3.1. Fonction primitive

Définition. on dit que la fonction $F(x)$ est une primitive de la fonction $f(x)$ sur un intervalle I, si en tout point de I on a : $F'(x) = f(x)$.

Exemple: trouver la primitive de $f(x) = 2x$

Théorème. Si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de la fonction $f(x)$ sur I, leur différence est une constante; $F_1(x) - F_2(x) = c$

3.1. Intégrale indéfinie

Définition. on appelle intégrale indéfinie de la fonction $f(x)$ l'ensemble de toutes les primitives de $f(x)$.

Notation. $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, $F'(x) = f(x)$ (1)

$y = \int f(x)\,dx = F(x) + c$: représente une famille de fonctions

Géométriquement, l'intégrale indéfinie d'une fonction est l'ensemble des courbes telles que on passe de l'une à l'autre par une translation dans le sens positif ou négatif de l'axe Oy.

Exemple $\int 2x\,dx$

De l'eq. (1) on a :

- $(\int f(x)dx)' = (F(x) + c)' = f(x)$
- $d\,(\int f(x)dx) = f(x)dx$
- $\int dF(x) = F(x) + c$

Quelques propriétés de l'intégrale indéfinie

$\int\big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

$\int Af(x)dx = A\int f(x)\,dx$ A est une constante ;

Si $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, alors : - $\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$

- $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$

Exemples

1. $\int\big(2x^3 - 3sinx + 5\sqrt{x}\big)dx = \int 2x^3 - 3\int sinx + 5\int x^{\frac{1}{2}}dx$
   $= \frac{1}{2}x^4 + 3cosx + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c;$
2. $\int(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x})dx = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} + c;$
3. $\int\frac{dx}{x+4} = ln|x+4| + c;$
4. $\int sin(2x-6)dx = -\frac{1}{2}cos(2x-6) + c$

Table des principales intégrales indéfinies

$f(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + C$	$f(x)$	$\int f(x)dx = F(x) + C$
a (cste)	$ax + C$	$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$		$-\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C \quad a \neq 0$
$\frac{1}{x}$	$ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{1}{a^2 - x^2}$	$\frac{1}{2a} ln \left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C \quad a \neq 0$
$\frac{1}{x+a}$	$ln\lvert x+a\rvert + C$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a}}$	$ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a}\right\rvert + C$ $a \neq 0$
a^x	$\frac{1}{lna} a^x + C \quad a > 0$		
e^x	$e^x + C$	$\frac{1}{\sqrt{a - x^2}}$	$arcsin \frac{x}{a} + C \quad a > 0$
			$-arccos \frac{x}{a} + C \quad a > 0$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	$\frac{1}{sinx}$	$ln\left\lvert tg \frac{x}{2}\right\rvert + C$
$sinx$	$-cosx + C$	$\frac{1}{cosx}$	$ln\left\lvert tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + C$	$\frac{1}{sin^2 x}$	$-ctgx + C$
$cosx$	$sinx + C$	$\frac{1}{cos^2 x}$	$tgx + C$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + C$		

3.3. Intégration des fonctions rationnelles

L'intégration des fonctions rationnelles est basée sur ce qu'on appelle la **décomposition en fraction partielles**. Mais tout d'abord quelques définitions.

Définition 1. On dit qu'on factorise un polynôme $P(x)$ lorsqu'on l'écrit comme un produit d'autres polynômes

$$P(x) = P_1(x).P_2(x)$$

Les polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont appelés des *facteurs* de $P(x)$. Un polynôme qu'on ne peut pas factoriser est dit ***irréductible***.

Les polynômes **irréductibles** sont:

- les polynômes de degré 1, $ax + b$;
- les polynômes de degré 2, $ax^2 + bx + c$, qui n'ont pas de racines réelles (c.-à-d. avec $b^2 - 4ac < 0$).

Remarque 1.

- Les polynômes sont des *polynômes à coefficients réels* ;
- les facteurs sont des *polynômes de degré au moins un* (pas des constantes);
- tout polynôme qui **n'est pas irréductible** peut être factorisé en un produit de polynômes **irréductibles**.

Définition 2. Une ***fonction rationnelle*** est une fonction de la forme $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$ P(x) et Q(x) sont des polynômes.

Exemple: $f(x) = \frac{4x^3-3x-4}{5x^2+x+1}$ est une fonction rationnelle puisque le numérateur et le dénoménateur sont des polynômes.

Remarque 2. Lorsqu'on parlera de fonctions rationnelles, on supposera que *le numérateur et le dénominateur n'ont pas de facteurs communs*.

Définition 3. Si le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, on dit alors que la fonction rationnelle est **régulière**, dans le cas contraire on dit qu'elle est **irrégulière**.

Si la fonction rationnelle est **irrégulière**, en divisant le numérateur par le dénominateur (suivant la régle de division des polynômes),

$$\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$E(x)$: est un polynôme et $\frac{R(x)}{Q(x)}$ est une fonction rationnelle **régulière**.

Exemples

- $\frac{x^2+2x+3}{x-1} = x + 3 + \frac{6}{x-1}$
- $\frac{x^4-3}{x^2+2x+1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x-6}{x^2+2x+1}$

3.3.1. Décomposition en fraction partielles

Soit $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}}$ une fonction rationnelle, le degré de $\mathrm{P(x)} <$ degré de $\mathrm{Q(x)}$

Règle de décomposition en fractions partielles ; $\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \frac{?}{?} + \frac{?}{?} + \cdots + \frac{?}{?}$

Étape 1: Factoriser le dénominateur($\mathrm{Q(x)} = (\quad)(\quad) \ldots (\quad)$). Les facteurs ($(\quad)(\quad) \ldots (\quad)$) doivent être irréductibles.

Étape 2: Á chaque facteur irréductible est associé une ou plusieurs fractions partielles.

A. Cas d'un facteur de degré 1	
Forme du facteur	Fraction(s) partielle(s) associée(s)
$ax + b$: facteur linéaire de multiplicité 1	$\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \frac{A}{ax+b}$ où A est une constante réelle à déterminer
$(ax + b)^n$: facteur linéaire de multiplicité n	$\mathrm{f(x)} = \frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$ où A_i sont des constantes réelles à déterminer

Exemples: Décomposer en fraction partielles a) $\frac{1+x}{x(x+5)}$, b) $\frac{1+x}{x(x+5)^2}$, c) $\frac{1+x}{x^3(x-5)^2}$, d) $\frac{1}{x^3-x}$

Solution

a) - Dénominateur: 2 facteurs irréductibles : $x \; et \; (x+5)$ $\Rightarrow$ 2 fractions ;

- les 2 facteurs sont de degré 1 ⇒ donc les numérateurs sont des polynômes de degré 0 (constantes) ; A et B
- $x^1 \; et \; (x+5)^1$: non répétés (multiplicité 1)

donc $\frac{1+x}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+5)}$

Détermination des constantes A et B (par identification)

$\frac{1+x}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+5)}$; réduire même dénominateur

$\frac{1+x}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+5)} = \frac{Ax+5A+Bx}{x(x+5)} = \frac{x(A+B)+5A}{x(x+5)}$

par identification $\begin{cases} A + B = 1 \quad \Rightarrow B = 4/5 \\ 5A = 1 \;\Rightarrow A = 1/5 \\ \text{donc } \frac{1+x}{x(x+5)} = \frac{1}{5x} + \frac{1}{4(x+5)} \end{cases}$

b) $\frac{1+x}{x(x+5)^2}$

dénominateur: 3 facteurs irréductibles ⇒ 3 fractions

tous de degré 1 ⇒ donc les numérateur sont des polynômes de degré 0 (constantes)

x n'est pas répétés (multiplicité 1) ;

$(x+5)^2$ est de multiplicité 2

donc $\frac{1+x}{x(x+5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+5)} + \frac{C}{(x+5)^2}$ (déterminer les constantes A , B et C)

c) $\frac{1+x}{x^3(x-5)^2}$

- dénominateur: 5 facteurs irréductibles ⇒ 5 fractions
- tous de degré 1 ⇒ donc les numérateur sont des polynômes de degré 0 (constantes)
- x est de multiplicité 3, $(x-5)^2$ est de multiplicité 2

donc $\frac{1+x}{x^3(x-5)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{(x-1)} + \frac{E}{(x-1)^2}$ (déterminer les constantes A, B, C, D et E)

d) $\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x^2-1)} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$ (déterminer les constantes A, B et C)

B. Cas d'un facteur de facteur de degré 2	
Forme du facteur	Fraction(s) partielle(s) associée(s)
ax^2+bx+x : facteur irréductible de multiplicité 1 facteur irréductible si $\Delta = b^2-4ac<0$	$\text{f(x)} = \frac{\text{P(x)}}{\text{Q(x)}} = \frac{Ax+b}{ax^2+bx+x}$ où A et B sont des constante réelle à déterminer
$(ax^2+bx+x)^n$ facteur irréductible de multiplicité n	$\text{f(x)} = \frac{\text{P(x)}}{\text{Q(x)}} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+x} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+bx+x)^{2^+}} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(x^2+bx+x)^n}$ où A_i sont des constantes réelles à déterminer

Exemple

Décomposer en fraction partielles : $f(x) = \frac{3x^2+5x+4}{x^3+x}$

1. Factoriser le dénominateur en facteurs irréductibles : $(x^3 + x) = x(x^2 + 1)$

x est un facteur irréductible de degré 1,

$(x^2 + 1)$ est un polynome de degré 2

Factoristion d'un polynome de degré 2 : calcule de $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = -4 < 0$, donc $(x^2 + 1)$ est un facteur irréductible de degré 2

2. A chaque facteur est associé une ou plusieurs fractions partielles

- x (degré1) → le numérateur (degré 0) est une constante : A

  x de multiplicité **1** → une fraction partielle

- $(x^{\mathbf{2}} + 1)$ (degré **2**) →le numérateur (degré 1) : $Bx + C$

  $(x^2 + 1)^{\mathbf{1}}$ de multiplicité **1** → une fraction partielle

Donc $f(x)$ s'écrit :

$\frac{3x^2+5x+4}{x^3+x} = \frac{3x^2+5x+4}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$; A, B et C sont des constantes à déterminer

3.3.2. Intégration des fonctions rationnelles

Lorsque on veut intégrer une fonction rationnelle :

1. Si la fonction rationnelle est irrégulière faire la division,
2. On se ramène à cette équation : $\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

L'intégration de polynôme $E(x)$ ne présente aucune difficulté, notre tâche consiste donc à intégrer la (les) fraction(s) rationnelle(s) régulière(s) ; $\frac{R(x)}{Q(x)}$.

Définition. Les fractions régulières du type :

I. $\frac{A}{x-a}$

II. $\frac{A}{(x-b)^n}\ (n \geq 2)$

III. $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

Sont appelées respectivement éléments simples des types I, II, et III.

Intégration des éléments simples

I. $\int \frac{a}{x-a} dx = aln|x - a| + c$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = A\int (x - a)^{-n}\, dx = \frac{A}{1-n(x-n)^{n-1}} + c$

Pour le 3ième type $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$ (avec $\Delta = b^2 - 4ac < 0$)

<table>
<tr><td colspan="2">La méthode générale de calcul $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ est :
• Écrire le trinôme du second degré à la forme suivante :
$ax^2+bx+c = \boldsymbol{a(x+k)^2+l}$ (1) k et l: sont des constantes.</td></tr>
<tr><td><u>1er cas : si $A=0$</u>
Et avec la forme (1).
On se ramène à l’une des intégrales
• $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c\ ; a \neq 0$
• $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c\ ; a \neq 0$</td>
<td><u>2ème cas : si $A \neq 0$</u>
• Faire apparaitre au numérateur la dérivée $2ax+b$ du ax^2+bx+c.
On pose
$u = ax^2+bx+c \quad du = (2ax+b)dx$
• $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ se décompose en deux parties
$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\begin{cases} 1^{ère}\ partie \rightarrow \frac{du}{u} \\ 2^{ème}\ partie \rightarrow \frac{\alpha}{ax^2+bx+c} \\ (cas\ A=0) \end{cases}$$</td></tr>
</table>

Exemples. Calculer les intégrales (intégrales du type $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$)

a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ $b)$ $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$ et c) $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}dx$

Solution

a) $x^2+2x+5 \rightarrow \Delta = 4-4*5 = -16 < 0$, donc x^2+2x+5 est un polynôme **irréductible**.

Alors $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ est **un élément simple de III type** ($\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$) avec $\boldsymbol{A=0}$ **(1ier cas)**

- Écrire le trinôme du second degré à la forme suivante :

$x^2+2x+5 = (x+k)^2+l$. k et l: sont des constantes à déterminer.

$$x^2+2x+5 = (x+k)^2+l = x^2+2kx+k^2+l$$

$$x^2 = x^2,\ 2x = 2kx \Longrightarrow \boldsymbol{k=1},\ 5 = k^2+l \Rightarrow \boldsymbol{l=4}$$

$$\boldsymbol{x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4}$$

Donc l'intégrale s'écrit

$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4}$

On pose $u = x + 1,\ u' = 1 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Longrightarrow du = dx$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{du}{u^2+2^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{u}{2} + c$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} + c}$$

----

b) $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$

$b)\ x^2 - 6x + 5 \rightarrow\ \Delta = 36 - 20 = 16 > 0$

$\Delta > 0$ donc $(x^2 - 6x + 5)$ est un polynôme réductible, $x_1 = 1\ et\ x_2 = 5$

- Factoriser le dénominateur : $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$; 2 facteurs.
- les 2 facteurs sont de degré 1 ⇒ donc les numérateurs sont des polynômes de degré 0 (constantes) ; A et B
- $(x-1)\ et\ (x-5)$: non répétés (multiplicité 1) → 2 fractions partielles.

Décomposition en fractions partielles :

$$\frac{1}{x^2-6x+5} = \frac{1}{(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5}$$

Détermination des constantes A et B

$$\frac{1}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{Ax - 5A + Bx - B}{(x-1)(x-5)} = \frac{(A+B)x - 5A - B}{(x-1)(x-5)}$$

Par identification : $\begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow A = -B \\ -5A - B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{x^2-6x+5} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-5)}$$

Donc $\int \frac{dx}{x^2-6x+5} = \int \left(-\frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x-5)}\right) dx = \frac{1}{4}(\int -\frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-5}) = \frac{1}{4}(-ln|x-1| + ln|x-5| + c = \frac{1}{4} ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + c$

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2-6x+5} = \frac{1}{4} ln\left|\frac{x-5}{x-1}\right| + c}$$

---

c) $I = \int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1} dx$

- Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur (la fonction rationnelle est **irrégulière)** → division des polynômes.

$$\boxed{\frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1} = 3x^2 - x + \frac{x}{2x^2-x+1}}$$

$$\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1} dx = \int \left(3x^2 - x + \frac{x}{2x^2-x+1}\right) dx = \int (3x^2-x)dx + \int (\frac{x}{2x^2-x+1})\, dx$$

$$I_1 = \int (3x^2-x)dx = \frac{3}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{I_1 = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1}$$

- Pour $\int (\frac{x}{2x^2-x+1})\, dx$ (est **un élément simple de III type** ($\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$) avec $\boldsymbol{A \neq 0}$ **(2[ième] cas).**
- Faire apparaitre au numérateur la dérivée $de\ 2x^2 - x + 1$.

$$(2x^2-x+1)' = 4x - 1$$

$\frac{x}{2x^2-x+1} = \frac{4x-1+1}{4(2x^2-x+1)}$

- La décomposition en en deux parties

$\frac{x}{2x^2-x+1} = \frac{4x-1+1}{4(2x^2-x+1)} = \frac{4x-1}{4(2x^2-x+1)} + \frac{1}{4(2x^2-x+1)} = \frac{1}{4}(\frac{4x-1}{(2x^2-x+1)} + \frac{1}{(2x^2-x+1)})$

$$\frac{x}{2x^2-x+1}\begin{cases} 1^{ère}\, partie \ \rightarrow \ \dfrac{4x-1}{2x^2-x+1} \\ 2^{ème}\, partie \ \rightarrow \ \dfrac{1}{2x^2-x+1}\ (cas\ A=0) \end{cases}$$

$\int \left(\frac{x}{2x^2-x+1}\right) dx = \int \frac{1}{4}\left(\frac{4x-1}{(2x^2-x+1)} + \frac{1}{(2x^2-x+1)}\right) \mathrm{dx} = \frac{1}{4}(\int \left(\frac{4x-1}{(2x^2-x+1)}\right) \mathrm{dx} + \int \frac{dx}{(2x^2-x+1)}$

$I_2 = (\int \left(\frac{4x-1}{(2x^2-x+1)}\right) \mathrm{dx}$ et $I_3 = \int \frac{dx}{(2x^2-x+1)}$

- Pour I_2, On pose : $u = 2x^2 - x + 1 \ \ du = (4x-1)dx$

Donc I_2 s'écrit: $I_2 = (\int \left(\frac{4x-1}{(2x^2-x+1)}\right) \mathrm{dx} = \int \frac{du}{u} = ln|u| + c_2 = ln|2x^2 - x + 1| + c_2$

$I_2 = (\int \left(\frac{4x-1}{(2x^2-x+1)}\right) \mathrm{dx} = ln|2x^2 - x + 1| + c_2$ $\boxed{I_2 = ln|2x^2 - x + 1| + c_2}$

Pour $I_3 = \int \frac{dx}{(2x^2-x+1)}$ $(\boldsymbol{cas\ A = 0})$

- Écrire le trinôme du second degré à la forme suivante :

$\boldsymbol{2x^2 - x + 1 = 2(x+k)^2 + l}$ **.** $k\ et\ l$: sont des constantes à déterminer.

$$2x^2 - x + 1 = 2(x+k)^2 + l = 2x^2 + 4kx + 2k^2 + l$$

$$2x^2 = 2x^2, -x = 4kx \Longrightarrow \boldsymbol{k} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}, 1 = 2k^2 + l \Rightarrow \boldsymbol{l} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}$$

$$\boldsymbol{2x^2 - x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}}$$

Donc l'intégrale I_3 s'écrit

$$I_3 = \int \frac{dx}{(2x^2-x+1)} = \int \frac{dx}{2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}}$$

On pose $X = x - \frac{1}{4},\ X' = 1 \Longrightarrow \frac{dX}{dx} = 1 \Longrightarrow dX = dx$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int \frac{dX}{X^2 + \frac{7}{8}} = \int \frac{dX}{X^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{7}} arctg \frac{4X}{\sqrt{7}}\right) + c_3$$

$I_3 = \int \frac{dx}{(2x^2-x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{7}} arctg \frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + c_3$ $\boxed{I_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{7}} arctg \frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right) + c_3}$

$I = I_1 + I_2 + I_3$

$$\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx$$

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_1 + \frac{1}{4}\ (ln|2x^2 - x + 1|) + c_2$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{7}} arctg \frac{4x-1}{\sqrt{7}}\right)\right) + c_3$$ $\boxed{C = c_1 + c_2 + c_3}$

$$\boxed{\int \frac{6x^4 - 5x^3 + 4x^2}{2x^2 - x + 1} dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\ ln|2x^2 - x + 1| + \frac{1}{2\sqrt{7}}\ arctg \frac{4x-1}{\sqrt{7}} + C}$$