Sidi ali Fatima Zohra[1]

Corrigé type TD 1
Analyse 3

Solution de l'exercice 1

a) On a

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \frac{1}{k+3} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \frac{1}{k+3} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} \frac{1}{k+3} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{1}{k+3} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \frac{1}{k+3},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \frac{1}{k+3} \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} + 1 - \frac{1}{n+2} \right) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+3} \right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)},
\end{aligned}$$

alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

On conclut que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ soit converge et sa somme $S = \frac{1}{4}$.

b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{5^{k-1}} = 5 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{5} \right)^k.$$

La suite de terme $u_n = \left(\frac{2}{5} \right)^n$ est une suite géométrique de raison ($q = \frac{2}{5}$), alors

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{5} \right)^k = u_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{2}{5} \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right).$$

[1]f.sidiali@univ-batna2.dz

Ceci implique que

$$S_n = \frac{10}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{10}{3}.$$

Par conséquent, la $\sum_{n\geq 1}\frac{2^n}{5^{n-1}}$ converge et sa somme $S=\frac{10}{3}$.

c) On a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{3}{(3k+1)(3k+4)} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+....+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)+\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)\\ &= 1-\frac{1}{3n+4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1, \end{aligned}$$

ainsi, la $\sum_{n\geq 0}\frac{3}{(3n+1)(3n+4)}$ converge et sa somme $S=1$.

d) On a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) &= \sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{(k-1)}{k}\frac{(k+1)}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n}\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)+\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln(k))+\sum_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) \end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\sum_{k=2}^{n}(\ln(k-1)-\ln(k)) = \sum_{k=2}^{n}\ln(k-1)-\sum_{k=2}^{n}\ln(k) = \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k)-\sum_{k=2}^{n}\ln(k) = -\ln(n)$$

et

$$\sum_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k)) = \sum_{k=2}^{n}\ln(k+1)-\sum_{k=2}^{n}\ln(k) = \sum_{k=3}^{n+1}\ln(k)-\sum_{k=2}^{n}\ln(k) = -\ln(2)+\ln(n+1).$$

Par conséquent

$$S_n = -\ln(2)+\ln(n+1)-\ln(n) = -\ln(2)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln(2),$$

ainsi, la série $\sum_{n\geq 2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ converge et sa somme $S=-\ln(2)$.

e) On a

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}{(k+2)-(k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1} = -1+\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty, \end{aligned}$$

alors, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$ diverge.

f) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

En utlisant la formule suivante :

$$\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

On pose $x = k+1$ et $y = k$, on déduit que

$$\arctan \frac{1}{k^2+k+1} = \arctan(k+1) - \arctan(k),$$

alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan(n+1) - \arctan(1) = \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

On conclut que, la série $\sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ soit convergente, et sa somme $S = \frac{\pi}{4}$.

Solution de l'exercice 2

1) On a $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{3n+4}{5n+1} = \frac{3}{5} \neq 0$, alors le terme général ne tend pas vers zéro, donc $\sum_{n\geq 0} \frac{3n+4}{5n+1}$ diverge grossièrement.

2) On a $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, alors d'aprés le critère d'équivalence la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ est aussi diverge.

3) On a $\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n^2}$ converge, alors d'aprés le critère d'équivalence la série $\sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est aussi converge.

4) On a $\lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)} = 1 \neq 0$, on remarque que le terme général ne tend pas vers zéro, donc $\sum_{n\geq 1} e^{\sin\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)}$ diverge grossièrement.

5) On a $\frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1} = \frac{n}{2n^3} \frac{1+\frac{\sqrt{n}}{n}}{1+\frac{1}{2n^3}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, alors d'aprés le critère d'équivalence la série $\sum_{n\geq 0} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3+1}$ ainsi converge.

Solution de l'exercice 3

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

La séries de Riemann : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$

a) On a :

$$\sin \frac{1}{n^2} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann ($\alpha = 2$) convergente, d'aprés le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$ est aussi converge.

b) Puisque

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}, \text{ alors } \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Riemann ($\alpha = \frac{3}{2}$) convergente, d'aprés le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ ainsi converge.

c) On a :

$$\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1+(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, alors d'aprés le critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ aussi diverge.

d) On a :

$$\frac{2^n+n}{2^n.n} = \frac{2^n}{2^n}\frac{1+\frac{n}{2^n}}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

La série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, alors d'aprés le critère d'équivalence, $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n+n}{2^n.n}$ aussi diverge.

Solution de l'exercice 4

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé.

La séries de Bertrand : $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si : $\begin{cases} \alpha > 1, \\ \text{où} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{cases}$

a) On a :

$$\frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{\ln n}+1}{\frac{n^{\frac{3}{2}}}{\ln n}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Bertrand ($\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = -1$) convergente, d'aprés le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} \frac{1+\ln n}{n\sqrt{n}}$ aussi converge.

b) On a :

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n-1}} = \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}} \underset{}{\overset{+\infty}{\sim}} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ est une série de Bertrand ($\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = -1$) convergente, d'aprés le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3+n-1}}$ aussi converge.

c) On a :

$$\frac{\ln n + (\ln n)^3}{n^3+\sqrt{n}} = \frac{\ln n^3}{n^3} \frac{\frac{1}{\ln n^2}+1}{1+\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3(\ln n)^{-3}}.$$

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3(\ln n)^{-3}}$ est une série de Bertrand ($\alpha = 3$ et $\beta = -3$) convergente, d'aprés le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n + (\ln n)^3}{n^3+\sqrt{n}}$ ainsi converge.

d) On a :

$$\frac{n+3}{n(\ln n)^2+3} = \frac{n}{n(\ln n)^2} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{3}{n(\ln n)^2}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\ln n)^2}.$$

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(\ln n)^2}$ est une série de Bertrand ($\alpha = 0$ et $\beta = 2$) divergente, d'aprés le critère d'équivalence des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} \frac{n+3}{n(\ln n)^2+3}$ diverge.

Solution de l'exercice 5

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes positifs.

Critère d'Alembert : $\lim_{n\longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 0$, alors
si $l < 1$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge,
si $l > 1$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge,
si $l = 1$, on peut pas conclure.

Critère de Cauchy : $\lim_{n\to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l > 0$, alors
si $l < 1$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge,
si $l > 1$, $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ diverge,
si $l = 1$, on peut pas conclure.

a) $u_n = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-n^2}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\longrightarrow +\infty} \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{-n} = e^{-\alpha},$$

- Si $\alpha > 0$, d'aprés **le critère de Cauchy** : $\sum u_n$ converge.
- Si $\alpha < 0$, d'aprés **le critère de Cauchy** : $\sum u_n$ diverge.

- Si $\alpha = 0$, **le critère de Cauchy** ne donne rien, mais on a $u_n = 1$, le terme général ne tend pas vers zéro, donc la série est divergente.

b) $u_n = \dfrac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{3^{2^{n+1}}}{2^{3^{n+1}}}\frac{2^{3^n}}{3^{2^n}}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} 3^{2^{n+1}-2^n}2^{3^n-3^{n+1}}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} 3^{2^n}2^{-2.3^n}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{2^n\ln 3-2.3^n\ln 2} = 0,\end{aligned}$$

D'aprés **le critère d'Alembert** : $\sum u_n$ converge.

c) $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n!}$

On a $\ln n! \leq n\ln n$ alors, $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n!} \leq \dfrac{n\ln n}{n!} \leq \dfrac{n^2}{n!} = v_n$.
D'autre part :

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0\end{aligned}$$

D'aprés **le critère d'Alembert** : $\sum v_n$ converge et d'aprés le critère d'équivalence la série $\sum u_n$ est aussi convergente.

d) $u_n = (\cos(1/n))^{n^3}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{(\cos(1/n))^{n^3}} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}(\cos(1/n))^{n^2}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{n^2\ln(\cos(1/n))}.\end{aligned}$$

On fait le changement de variable $\frac{1}{n} = x$, on trouve :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{n^2\ln(\cos(1/n))} = \lim_{x\longrightarrow 0} e^{\left(\dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}\right)}$$

On applique la règle de l'Hôpital deux fois, on obtient :

$$\lim_{x\longrightarrow 0} e^{\left(\dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}\right)} = \lim_{x\longrightarrow 0} e^{\left(\dfrac{\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}}{2x}\right)} = e^{\frac{-1}{2}}.$$

On conclut que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{u_n} = e^{\frac{-1}{2}} < 1$, alors d'aprés **le critère de Cauchy** : $\sum u_n$ converge.

e) $u_n = \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)...(1+a^n)}(a>0)$.

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{a^{n+1}}{(1+a)...(1+a^n)(1+a^{n+1})}\frac{(1+a)...(1+a^n)}{a^n} \qquad = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{a}{1+a^{n+1}}$$

- Si $0<a<1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{a}{1+a^{n+1}} = a$ d'aprés **le critère d'Alembert** $\sum u_n$ converge.
- Si $\alpha>1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{a}{1+a^{n+1}} = 0$ d'aprés **le critère d'Alembert** $\sum u_n$ converge.
- Si $a=1$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{1}{1+a^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$ d'aprés **le critère d'Alembert** $\sum u_n$ converge.

f) $u_n = n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{1}{2^k}\right)$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{(n+1)!\prod_{k=1}^{n+1}\sin\left(\frac{1}{2^k}\right)}{n!\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{2^k}\right)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(n+1)\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 0.$$

D'aprés **le critère d'Alembert** ,$\sum u_n$ converge.

g) $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n} = 0,$$

alors, d'aprés **le critère de Cauchy** $\sum u_n$ converge.

Solution de l'exercice 6

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série alternée.

Critère de Leibniz : Si la suite$(\lvert u_n\rvert)_n$est décroissante, et $\lim_{n\to+\infty}\lvert u_n\rvert = 0$, alors, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

1) Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{1+n^\alpha}$.

On a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0, \\ \pm\frac{1}{2} & \text{si } \alpha = 0, \\ \pm 1 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$$

On trouve :

- Pour $\alpha \le 0$ la série $\sum u_n$ est divergente.
- Pour $\alpha > 1$, on a $\lvert u_n\rvert = \dfrac{1}{1+n^\alpha} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$, et $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge, donc la série $\sum u_n$ converge absolument.
- Pour $0<\alpha<1$, on a $\lvert u_n\rvert = \dfrac{1}{1+n^\alpha} \overset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha}$, et $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge, donc la série $\sum u_n$ pas absolument converge, mais d'autre part on a $(\lvert u_n\rvert)_n$ est décroissante et $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\lvert u_n\rvert = 0$, d'aprés **le critère de Leibniz,** $\sum u_n$ converge, par conséquent la série$\sum u_n$ semi-convergente.

2) $u_n = \sin\left(\left(n+\frac{1}{n}\right)\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
On a $|u_n| = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \overset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}$, et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum u_n$ pas absolument converge .

D'autre part on a $(|u_n|)_n$ est décroissante, en effet :

On prend $f(x) = \sin(\pi x)$, d'ou $f'(x) = \pi\cos(\pi x)$, pour $0 < x < \frac{1}{2}$ on a $f'(x) > 0$, donc la suite $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ est décroissante pour $(n > 2)$.

On a aussi $\lim_{n\longrightarrow+\infty} |u_n| = 0$, d'aprés **le critère de Leibniz**, $\sum u_n$ converge, par conséquent la série $\sum u_n$ semi-convergente.

3) $u_n = \frac{(-1)^n}{\tanh(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \pm 1 \neq 0$, alors le terme général ne tend pas vers zéro, donc $\sum \frac{(-1)^n}{\tanh(n)}$ diverge grossièrement.

Solution de l'exercice 7

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes quelconques. On suppose que $u_n = a_n b_n$, avec a_n strictement positif.

Critère d'Abel : Si $\begin{cases} \text{la suite } (a_n)_n \text{est décroissante et tend vers } 0, \\ \text{il exist } M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| \leq M, \end{cases}$ alors, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente.

Soit

1. On va étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\alpha}}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. On prend $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = e^{in\alpha}$.

   - Pour $\alpha \neq 2k\pi$, on a

   $$\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha}\right| = \left|\frac{1-e^{i(n+1)\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right| \leq \frac{2}{|(1-cos\alpha) - i\sin\alpha|} = \frac{2}{\sqrt{(1-cos\alpha)^2 + \sin\alpha^2}}.$$

   On conclut que :

   $$\exists M = \frac{2}{\sqrt{(1-cos\alpha)^2+\sin\alpha^2}}, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq M.$$

   D'autre part on a la suite $(a_n)_n$ décroissante et qui tend vers 0, d'aprés **le critère d'Abel**, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in\alpha}}{n}$ converge.

   - Pour $\alpha = 2k\pi$, on a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, diverge.

2. En déduire la convergence de la série : $\sum_{n\geq 2} \frac{\sin(n\alpha)}{(\ln n)^3}$.

   On prend $a_n = \frac{1}{(\ln n)^3}$ $((a_n)_n$ décroissante et elle tend vers 0) et $b_n = \sin(n\alpha)$.

   $$\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \sin(k\alpha)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{(1-cos\alpha)^2+\sin\alpha^2}} = M.$$

   alors, d'aprés **le critère d'Abel**, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\alpha)}{(\ln n)^3}$ converge.

3. On déduit la convergence de la série : $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{\cos(n)}{n\ln n}$.

On prend $a_n=\dfrac{1}{n\ln n}$ ($(a_n)_n$ décroissante et elle tend vers 0) et $b_n=\cos(n)$.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\cos(k)\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{(1-cos(1))^2+\sin(1)^2}} = M.$$

alors, d'aprés **le critère d'Abel**, la série $\sum\limits_{n\geq 2}\dfrac{\cos(n)}{n\ln n}$ converge.

Solution de l'exercice 8

1) Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

On a

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Comme $\frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$, en utilisant le développement limité de la fonction $x\longmapsto(1+x)^\alpha$ au voisinage de 0 d'ordre 1, on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{2n}+o\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned}$$

- La série $\sum\limits_{n}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente (d'aprés **le critère de Leibniz**).
- La série $\sum\limits_{n}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente.
- La série $\sum\limits_{n} o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ est absolument convergente.

  On conclut que $\sum\limits_{n\geqslant 2}u_n$ soit convergente.

2) Nature de $\sum\limits_{n\geq 1}\ln\left(\dfrac{n^2+(-1)^n n}{n^2+2}\right)$.

On a

$$\ln\left(\frac{n^2+(-1)^n n}{n^2+2}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}\right) = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right).$$

On effectue un développement limité de la fonction $x\longmapsto\ln(1+x)$ au voisinage de 0, on trouve :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n^2+(-1)^n n}{n^2+2}\right) &= \left(\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\left(\frac{2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \frac{(-1)^n}{n}-\frac{5}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

- La série $\sum_{n} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente (d'aprés **le critère de Leibniz**).
- La série $\sum_{n} \frac{1}{n^2}$ est convergente.
- La série $\sum_{n} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente.

  Par conséquent la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

3) Nature de $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos n}{n+2\cos n}$.

On a

$$\frac{\cos n}{n+2\cos n} = \frac{\cos n}{n}\frac{1}{1+2\frac{\cos n}{n}}.$$

On effectue un développement limité de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos n}{n+2\cos n} &= \frac{\cos n}{n}\left(1-\frac{2\cos n}{n}+o\left(\frac{\cos n}{n}\right)\right)\\
&= \frac{\cos n}{n}-\frac{2\cos^2 n}{n^2}+o\left(\frac{\cos^2 n}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

- La série $\sum_{n} \frac{\cos n}{n}$ est convergente (d'aprés **le critère d'Abel**).
- La série $\sum_{n} \frac{\cos^2 n}{n^2}$ est convergente.
- La série $\sum_{n} o\left(\frac{\cos^2 n}{n^2}\right)$ est absolument convergente.

  Par conséquent la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est convergente.

Rappel : Développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0. Soit n un entier, α un réel.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n).\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1}).\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}).\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\ldots\ldots\ldots+x^n+o(x^n).\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\ldots\ldots\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n).\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots\ldots\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots.(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9

On a

$$u_n = \frac{1}{n!}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}, \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n).$$

1. On va étudier la nature de la série $\sum v_n$.
   Soit

$$\begin{aligned}
v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\frac{1}{(n+1)!}(n+1)^{(n+\frac{3}{2})}e^{-(n+1)}}{\frac{1}{n!}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}\right) \\
&= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right) \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

   On a $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$, en utilisant le développement limité de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ au voisinage de 0 d'ordre 2,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right),$$

   on obtient :

$$\begin{aligned}
v_n &= -1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

   Donc la série $\sum v_n$ converge.

2. La série $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge, alors la suite $(\ln(u_n))_n$ converge vers L, donc la suite $(u_n)_n$ aussi converge (par continuité de la fonction exponentielle), et de limite $e^L = C > 0$.
3. On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = C$ et $C > 0$, alors

$$u_n \overset{+\infty}{\sim} C,$$

   donc

$$\frac{1}{n!}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \overset{+\infty}{\sim} C,$$

   par conséquent

$$n! \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{C}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

Substituer cette équivalence dans la formule de de Wallis $\sqrt{\pi} \overset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}(n!)^2}{\sqrt{2n+1}(2n)!}$, on trouve

$$\sqrt{\pi} \overset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{C}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n})^2}{\sqrt{2n+1}(\frac{1}{C}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n})} \overset{+\infty}{\sim} \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{C^2}n^{2n+1}e^{-2n})}{\sqrt{2n+1}(\frac{1}{C}2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n})} \overset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{C\sqrt{2n+1}} \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}C}.$$

Donc

$$C \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

4. On conclut que

$$n! \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

5. Puisque $n!$ tend vers $+\infty$, on a

$$\ln(n!) \overset{+\infty}{\sim} \ln(\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}) \overset{+\infty}{\sim} \ln(\sqrt{2\pi}) + \ln(n^{n+\frac{1}{2}}) + \ln(e^{-n}) \overset{+\infty}{\sim} \ln(\sqrt{2\pi}) + (n+\frac{1}{2})\ln(n) - n \overset{+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Alors

$$\ln(n!) \overset{+\infty}{\sim} n\ln(n).$$

Conclusion :

$$\boxed{\textbf{La formule de Stiriling} : n! \overset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$$

Solution de l'exercice 10

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n)!} + e = 2e,$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!} - 2e &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!} - 2e \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!} - 2e \\ &= e + e - 2e = 0.\end{aligned}$$