4.1. Équation différentielles

- Une équations différentielles est une équation :
  - dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y(x)$) ou simplement y),
  - dans laquelle apparaissent certaines des dérivées de la fonction ($y', y'', y^{(3)}, ...$).
- Les équations différentielles ordinaires (EDO) où la ou les fonctions inconnues recherchées ne dépendent que d'une seule variable.

Le terme équation différentielle (ED) est utilisé pour signifier équation différentielle ordinaire.

Définition : une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme

$$F(x, y, y', \dots y^n) = 0 \quad (1)$$

Où F est une fonction de (n+2) variables.

Une solution d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$

- qui est n fois dérivable,
- et qui vérifie l'équation (1)

Notation : y au lieu de $y(x)$, y' au lieu de $y'(x)$, ...

Exemple 1 : $y' = cosx$ signifie : $y'(x) = cosx$

Exemple 2 :

ED du 1er ordre $xy' + y - y^2 lnx = 0$

ED du 2ème ordre $y'' - 3y' + 2y = 0$

ED du 3ème ordre $y''' + y - sinx = 0$

ED du 4ème ordre $y^{(4)} - 2y'' + y = 9e^{2x}$

4.2. Équations différentielles d'ordre 1

- **Définition :** une équation différentielle d'ordre 1 de fonction inconnue y, résolue par rapport à la dérivée y' est une équation de la forme : $\boldsymbol{y' = f(x, y)}$ (ou $\boldsymbol{F(x, y, y') = 0}$, $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f(x, y)}$). $\boldsymbol{f(x, y)}$ est une fonction donnée.

$y = f(x)$ est la solution ou l'intégrale de l'équation différentielle.

A. Équations à variable séparées (EVS)

1. **Définition :** on appelle équation différentielle à variable séparées, toute équation du type $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$ ou $f(x)$ et $g(y)$ sont deux fonctions définies respectivement sur I et K (I et K sont des intervalles de $\mathbb{R}$).
2. **Résolution** : soit $y' = \frac{f(x)}{g(y)} \to \begin{cases} g(y)\, y' = f(x) \\ y' = \frac{dy}{dx} \end{cases} \to g(y)dy = f(x)dx$

Si $G(y)$ et $F(x)$ sont des primitives des fonctions g et f, alors par intégration de chaque membre :

$$\int g(y)dy = \int f(x)\,dx, \quad \text{on obtient : } G(y) = F(x) + c$$

Cette équation définit la solution générale $y = f_k(x)$

Remarque : $y' = \frac{g(y)}{f(x)}, f(x) \neq 0$ est également une équation à variable séparées qui s'intègre de la même manière.

3. **Exemple** : intégrer l'équation différentielle suivantes

$\boldsymbol{a}$. $x + yy' - 1 = 0$, $\boldsymbol{b}$. $(1 + x^2)y'ycos(y^2) - x = 0$

On sépare les variables :

$$\begin{cases} yy' = 1 - x \\ y' = \dfrac{dy}{dx} \end{cases} \to y\frac{dy}{dx} = 1 - x \to ydy = (1 - x)dx\ (EVS).$$

On intègre: $\displaystyle\int ydy = \int (1 - x)dx \to \frac{1}{2}y^2 = x - \frac{1}{2}x^2 + c \to \quad \boldsymbol{y^2 = -x^2 + 2x + c}$

B. Équations homogènes

1. **Définition :** on appelle équation différentielle homogène du premier ordre, une équation de la forme $F\left(x,\frac{y}{x}\right)=0$ (ou $y'=f(\frac{y}{x})$).
2. **Résolution :** on résout l'équation sur $\mathbb{R}^*$,

en posant : $\frac{y}{x}=t\rightarrow \quad y=tx;\quad y'=f\left(\frac{y}{x}\right)=f(t)$;

$$\begin{cases} y'=f(t) \\ y'=(tx)' \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=x\frac{dt}{dx}+t\frac{dx}{dx}=x\frac{dt}{dx}+t \end{cases} \Rightarrow f(t)=x\frac{dt}{dx}+t \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{dx}{x}=\frac{dt}{f(t)-t}} \quad \boldsymbol{EVS}\ (\,f(t)-t\ \neq 0\,)$$

Par intégration :

$$ln|x|=\int \boldsymbol{\frac{dt}{f(t)-t}}=\boldsymbol{F(t)+k}\text{ ; d'où}\qquad \boldsymbol{x=c.e^{F(t)}}\rightarrow \boldsymbol{y=c.t.e^{F(t)}},avec\ c=e^k$$

3. **Exemple :** intégrer les équations suivantes

$$\boldsymbol{a}.\quad x^2+y^2=2xyy',\qquad\qquad \boldsymbol{b}.\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2+3xy+5x^2}{x^2}$$

Solution

$\boldsymbol{a}.\quad x^2+y^2=2xyy';\quad x\neq 0,\qquad y\neq 0$

$$\boldsymbol{y'}=\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{x^2(1+(\frac{y}{x})^2)}{x^2(2\frac{y}{x})}\rightarrow y'=\frac{(1+(\frac{y}{x})^2)}{2\frac{y}{x}}\quad est\ une\ équation\ homogène$$

$$On\ pose:\ \frac{y}{x}=t\rightarrow\quad y=tx;\qquad l'équation\ homogène\ s'écrit\quad y'=\frac{1+t^2}{2t}$$

$$\begin{cases} y=tx,\qquad y'=(tx)'=x\frac{dt}{dx}+t \\ \qquad\qquad y'=\frac{1+t^2}{2t} \end{cases}\Rightarrow\qquad x\frac{dt}{dx}+t=\frac{1+t^2}{2t}\Leftrightarrow\frac{dx}{x}=\frac{2t}{1-t^2}dt\quad (\boldsymbol{EVS})\qquad avec\ t\neq\pm1$$

La résolution de l'EVS : $\begin{cases} \int\frac{dx}{x}=\int\frac{2t}{1-t^2}dt\rightarrow ln|x|=-ln|1-t^2|+ln|k|,\quad k\neq 0 \\ x=\frac{k}{1-t^2}\qquad et\qquad y=\frac{k.t}{1-t^2} \end{cases}$

En éliminant t, on obtient :

$$x=\frac{k}{1-t^2}=\frac{k}{1-\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x^2k}{x^2-y^2}\qquad\rightarrow\qquad \boldsymbol{y^2-x^2+kx=0}$$

4.3. Équations différentielles linéaires

1. Définition : Une équation différentielle d'ordre n est **linéaire** si elle est de la forme :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + \; a_n(x)y^n = g(x)$$

- Le terme linéaire signifie que tous les y^i sont de degré 1.
- Les $a_i(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
- Les $a_i(x)$ sont appelés les coefficients et $g(x)$ le second membre.

- Une équation différentielle linéaire est **homogène**, ou **sans second membre**, si la fonction g est la fonction nulle

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + \; a_n(x)y^n = 0$$

- Une équation différentielle linéaire est à **coefficients constants** si

$$a_0y + a_1y' + \cdots + \; a_ny^n = g(x)$$

Ou les $a_i$sont des constantes réelles et g une fonction continue.

2. Exemples :

1. $y' + 5xy = e^x$ est une équation linéaire du 1er ordre avec second membre **(E.A.S.M.),**

2. $y' + 5xy = 0$ est l'équation homogène associée à la précédente,

3. $3y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constantes, sans second membre et

4. $y'^2 - y = x \; ou \; y''.y' - y = 0$ ne sont pas des équations différentielles linéaires.

4.3.1. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

1. Définition : Une équation différentielle d'ordre 1 est **linéaire** est une équation du type :

$$a(x)y + b(x)y' = c(x) \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{y' + P(x)y = Q(x)} \qquad (\mathbf{1})$$

Ou : a et b sont appelés coefficients et c le second membre.

a , b et c sont des fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Si $\boldsymbol{Q(x) = 0}$**,** l'équation (1) s'écrit : $\boldsymbol{y' + P(x)y = 0}$ $(\mathbf{2})$

L'équation (1) s'appelle : **E**quation **Avec S**econd **M**embre ; **E.A.S.M.**

L'équation (2) s'appelle : **E**quation **S**ans **S**econd **M**embre ; **E.S.S.M.** (équation homogène de l'équation (1))

- **Résolution de équation homogène** : l'équation (2) est une équation à variable séparées.

$$y' + P(x)y = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} + \; P(x)y = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx \quad\Rightarrow\quad \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$$

$$lny = -\int P(x)dx + c \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{y = K.e^{-\int P(x)dx}} \qquad (\mathbf{3}); \qquad avec \quad K = e^c$$

- **Résolution de équation non homogène** :
  - Pour intégrer l'équation (1), on applique la méthode dite : la méthode **de la variation de la constante arbitraire.**
  - Cette méthode consiste à trouver d'abord la relation **(3)**.
  - **La solution générale de l'équation (1) est la relation (3) avec la grandeur K est fonction de $\boldsymbol{x}$.**
  - On substitue dans l'équation **(1)** $\boldsymbol{y \; et \; y'}$ données par la relation **(3)**.
  - De l'équation différentielle obtenue, on détermine la fonction $\boldsymbol{K(x)}$.
  - La solution générale de l'équation (1) est : $\boldsymbol{y = K(x).e^{-\int P(x)dx}}$

Exemples : Résoudre les équations différentielles linéaire d'ordre 1 suivantes :

$$\boldsymbol{a}. \quad y' - 2xy = e^{x^2}\sin x, \qquad \boldsymbol{b}. \quad x^2y' + (1 - 2x)y = x^2$$