Corrigé type de la série des exercices 1
Optimisation sans contraintes -LMD- S5

Solution de l'exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Etude de la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$?
   Etude sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$: la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, car quotient de fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas.
   Etude en $(0,0)$: pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Passons on coordonées polaires : $x = 0 + r\cos(\theta), y = 0 + r\sin(\theta)$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} r^3\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) \\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} r^3\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) \\ &= 0 = f(0,0) \end{aligned}$$

   Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3x^2y^2(x^2+y^2) - 2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{2x^3y(x^2+y^2) - 2x^3y^3}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

   Pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(0,0) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ \lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
   On a déjà vérifie la continuité et la dérivabilité de f, il reste d'étudier la continuité des dérivées partielles, on a

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^2+3x^2y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   $\partial_x f$ est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \partial_x f(x,y) = \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{r^6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)(\cos^2(\theta)+3\sin^2(\theta))}{r^4} = 0 = \partial_x f(0,0)$$

[1] f.sidiali@univ-batna2.dz

Par conséquent $\partial_x f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. On a aussi,

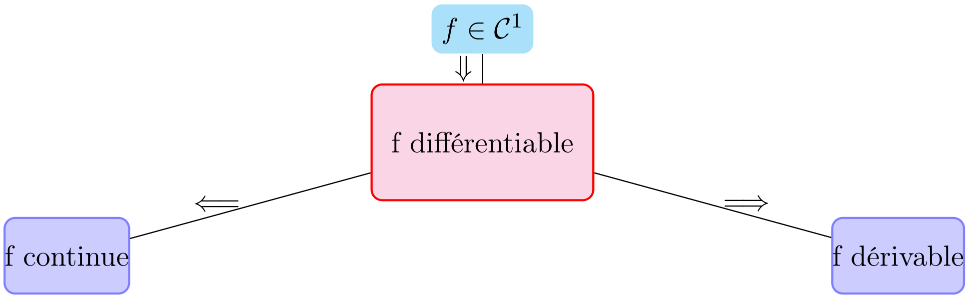
$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$\partial_y f$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \partial_y f(x,y) = \lim_{r \longrightarrow 0} \frac{2r^6 \cos^5(\theta) \sin(\theta)}{r^4} = 0 = \partial_y f(0,0)$$

donc $\partial_y f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par conséquent la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. On a la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.
   En résumé, soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ et $p > 1$, on a le schéma suivant :



Solution de l'exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, de plus

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{r \longrightarrow 0} r^2 \sin^4(\theta) = 0 = f(0,0) \end{aligned}$$

   Par conséquent f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$; calculer ensuite $\nabla f(0,0)$.
3. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \\ \dfrac{4y^3(x^2+y^2) - 2y^5}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

   Pour $(x,y) = (0,0)$, on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \partial_x f(0,0) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
On remarque que f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2\backslash(0,0))$, alors elle est différentiable sur $\mathbb{R}^2\backslash(0,0)$, il reste d'étudier la différentiabilité au point $(0,0)$.
Rappel. Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouvert D de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in D$ un point lequel f est dérivable. f est différentiable en (x_0, y_0) si et seulement si :

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - h\partial_x f(x_0,y_0) - k\partial_y f(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Etude en $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h\partial_x f(0,0) - k\partial_y f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{k^4}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{r\longrightarrow 0} \frac{(r\sin(\theta))^4}{r^3} = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

5. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
Il reste d'étudier la continuité des dérivées partielles au point (0,0), on a

$$\left|\frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\frac{2r^5\cos(\theta)\sin^4(\theta)}{r^4}\right| \leq 2r \xrightarrow[r\longrightarrow 0]{} 0,$$

et

$$\left|\frac{4y^3x^2+2y^5}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\frac{4r^5\cos^2(\theta)\sin^3(\theta)+2r^5\sin^5(\theta)}{r^4}\right| \xrightarrow[r\longrightarrow 0]{} 0,$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \partial_x f(x,y) = 0 = \partial_x f(0,0), \\ \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \partial_y f(x,y) = 0 = \partial_y f(0,0)\end{aligned}$$

Par conséquent $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues au point (0,0), alors la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Solution de l'exercice 3

Soit la fonction de deux variables

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4y^2x^3 - y^5 - 2x^7}{3x^4+2y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soit (v_1, v_2) un vecteur unitaire du plan alors $(v_1, v_2) \neq (0,0)$, la dérivée de f en (x_0, y_0) selon la direction $v = (v_1, v_2)$ est

$$\partial_v f(x_0,y_0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(x_0+v_1h, y_0+v_2h) - f(x_0,y_0)}{h}$$

alors

$$\begin{aligned}\partial_v f(0,0) = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(v_1h, v_2h) - f(0,0)}{h} &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{4(v_2h)^2(v_1h)^3 - (v_2h)^5 - 2(v_1h)^7}{(3(v_1h)^4 + 2(v_2h)^4)h} \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{4v_2^2v_1^3 - v_2^5 - 2v_1^7h^2}{3v_1+2v_2^4} = \frac{4v_2^2v_1^3 - v_2^5}{3v_1+2v_2^4}.\end{aligned}$$

On conclut que la dérivée directionnelle $\partial_v f(0,0)$ existe et égale $\partial_v f(0,0) = \dfrac{4v_2^2 v_1^3 - v_2^5}{3v_1 + 2v_2^4}$.

Solution de l'exercice 4

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = e^{2x+y}$, soit $a = (1,2)$, $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

— On a $\|v\|_2^2 = \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right)^2 = 1$, alors $\|v\|_2 = 1$, donc v est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$.

— On a la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, d'ou la dérivé de f en (x_0, y_0) selon la direction $v = (v_1, v_2)$ est

$$\partial_v f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)^\top v = \partial_x f(x_0, y_0) v_1 + \partial_y f(x_0, y_0) v_2.$$

On calcule le gradient de f,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x+y} \\ e^{2x+y} \end{pmatrix}$$

alors,

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} 2e^4 \\ e^4 \end{pmatrix}$$

donc

$$\partial_v f(1,2) = \nabla f(1,2)^\top v = 2e^4 v_1 + e^4 v_2 = 2e^4 \frac{1}{\sqrt{2}} + e^4 \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3e^4}{\sqrt{2}}.$$

Solution de l'exercice 5

Rappel (Développement limité à l'ordre 2 dans $\mathbb{R}^p$) Soit $f : D \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(D)$. Alors au voisinage de $x_0 \in D$ on a

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^T \nabla f(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T Hess_f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_2\|^2).$$

1. $f(x,y) = \sin x . \sin y$, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, au voisinage $(x_0, y_0) = (0,0)$, on a

$$f(x,y) = f(0,0) + (x,y)\nabla f(0,0) + \frac{1}{2}(x,y) Hess_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On a $f(0,0) = 0$.
On calcule le gradient de f,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x . \sin y \\ \sin x . \cos y \end{pmatrix}$$

alors,

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On calcule la matrice Hessienne de f,

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix}$$

alors,

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix}$$

d'ou

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve finalement

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = xy.$$

2. $f(x,y) = 1 + x + y + x^2 - xy + y^2$, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, alors au voisinage $(x_0, y_0) = (0,0)$ on a :

$$f(x,y) = f(0,0) + (x,y)\nabla f(0,0) + \frac{1}{2}(x,y)Hess_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On a $f(0,0) = 1$.
On calcule le gradient de f,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + 2x - y \\ 1 - x + 2y \end{pmatrix}$$

alors,

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule la matrice Hessienne de f,

$$Hess_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

alors,

$$Hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On trouve finalement

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + (x,y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix} \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2}(2x^2 - xy - xy + 2y^2) \\ &= 1 + x + y + x^2 - xy + y^2 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 6

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \langle c, x \rangle + b \qquad\qquad c, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On prend $c = (c_1, ..., c_n)$, $x = (x_1, ...x_n)$, alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + b$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix} = c, \text{ et } \nabla^2 f(x) = 0.$$

2.

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$x \longmapsto g(x) = Lx + b \qquad L \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \text{ et } b \in \mathbb{R}^m.$$

On prend $L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$ alors

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} L_{11}x_1 + L_{12}x_2 + ... + L_{1n}x_n + b_1 \\ . \\ . \\ L_{m1}x_1 + L_{m2}x_2 + ... + L_{mn}x_n + b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ . \\ . \\ g_m(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

alors

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} g_1(x) & \partial_{x_2} g_1(x) & ... & \partial_{x_n} g_1(x) \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ \partial_{x_1} g_m(x) & \partial_{x_2} g_m(x) & ... & \partial_{x_n} g_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & ... & L_{1n} \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ L_{m1} & L_{m2} & ... & L_{mn} \end{pmatrix} = L$$

On obtient

$$Jg(x) = L$$

3.

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c \qquad A \in M_n(\mathbb{R}),\ b, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } c \in \mathbb{R}.$$

On va calculer $\nabla f(x)$,
On a la fonction f ($f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$) est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, d'aprés le développement de Taylor d'ordre 1, on a :

$$f(x+h) = f(x) + h^T \nabla f(x) + o(\|h\|), \tag{1}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \frac{1}{2}\langle A(x+h), (x+h)\rangle + \langle b, (x+h)\rangle + c \\ &= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, x\rangle + \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle + \langle b, x\rangle + \langle b, h\rangle + c \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle + c}_{f(x)} + \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle + \frac{1}{2}\langle A^T x, h\rangle + \langle b, h\rangle + \frac{1}{2}\underbrace{\langle Ah, h\rangle}_{o(\|h\|)} \end{aligned}$$

Et comme $|\langle Ah, h\rangle| \leq \|A\|_2 \|h\|^2$, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{1}{2}\langle (A + A^T)x + b, h\rangle + o(\|h\|) \\ &= f(x) + h^T(\frac{1}{2}(A + A^T)x + b) + o(\|h\|) \end{aligned} \tag{2}$$

D'aprés (1) et (2), on obtient $\nabla f(x) = \dfrac{1}{2}(A + A^T)x + b$, si A est symétrique $\nabla f(x) = Ax + b$.
On calcule la Hessienne de f, d'aprés (2), on a

$$\begin{aligned}\nabla f(x+h) &= \frac{1}{2}A(x+h) + \frac{1}{2}A^T(x+h) + b \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)x + b}_{\nabla f(x)} + \frac{1}{2}(A + A^T)h \\ &= \nabla f(x) + \frac{1}{2}(A + A^T)h.\end{aligned}$$

et donc $Hess(f)(x) = \nabla^2 f(x) = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$. On en déduit que si A est symétrique, $Hessf(x) = A$.