  d'ou :  $P_0 = P_1$

$$\frac{P_2 - P_0}{\rho} + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_0^2) = 0 \Rightarrow P_2 = P_0 - \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_0^2)$$

$$P_2 = 1,5 \cdot 10^5 - \frac{10^3}{2}(3,328^2 - 1,086^2) \Rightarrow P_2 = 1,45 \text{ bar}$$

$$P_3 = P_2 - \frac{\rho}{2}(v_3^2 - v_2^2) = 1,45 \cdot 10^5 - \frac{10^3}{2}(1,129^2 - 3,328^2) \Rightarrow P_3 = 1,482 \text{ bar}$$

En remplaçant ces valeurs dans l'expression de  $h_s$ , nous aurons :

$$h_s = \frac{1,482 \cdot 10^5 - 10^5 + 10^3 \cdot 9,81 \cdot 1}{13,6 \cdot 10^3 \cdot 9,81} = 0,4348 \text{ m}$$

3) Appliquons l'équation de Bernoulli entre les points 3 et 4 :

$$\frac{P_4 - P_3}{\rho} + \frac{1}{2}(v_4^2 - v_3^2) = 0$$

et  $Q_v = S_4 v_4 = S_3 v_3 \Rightarrow v_4 = v_3$  d'ou :  $P_4 = P_3$

La condition d'équilibre dans la prise de pression double nous donne :

$$P_{g4} + \rho g h_4 + \rho_m g h_d = P_5 + \rho g h_5$$

et en remplaçant les pressions motrices :

$$(P_4 + \rho g \frac{D_3}{2}) + \rho g h_4 + \rho_m g h_d = P_5 + \rho g (h_d + h_4 + \frac{D_3}{2})$$

$$\Rightarrow P_4 + \rho_m g h_d = P_5 + \rho g h_d$$

Pour calculer  $h_d$ , il suffit maintenant de calculer la pression  $P_5$ .

$$\frac{P_5 - P_4}{\rho} + \frac{1}{2}(v_5^2 - v_4^2) = 0$$

$$v_5 = 0 \text{ (point d'arrêt)}$$

$$P_5 = P_4 + \frac{1}{2}\rho v_4^2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2$$

et en remplaçant dans la relation précédente :

$$P_3 + \rho_m g h_d = \rho g h_d + P_3 + \frac{1}{2}\rho g v_3^2$$

$$h_d = \frac{g v_3^2}{2g(\rho_m - \rho)} = \frac{10^3 \cdot 2,129^2}{2 \cdot 9,81(13600 - 1000)} = 18,3 \text{ mm}$$

### III.7 Théorème d'Euler

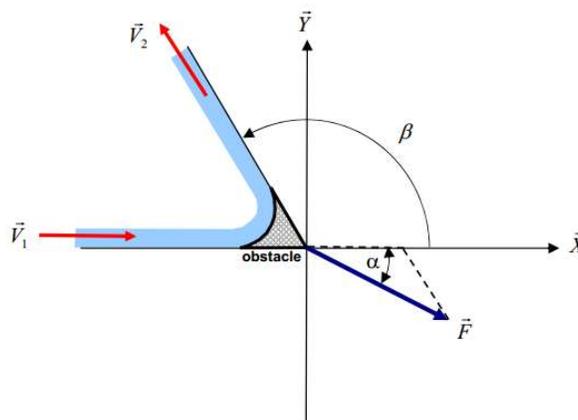
Le théorème d'Euler résulte de l'application du théorème de quantité de mouvement à

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= m\gamma = m \frac{d\vec{V}}{dt} \\ \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} dt &= m dv \Rightarrow \int_t \sum \vec{F}_{ext} dt = \int_v m dv \\ \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} &= \frac{m}{\Delta t} \Delta \vec{V} \end{aligned}$$

l'écoulement d'un fluide :  $\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = Q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$

#### Exemple :

La figure ci-dessous représente un jet d'eau horizontal qui frappe un obstacle à un débit massique  $Q_m=2 \text{ kg/s}$ . L'obstacle provoque une déflexion du jet d'un angle  $\beta=120^\circ$ .



On désigne par  $V_1$  la vitesse d'écoulement de l'eau en entrée de l'obstacle. Elle est portée par l'axe  $X$ ,  $V_2$  désigne la vitesse d'écoulement de l'eau en sortie de l'obstacle. Elle est portée par une direction inclinée de l'angle  $\beta = 120^\circ$  par rapport à l'axe  $X$ .

On admettra que  $V_1 = V_2 = 3$  m/s.

1) En appliquant le théorème d'Euler, donner l'expression vectorielle de la force  $F$  exercée par le liquide sur l'obstacle en fonction de  $Q_m$ ,  $V_1$  et  $V_2$  ensuite calculer ses composantes  $F_x$  et  $F_y$ .

2) Quel est son angle d'inclinaison  $\alpha$  ?

**Réponse :**

1) la force  $F$  exercée par le liquide sur l'obstacle :

$$\sum \vec{F}_{ext} = Q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1) \Rightarrow \vec{F} = Q_m (\vec{V}_2 - \vec{V}_1)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = Q_m \left\| \vec{V}_1 \right\| \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \begin{cases} F_x = Q_m \cdot \left\| \vec{V}_1 \right\| \cdot (1 - \cos \beta) \\ F_y = -Q_m \cdot \left\| \vec{V}_1 \right\| \cdot \sin \beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = 2.3 \cdot (1 - (-0,5)) = 9N \\ F_y = -2.3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -5,19N \end{cases}$$

2) L'angle d'inclinaison  $\alpha$  :

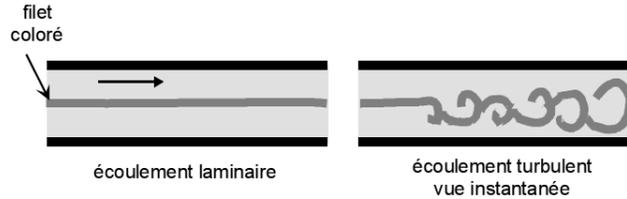
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-5,19}{9} = -0,5773$$

$$\Rightarrow \alpha = -30^\circ$$

## Chapitre IV : Dynamique des fluides incompressibles réels

### IV.1 Régimes d'écoulement

En écoulement de fluide réel, on distingue deux grands types de comportement. Chacun de ces comportements caractérise un régime d'écoulement particulier : le régime *laminaire* et le régime *turbulent*. Les expériences réalisées par Reynolds (1883) lors de l'écoulement d'un liquide dans une conduite cylindrique rectiligne dans laquelle arrive également un filet de liquide coloré, ont montré l'existence de ces deux régimes d'écoulement.



En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un nombre sans dimension appelé nombre de *Reynolds* et donné par :

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} \quad (\text{IV.1})$$

Avec :

$\rho$  : masse volumique du fluide,  $V$  : vitesses moyenne,  $D$  : diamètre de la conduite,  $\mu$  : viscosité dynamique du fluide,  $\nu$  : viscosité cinématique.

Dans le cas général, Re peut s'écrire de la manière suivante :

$$\text{Re} = \frac{\rho V^2 L}{\mu V} = \frac{\rho V L}{\mu} \quad (\text{IV.2})$$

Avec  $L$  : Dimension caractéristique (en  $m$ ) du phénomène :

- diamètre pour une conduite (de section circulaire le plus souvent), diamètre hydraulique,
- dimension jugée la plus pertinente pour une conduite ou un obstacle de forme quelconque,
- abscisse depuis le bord d'attaque pour une plaque plane ou un profil d'aile.

Le nombre de Reynolds est donc **le rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses**.

- ❖ Aux faibles valeurs du Reynolds ( $Re < 2000$ ), la viscosité a une grande importance par rapport aux forces d'inertie, l'écoulement est dit : **laminaire**.
- ❖ Aux fortes valeurs du Reynolds ( $Re > 3000$ ), les forces d'inertie sont si importantes que l'écoulement devient **turbulent** :
  - $3000 < Re < 10^5$  l'écoulement est turbulent **lisse**.
  - $Re > 10^5$  l'écoulement est turbulent **rugueux**.
- ❖ Aux valeurs intermédiaires du Reynolds ( $2000 < Re < 3000$ ), les forces d'inertie sont prépondérantes, on parle de régime **transitoire**.

**Exemple :**

Déterminer le régime d'écoulement dans une conduite de 3 cm de diamètre pour:

- 1) De l'eau circulant à la vitesse  $v=10,5$  m/s et de viscosité cinématique  $1.10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s
- 2) Du fuel lourd à 50 °C circulant à la même vitesse (Viscosité cinématique  $110.10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s
- 3) Du fuel lourd à 10 °C circulant à la même vitesse (Viscosité cinématique  $290.10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s.

**Réponse :**

- 1) On calcule le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

$$Re = \frac{10,5 \cdot 0,03}{1.10^{-6}} = 315000 > 100000$$

donc l'écoulement est turbulent rugueux.

$$2) Re = \frac{10,5 \cdot 0,03}{110.10^{-6}} = 2863,63 : 2000 < Re < 100000$$

L'écoulement est turbulent lisse

$$3) Re = \frac{10,5 \cdot 0,03}{290.10^{-6}} = 1086,2 < 2000$$

Donc l'écoulement est laminaire.

## IV.2 Analyse dimensionnelle, théorème de Vashy-Buckingham

L'analyse dimensionnelle est un outil théorique servant à interpréter les problèmes à partir des dimensions des grandeurs physiques mises en jeu, c'est-à-dire de leur nature essentielle : longueur, durée, masse, intensité électrique, etc. L'analyse dimensionnelle repose sur le fait que ne peuvent être comparées que des grandeurs ayant la même dimension ; en effet, il est possible de comparer deux longueurs

entre elles, mais pas une longueur et une masse par exemple. Mathématiquement, cette déclaration est fondée sur le théorème de **Vaschy-Buckingham**. L'analyse dimensionnelle est ainsi à la base des systèmes d'unités naturelles. L'analyse dimensionnelle est utilisée particulièrement en physique, en chimie et en ingénierie, elle permet notamment de vérifier a priori la possibilité d'une équation ou du résultat d'un calcul et elle est utile pour formuler des hypothèses simples sur les grandeurs qui gouvernent l'état d'un système physique avant qu'une théorie plus complète ne vienne valider ces hypothèses.

**Enoncé du théorème de Vaschy-Buckingham :**

Soit  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  des quantités physiques, dont les (p) premières sont rapportées à des unités fondamentales distinctes et les (n-p) dernières à des unités dérivées des (p) unités fondamentales (par exemple  $a_1$  peut être une longueur,  $a_2$  une masse,  $a_3$  un temps, et les (n-3) autres quantités  $a_4, a_5, \dots, a_n$  seraient des forces, des vitesses, etc.; alors  $p=3$ ). Si entre ces quantités il existe une relation :  $F(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0$  qui subsiste quelles que soient les grandeurs arbitraires des unités fondamentales, cette relation peut se ramener à une autre en (n-p) paramètres au plus, soit :  $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-p}) = 0$ .

Les paramètres  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-p}$  étant des fonctions monômes de  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  (c'est-à-dire :

$$x_i = A.a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}.a_3^{\alpha_3} \dots a_n^{\alpha_n} . \quad \text{avec } \alpha_i \in \mathbb{R}$$

**Constitution du système d'équations :**

Dans la mesure où il y a (n) grandeurs et (p) unités, on écrit le système de (p) équations linéaires algébriques avec (n) variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots a_{pn}x_n = b_p \end{array} \right. \quad \text{(IV.3)}$$

Le système (IV.3) peut aussi s'écrire sous la forme matricielle suivante :  $A.x=b$  avec :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} \dots a_{pn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_p \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

### Détermination des termes $\pi$

$$\begin{cases} \pi_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_p^{a_{1p}} x_{p+1} \\ \pi_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \dots x_p^{a_{2p}} x_{p+2} \\ \cdot \\ \pi_p = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \dots x_p^{a_{pp}} x_{p+n-p} \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Les nombres  $(\pi_1, \dots, \pi_{n-p})$  sont sans dimensions ( $M_0, L_0, T_0$ ). On identifie les dimensions des paramètres  $x_1, \dots, x_p$ , et on résout le système des  $(n-p)$  équations linéaires afin de trouver les nombres  $(\pi_1, \dots, \pi_{n-p})$ .

### Exemple :

Le volume  $V$  d'une sphère ne dépend que de son rayon  $R$ . Il vérifie donc une équation  $f(V, R) = 0$ . Les deux variables sont dimensionnées  $[V] = [L]^3$  et  $[R] = [L]$ . L'équation a deux variables  $V$  et  $R$  et une seule unité  $[L]$ . D'après le théorème, il existe une équation  $f(A, R) = 0$ . Où  $A$  est une constante sans dimension.

Pour trouver la fonction  $f$ , il faut trouver un couple  $(\alpha, \beta)$  tel que  $([V]^\alpha \cdot [R]^\beta = 1)$ .

Soit :  $[L]^{3\alpha} \cdot [L]^\beta = [L]^0$  On peut prendre  $(\alpha, \beta) = (1, -3)$  la fonction  $f$  s'écrit alors  $f\left(\frac{V^1}{R^3}, R\right) = 0$ .

On retrouve le résultat  $\frac{V}{R^3} = A$  est une constante sans dimension (dont la valeur est  $\frac{3\pi}{4}$ ).

### IV.3 Théorème de Bernoulli appliqué à un fluide réel avec pertes de charges

Lors d'un écoulement d'un fluide réel il peut y avoir des pertes de charges entre les points (1) et (2) : dans le cas d'une installation ne comportant pas de machine hydraulique (pompe ou turbine) on écrira la relation de Bernoulli sous la forme :

$$\frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) + (P_2 - P_1) = -\Delta P \quad (\text{IV.6})$$

$\Delta P$  : représente l'ensemble des pertes de charges entre (1) et (2) exprimées en Pa.

Les pertes de charges entre le point 1 et 2 d'un circuit hydraulique ont pour origine :

- Les frottements du fluide sur la paroi interne de la tuyauterie ; on les appelle pertes de charge *régulières, systématiques, linéaires*. Ce type de pertes de charges est donné par la relation suivante :

$$\Delta P = \lambda \frac{\rho V^2}{2} \frac{L}{D} \quad (\text{IV.7})$$

- La résistance à l'écoulement provoquée par les modifications de parcours (coudes, élargissements ou rétrécissement de la section, organes de réglage, etc.) ; ce sont les pertes de charge *singulières*. Ce type de pertes de charges existe même pour le cas d'un fluide parfait. Elles sont données par l'équation suivante :

$$\Delta P = K \frac{\rho V^2}{2} \quad (\text{IV.8})$$

### IV.3.1 Coefficient de pertes de charges linéaire

Le calcul des pertes de charges linéaire repose entièrement sur la détermination du coefficient  $\lambda$ . Pour un écoulement laminaire, il a été démontré que le coefficient  $\lambda$  est uniquement fonction de Re :

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (\text{IV.9})$$

Pour un écoulement turbulent, les phénomènes d'écoulement sont beaucoup plus complexes et la détermination du coefficient de perte de charge résulte des mesures expérimentales. C'est ce qui explique la diversité des formules anciennes qui ont été proposées pour sa détermination. La formule de *Colebrook et White* est actuellement considérée comme celle qui traduit le mieux les phénomènes d'écoulement en régime turbulent. Elle est présentée sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right) \quad (\text{IV.10})$$

Avec :

$\varepsilon$  : rugosité de la surface interne de la conduite (mm).

L'utilisation directe de cette formule demanderait, du fait de sa forme implicite, un calcul par approximations successives ; on emploie aussi en pratique des représentations graphiques (Diagramme de Moody).

**Exemple :**

Une huile de densité 0,850 et de viscosité dynamique 0,10104 Pa.s circule dans un tuyau de fonte lisse de longueur  $L = 3000$  m, de diamètre  $D = 30$  cm, avec un débit  $Q = 44$  l/s. Quelle est la perte de charge dans ce tuyau.

**Réponse :**

La vitesse moyenne est donnée par :

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 44 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,3^2} = 0,622 \text{ m/s}$$

Le nombre de Reynolds :

$$\text{Re} = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{850 \cdot 0,622 \cdot 0,3}{0,10104} = 1570$$

Donc l'écoulement est laminaire.

Le coefficient de perte de charge linéaire :

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = \frac{64}{1570} = 0,04076$$

la perte de charge :

$$\Delta P = \lambda \frac{\rho V^2}{2} \frac{L}{D} = 0,04076 \frac{850 \cdot 0,622^2}{2} \cdot \frac{3000}{0,3} = 67027 \text{ Pa}$$

**IV. 3.2 Coefficient de pertes de charges singulières**

Le coefficient  $K$  dépend de la nature de la résistance locale (module de perte de charges). La valeur de  $K$  peut être constante comme pour le cas d'une entrée d'une conduite, ou bien fonction du type d'équipement et du diamètre du réseau, c'est le cas d'un coude par exemple.

**IV.4 Théorème de Bernoulli généralisé**

Lors d'un écoulement d'un fluide réel entre les points (1) et (2) il peut y avoir des échanges d'énergie entre ce fluide et le milieu extérieur :

- Par travail à travers une machine, pompe ou turbine ; la puissance échangée étant  $P_u$ .
- Par pertes de charges dues aux frottements du fluide sur les parois ou les modifications de parcours.
- Le théorème de Bernoulli s'écrit alors sous la forme générale :

$$W_{12} = \frac{(P_2 - P_1)}{\rho} + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1) + g\Delta P + \sum_1^2 K \frac{v^2}{2} \quad (\text{IV.11})$$

avec :

$W_{12}$  : travail échangé entre le système (1 kg de fluide) et le milieu extérieur par l'intermédiaire de l'arbre de la machine:

$W_{12} > 0$  si le fluide reçoit de l'énergie de la machine (pompe),

$W_{12} < 0$  si le fluide fournit de l'énergie à la machine (turbine),

$W_{12} = 0$  s'il n'y a pas de machine entre (1) et (2),

$K$  : le coefficient de pertes de charge singulières,

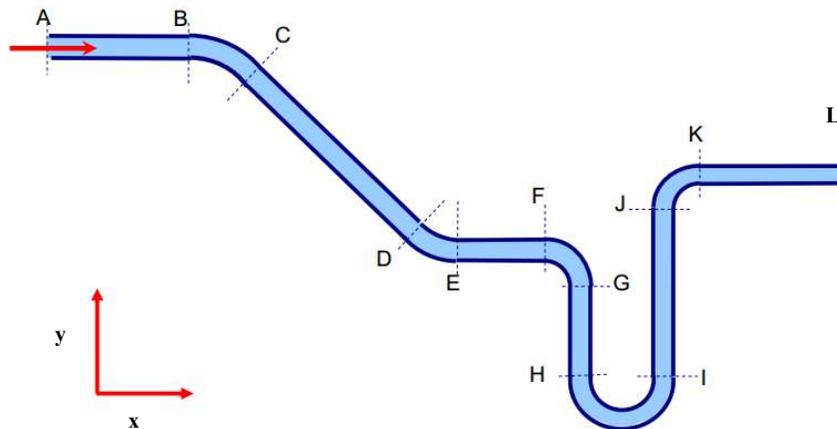
$$g\Delta P + \sum_1^2 K \frac{v^2}{2} : \text{La perte de charge totale.}$$

La puissance dissipée s'exprime donc par la relation :

$$P_d = \rho g \Delta P Q_v \quad [W]$$

### Exemple :

De l'huile ayant une viscosité dynamique  $\mu = 0,7 \text{ Pa.s}$  et une densité  $d=0,896$  est pompée d'un point A vers un point L.



Elle circule dans une canalisation de diamètre  $d=100 \text{ mm}$  formée des six tronçons rectilignes suivants:

\* AB de longueur 6 m,

\* CD de longueur 12 m,

\*EF de longueur 5 m,

\*GH de longueur 4 m,

\* IJ de longueur 7 m,

\* KL de longueur 8 m.

La canalisation est équipée :

\*de deux coudes à  $45^\circ$  : BC, DE: ayant chacun un coefficient de perte de charge  $K_{\text{coude } 45^\circ} = 0,2$

\*de deux coudes à  $90^\circ$  : FG, JK: ayant chacun un coefficient de perte de charge  $K_{\text{coude } 90^\circ} = 0,3$

\*d'un coude à 180° HI: ayant un coefficient de perte de charge  $K_{\text{coude } 180}=0,4$ .

La pression d'entrée est  $P_A=3$  bars. La conduite est supposée horizontale et transporte un débit volumique  $Q_v=2.5$  l/s. Travail demandé :

- 1) Calculer la vitesse d'écoulement  $V$  en m/s.
- 2) Calculer le nombre de Reynolds.
- 3) déduire la nature de l'écoulement.
- 4) Déterminer le coefficient de perte de charges linéaire  $\lambda$ .
- 5) Calculer les pertes de charges linéaires  $\Delta P_{\text{linéaire}}$ .
- 6) Calculer les pertes de charges singulières  $\Delta P_{\text{singulière}}$ .
- 7) Déterminer la pression de sortie  $P_L$ .
- 8) Quelle sera la pression de sortie  $P_L'$  si le débit volumique  $Q_v$  atteint 5 L/s.

**Réponse :**

- 1) la vitesse d'écoulement :

$$V = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,1^2} = 0,318 \text{ m/s}$$

- 2) le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{896 \cdot 0,318 \cdot 0,1}{0,7} = 40,7$$

- 3)  $Re < 2000$  : il s'agit d'un écoulement laminaire.

- 4) le coefficient de perte de charges linéaire  $\lambda$  :

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{40,7} = 1,57$$

- 5) les pertes de charges linéaires  $\Delta P_{\text{linéaire}}$  :

$$\Delta P_{\text{linéaire}} = \lambda \frac{\rho V^2}{2} \frac{L}{D} = 1,57 \frac{896 \cdot 0,318^2}{2} \cdot \frac{42}{0,1} = 29873,16 \text{ Pa}$$

- 6) les pertes de charges singulières  $\Delta P_{\text{singulière}}$  :

$$\Delta P_{\text{singulière}} = K \cdot \frac{\rho V^2}{2} = (2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 0,4) \cdot \frac{896 \cdot 0,318^2}{2} = 63,42 \text{ Pa}$$

- 7) la pression de sortie  $P_L$  :

$$P_L = P_A - \Delta P_{\text{linéaire}} - \Delta P_{\text{singulière}} = 3 - 0,29873 - 0,00063 = 2,7 \text{ bar}$$

- 8) la pression de sortie  $P_L'$  si le débit volumique  $Q_v$  atteint 5 L/s :

$$P_L' = P_A - 4(\Delta P_{\text{linéaire}} + \Delta P_{\text{singulière}}) = 3 - 4(0,29873 + 0,00063) = 1,8 \text{ bar}$$

## **Bibliographie**

- [1] Notions de mécanique des fluides, Riadh Ben hamouda, Centre de Publication Universitaire, Tunis 2008.
- [2] Mécanique des fluides. Cours, exercices et problèmes corrigés. Classes préparatoires- Premier cycle universitaire. Christian Grossetête -1999.
- [3] Mécanique des fluides incompressibles, Laïd Messaoudi, Université de Batna 2010.
- [4] Cours de Mécanique des fluides, J.Roussel, C.P.I.2 - Chem.I.St2 : 2005-2006.
- [5] Mécanique appliquée, P.Agati-N.Mattera, DUNOD, Paris 1996
- [6] Introduction à la mécanique des fluides, Arezki Smaïli-Christian Masson, Université du Québec 2003.
- [7] Mécanique des Fluides, Stéphane Ravier -Matthieu Rigaut, Ecole Normale Supérieure de Lyon, janvier 2000.
- [8] Mécanique des fluides théories et applications, Elguerri Mohamed, Université Ibn Khaldoun de Tiaret 2014.