COURS D'INITIATION A LA

RECHERCHE OPERATIONNELLE

2ème Année Licence – Département de Génie Industriel –

UNIVERSITE BATNA2

I- Introduction

1. Présentation
   La recherche opérationnelle est un outil d'aide à la décision et c'est une branche qui étudie le traitement mathématique d'un procédé, d'un problème pour en déterminer le but et pour atteindre l'efficacité maximale (Problème de maximisation ou de Minimisation d'une fonction).

2. Objectif du cours
   L'objectif de ce cours de Recherche opérationnelle est d'être initié aux problèmes d'optimisation linéaire telle que l'évaluation d'une fonction permettant de maximiser des profits ou de minimiser des dépenses, d'une entreprise, sous des contraintes exprimées par des inéquations.
   Ce cours se focalisera essentiellement sur la méthode de résolution dite **Algorithme du Simplexe** et ses différentes variantes.
   Nous aborderons aussi, dans ce cours, des exemples de tournées de véhicules connues sous l'appellation du problème de voyageur de commerce et nous expliquerons, à la fin du cours, le problème du sac-à-dos.

3. La Modélisation

   La modélisation en recherche opérationnelle sert à transformer un énoncé d'un problème en un modèle mathématique c.a.d réécrire le problème sous forme d'un système d'équation et d'une fonction objectif.
   Le but primordial est de maximiser un profit ou de minimiser un cout. Ce qui revient à écrire :
   - Min f(x, y)
   - Max f(x, y)

Exemple :
Un restaurateur propose deux types de menus
- Assiette 1 contient : 5 sardines, 2 merlans et 1 rouget et coute 800DA
- Assiette 2 contient : 3 sardines, 3 merlans et 3 rougets et coute 1200DA

Sachant que le restaurateur dispose des quantités suivantes 30 sardines, 24 Merlans et 18 Rougets.

Donnez le modèle mathématique qui permet de maximiser le profit du restaurateur ?

Solution :
Tout d'abord on va résumer cet énoncé dans un tableau puis on passera à la modélisation.

	Assiette1	Assiette 2	Contraintes
Sardine	5	3	30
Merlan	2	3	24
Rouget	1	3	18
Cout	800 DA	1200 DA	

Modélisation

On pose X_1 : Nombre d'assiette 1 , X_2 : Nombre d'assiette 2
Notre Fonction « Objectif » devient :

Max $Z = 800\, X_1 + 1200\, X_2$
Sous les contraintes :

$$\begin{cases} 5\,x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 24 \\ x_1 + 3\,x_2 \leq 18 \end{cases}$$

On sait résoudre ce genre de problème en utilisant la **Méthode du simplexe**

Donc en résumé :

Dans la modélisation d'un problème linéaire, on doit définir :

- Les variables de décision X_1 , X_2 .....
- La fonction « objectif »
- Les contraintes du problème

Exercice

Une entreprise prépare trois types de boites de fruits :

1. Une boite1 qui contient 0.45 kg de dattes, 0.67 kg d'abricots et 0.34 kg de pêches.

2. Une boite2 qui contient 0.56 kg de dattes, 0.34 kg d'abricots et 0.084 kg de pêches.

3. Une boite3 qui contient 0.45 kg de dattes, 0.22 kg d'abricots.

L'entreprise dispose de 33.6 kg de dattes, 25.2 kg d'abricots et de 10.08 kg de pêches. Elle gagne respectivement pour chaque boite 3 DA, 2 DA et 1.5 DA.

- Donnez **le modèle mathématique** qui permet de maximiser le profit de cette entreprise ?

II- La méthode du simplexe

1. Méthode de résolution du simplexe

Après modélisation du problème précédent, nous obtenons le système suivant :

Fonction « Objectif » **Max Z = 800x$_1$ + 1200x$_2$**

Sous les contraintes
$$\begin{cases} 5X_1 + 3X_2 \leq 30 \\ 2X_1 + 3X_2 \leq 24 \\ X_1 + 3X_2 \leq 18 \\ X_1,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

- On commence tout d'abord par transformer les inéquations en équations en ajoutant les variables d'écart e_i

$$5X_1 + 3X_2 \leq 30 \quad devient \ \ 5X_1 + 3X_2 + e_1 = 30$$

Si l'inéquation est du type $\geq$ 0 alors la transformation s'écrit :

$$5X_1 + 3X_2 \geq 30 \quad devient \ \ 5X_1 + 3X_2 - e_1 = 30$$

- Donc en ajoutant les variables d'écart e_i notre système devient :

Max Z = 800x$_1$ + 1200x$_2$

$$\begin{cases} 5X_1 + 3X_2 + e_1 = 30 \\ 2X_1 + 3X_2 + e_2 = 24 \\ X_1 + 3X_2 + e_3 = 18 \\ X_1, X_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant établir le tableau initial

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	R	R/X$_i$
e_1	5	3	1	0	0	30	10
e_2	2	3	0	1	0	24	8
e_3	1	3	0	0	1	18	6
Z	800	1200	0	0	0	0	

Variable Sortante

Variable Entrante

Pour le choix de la variable rentrante on prend :

- Le Maximum des Z_i pour des problèmes de Max
- Le Minimum des Z_i pour des problèmes de Min

La variable sortante sera déterminée par le Min($R/X_{i\,:\,Var\,Ent}$).

Dans notre cas on prend le Min(10, 8, 6) qui est 6.

Donc e_3 est la variable qui sort de la Base.

- **Détermination du pivot**

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	R	R/X_i
e_1	5	3	1	0	0	30	10
e_2	2	3	0	1	0	24	8
e_3	1	3	0	0	1	18	6
Z	800	1200	0	0	0	0	

Variable Sortante

Variable Entrante

La cellule grise désigne le Pivot qui est dans notre cas égal à 3.

<u>Second Tableau</u>

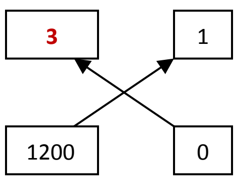
	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	R	R/X_i
e_1	4	0	1	0	-1	12	
e_2	1	0	0	1	-1	6	
X'_1	1/3	1	0	0	1/3	6	
Z	400	0	0	0	- 400	-7200	

- ✓ La ligne du pivot est divisée par la valeur du pivot
- ✓ La colonne du pivot est mise à Zéro sauf le pivot qu'on laisse à 1
- ✓ Les autres valeurs du tableau sont obtenues en calculant, dans le tableau précédent, $C_{ij} \leftarrow C_{ij} - \frac{C_{ik} * C_{lj}}{Pivot}$

Calculons par exemple la valeur de la case(Z,e_3)= - 400

On se réfère au tableau précédent et on obtient :

$$\text{case}(Z,e_3) = 0 - \frac{1200 * 1}{3} = -400$$



<u>Troisième Tableau</u>

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	R	R/X_i
e_1	$\boxed{4}$	0	1	0	-1	12	3
e_2	1	0	0	1	-1	6	6
X'_1	1/3	1	0	0	1/3	6	18
Z	400	0	0	0	- 400	-7200	

Variable Sortante

Variable Entrante

- La variable entrante est X_1 vue que c'est la plus grande valeur positive de Z
- On calcule R/X_1 : (3 , 6 , 18)
- La variable sortante est donc e_1 puisque 3 est le minimum de la colonne R/X_i
- Le pivot est l'intersection entre (X_1,e_1) ce qui donne la valeur 4.
- Après calcul des autres valeurs du nouveau tableau, on obtient :

Quatrième Tableau

	X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	R	R/X_i
X'_2	$\boxed{1}$	0	1/4	0	-1/4	3	
e_2	**0**	0	-1/4	1	-3/4	3	
X'_1	**0**	1	-1/12	0	5/12	5	
Z	**0**	0	-100	0	- 300	- 8400	

- **Le critère d'arrêt**

  L'algorithme du simplexe s'arrête lorsque :
  - Les $Z_i \leq 0$ pour un problème de Maximisation
  - Les $Z_i \geq 0$ pour un problème de Minimisation.

On remarque que dans notre quatrième tableau les $Z_i \leq 0$.

Donc le critère d'arrêt est vérifié. La solution à notre problème est :

$$\boxed{(X_1 = 3 \ , X_2 = 5 \ , Z = 8400)}$$

TD N°1

Modélisation mathématique d'un problème

Résolution du problème par la méthode du Simplexe

Reprenons l'énoncé de l'exercice proposé au début du cours.

Enoncé du problème

Une entreprise prépare trois types de boites de fruits :

1. Une boite1 qui contient 0.45 kg de dattes, 0.67 kg d'abricots et 0.34 kg de pêches.

2. Une boite2 qui contient 0.56 kg de dattes, 0.34 kg d'abricots et 0.084 kg de pêches.

3. Une boite3 qui contient 0.45 kg de dattes, 0.22 kg d'abricots.

L'entreprise dispose de 33.6 kg de dattes, 25.2 kg d'abricots et de 10.08 kg de pêches. Elle gagne respectivement pour chaque boite 3 DA, 2 DA et 1.5 DA.

- Donnez **le modèle mathématique** qui permet de maximiser le profit de cette entreprise ?
- Puis le résoudre par la méthode du Simplexe ?

Indications

- Modélisation

	Boite1	Boite2	Boite3	Contraintes
Dattes	0.45	0.56	0.45	33.6
Abricots	0.67	0.34	0.22	25.2
Pêches	0.34	0.084	0	10.08
Coûts	30	20	15	

Max Z = 30 X_1 + 20 X_2 + 15 X_3

$$\begin{cases} 0.45\, X_1 + 0.56\, X_2 + 0.45\, X_3 \leq 33.6 \\ 0.67\, X_1 + 0.34\, X_2 + 0.22\, X_3 \leq 25.2 \\ 0.34\, X_1 + 0.084\, X_2 \leq 10.08 \end{cases}$$

Résoudre le système précédent par la méthode du Simplexe.

Après ajout des variables d'écart on obtient :

<u>Tableau initial</u>

	X_1	X_2	X_3	e_1	e_2	e_3	R	R/X_i
e_1	0.45	0.56	0.45	1	0	0	33.6	
e_2	0.67	0.34	0.22	0	1	0	25.2	
e_3	0.34	0.084	0	0	0	1	10.08	
Z	30	20	15	0	0	0	0	

NB : Je vous laisse le soin de continuer les calculs….

Fin du premier chapitre.