I. Généralités

1. Notion de matrice

Définition: On appelle matrice de type (n, p), un tableau à n lignes et p colonnes formées d'éléments d'un ensemble K. (K désigne le corps R ou C. n et p sont des entiers strictement positifs.)

Notation : On note une matrice par une lettre capitale et on la représente par un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow i = 1 \\ \rightarrow i = 2 \\ \\ \rightarrow \text{i-ième ligne} \\ \\ \rightarrow i = n \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ j = 1 & j = 2 & & \text{j-ième colonne} & & j = p \end{array} & \end{array}$$

Ou bien

- $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ (i: indice de ligne et j: indice de colonne)

- Les éléments a_{ij} de la matrice A : coefficients.

- a_{ij} : le coefficient en i-ième ligne et j-ième colonne

Format (dimension, taille, ordre): indique le nombre de linge et de colonne d'une matrice $n \times p$.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; Donner le format de la matrice A. Donner la valeur de chacun des éléments :a_{12} , a_{31}

Format de la matrice A est : …………

$a_{12} =$: est l'élément situé en ligne ……….. et colonne ….

$a_{31} =$: est l'élément situé en ligne ………... et colonne ….

2. Matrices carrées (n = p), donc le format est $n \times n$ (ou bien n).

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix},$$

- Les éléments a_{ii} de la matrice carrée A forment la **diagonale principale**
- La somme des éléments diagonaux d'une matrice carrée est appelée la trace de A, notée $Tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

Matrices carrées remarquables

2.1. Matrice diagonale : Une matrice est diagonale si tous les termes en dehors de sa diagonale principale sont nuls.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \quad \boldsymbol{a_{ij} = 0 \ si \ i \neq j \quad et \ \ a_{ij} \neq 0 \ \ si \ \ i = j}$$

- **Propriété:** si $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$, la matrice A^k est définie par :

$$A^k = \left(m_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \quad \boldsymbol{m_{ij} = 0 \ si \ i \neq j \quad et \ \ m_{ij} = a_{ij}^k \ \ si \ i = j}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

2.2. Matrice unité (matrice identité) $\boldsymbol{I_n}$: est une matrice dont tous les termes de la diagonale principale sont égaux à 1.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i.i\le n} \quad \boldsymbol{a_{ij} = 0 \ s \ i \neq j \quad et \ \ a_{ij} = 1 \ \ si \ i = j}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} \end{pmatrix} ; \ I_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- **Propriété** : $A \times I_n = I_n \times A = A$; I_n est l'élément neutre pour la multiplication des matrices carrées

2.3. Matrice scalaire (matrice diagonale): est une matrice dont tous les termes de la diagonale principale sont égaux. $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \quad et \quad \boldsymbol{a_{ii} = \lambda \in K}$

- **Propriété** : $$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\lambda} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\lambda} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\lambda} I_n$$

2.4. Matrice symétrique dont les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux.

$A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$; A est symétrique si $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\ 1 \le i \ et \ j \le n.$ **Exemple :** $A = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & 0 & \mathbf{10} \\ \mathbf{6} & \mathbf{10} & 12 \end{pmatrix}$

2.5. Matrice antisymétrique : $A = \left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}$

La matrice A est antisymétrique $\Longrightarrow \forall\ 1 \le i \ et \ j \le n \ \begin{cases} a_{ij} = -a_{ji} & i \neq j \\ a_{ii} = 0 & i = j \end{cases}$ **Exemple** $A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{-6} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{6} & 0 \end{pmatrix}$

2.6. Matrices triangulaires sont des matrices dont une partie triangulaire des valeurs, délimitée par la diagonale principale, est nulle.

Matrice triangulaire supérieure: les éléments sont nuls sous la diagonale principale .

$$(\forall\ i > j\ ,\ a_{ij} = 0\ ) : A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire inférieure les éléments sont nuls au-dessous de la diagonale principale.

$$(\forall\ i < j,\ \ a_{ij} = 0\ \ ) \ : \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

II. Egalité de deux matrices : deux matrices $A = (a_{ij})\ et\ B = (b_{ij})$ de même type $(n \times p)$sont égales si : $a_{ij} = b_{ij}\ avec\ 1 \leq i \leq n\ et\ 1 \leq j \leq p$

Exemples: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A \neq B$ puisqu'elles n'ont pas la même dimension.

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. A et B ont même format (2×2) ; $C = D$ si…………………………........

Matrice nulle: est une matrice dont tous les coefficients sont nuls, $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$

III. Opérations sur les matrices

1. Somme et différences de deux matrices: deux matrices $A = (a_{ij})\ et\ B = (b_{ij})$ de même type $(n \times p)$ peuvent s'additionner ou soustraire.

La somme (ou différence) de ces deux matrices est une matrice matrices $C = (c_{ij})$ du même type telle que: $C = A \pm B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$; $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

- **Propriétés**
- **Commutativité** : $A + B = B + A$; - **Associativité** : $A + (B + C) = (A + B) + C$

  $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$. (**0** : est la matrice nulle de même ordre que A).

  $A + (-A) = \mathbf{0}$ **;** $-A = (-a_{ij})$: est la matrice opposée de $A = (a_{ij})$.

2. Produit d'une matrice par un scalaire : le produit d'une matrice A par un scalaire $\alpha \in K$, noté αA, est la matrice obtenue en multipliant chaque élément a_{ij} de A par α.

$$A = (a_{ij}), \qquad C = \alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \Leftrightarrow c_{ij} = \alpha a_{ij}$$

- **Propriétés** : soient $A\ et\ B$ deux matrices carrées de même taille et deux réels $\alpha\ et\ \beta \in K^2$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A\ ; \quad (\alpha\, \beta)A = \alpha(\beta A)\ ; \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; \quad (\alpha A)B = \alpha(AB)$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B = (A + B)\alpha$$

Exemple: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; calculer $C = 2A - 3B$

3. Produit matriciel

a. **Produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :** soient A et B deux matrices du type $(1 \times \boldsymbol{p})$ et $(p \times 1)$ respectivement;

$A = (a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}\ \ldots\ a_{1p})\ et$ B = $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$; $A \times B = (a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}\ \ldots\ a_{1p}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$

$$A \times B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1p}b_{p1}$$

b. **Produit d'une matrice par un vecteur colonne**

Pour multiplier une matrice A ($n \times \boldsymbol{p}$) par une colonne B($\boldsymbol{p} \times 1$), On multiplie chacune des n lignes de la matrice A par le vecteur colonne B. On obtient alors un vecteur colonne.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \to A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np}\end{pmatrix} \text{ et } B = (a_{i1})_{1\le i\le p} \quad \to B = \begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ \vdots\\ b_{p1}\end{pmatrix}$$

$$A\times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ \vdots\\ b_{p1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1p}b_{p1}\\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2p}b_{p1}\\ \dots\dots + \dots\dots + \dots + \dots\dots\\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{np}b_{p1}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A\times B = C;\ \ C = (C_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ j=1}}}$$

c. **Produit de deux matrices :** le produit de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonne de la première matrice est égal au nombre de ligne de la deuxième matrice.

Soient

$$\begin{cases} \text{A} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}\ \text{. Le format de A est : } \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{p}\\ \text{B} = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le q}}\ \text{. Le format de B est : } \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}\end{cases} \qquad A\times B = C \to C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le q}}\,;\ le\ format\ de\ C\ est\colon \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{q}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{\boldsymbol{p}} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj}\,, i = 1\dots\boldsymbol{n}\quad et\quad j = 1\dots\boldsymbol{q}$$

Exemple : calculer le produit $A\times B$; $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -5 & 6\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}7 & 8\\ 9 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; $A\times B =$

- **Propriétés**

- La multiplication des matrices n'est pas commutative ; $A\times B \neq B\times A$ (en général)
- La multiplication des matrices est associative ; $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$
- La multiplication des matrices est distributive par rapport à l'addition
$$A\times(B+C) = A\times B + A\times C,\quad (B+C)\times A = B\times A + C\times A$$
- Le produit matriciel est nul si l'une des matrices est nulle : $(\mathbf{A = 0}$ **ou** $\mathbf{B = 0}) \Rightarrow \mathbf{A\times B = 0}$**,** mais $\mathrm{A\times B = 0}$ n'implique pas $(\mathrm{A = 0}$ ou $\mathrm{B = 0})$.
- $A\times B = A\times C$ n'implique pas $\mathrm{B = C}$

4. Puissance d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n. Soit k un entier positif. Si k est différent de **0**, élever la matrice A à la puissance k, c'est multiplier k fois la matrice A par elle-même. On notera A^k cette opération.

$$A^2 = A\times A$$

$$A^3 = A\times A\times A$$

$$\vdots$$

$$A^k = A\times A\times A\times \dots\times A$$

5. Matrice transposée (ou la transposée) d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est la matrice notée A^T (ou ${}^tA$), obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de même indice de A.

Exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to A^T =$

Une matrice carrée A est **symétrique** si $\boldsymbol{{}^tA = A}$. Une matrice carrée A est **antisymétrique** si $\boldsymbol{{}^tA = -A}$

- **Propriétés :** $\boldsymbol{(A^T)^T = A,\ (\alpha A)^T = \alpha A^T,\ (A+B)^T = A^T + B^T,\quad (AB)^T = B^T A^T}$

IV. Déterminant d'une matrice carrée : soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$

Notation : le déterminant de la matrice A est : $\det(A)$ ou $|A|$; $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

1. **Déterminant d'une matrice carrée $(\mathbf{2\times 2})$**

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$**.** **Exemple**: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $\det(A) =$

2. **Définition d'un mineur** : le mineur, m_{ij} , est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la i-ème ligne et la j-ième colonne

Exemple: Calculer les mineurs m_{ij} de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; $m_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -15$

$m_{12} = \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} = \cdots$, $m_{13} = \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} = \cdots$, $m_{21} = \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} = \cdots$, $m_{22} = \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} = \cdots$,

$m_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 6$, $m_{31} = \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} = \cdots$, $m_{32} = \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} = \cdots$ et $m_{33} = \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix} = \cdots$

3. **Définition d'un cofacteur** : le cofacteur, c_{ij} , est définie par la relation $c_{ij} = (-1)^{i+j} \times m_{ij}$

Exemple : Calculer les cofacteurs ; c_{ij} de la matrice A.

$c_{11} = (-1)^{1+1} \times m_{11} = +(-15) = -15$,

$c_{12} = \cdots$, $c_{22} = \cdots$, $c_{21} = \cdots$, $c_{22} = \cdots$, $c_{23} = \cdots$, $c_{31} = \cdots$, $c_{32} = \cdots$, $c_{33} = \cdots$

4. **Déterminant d'une matrice $\boldsymbol{n\times n}$**

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et c_{ij} ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteur.

- Choisir la ligne ou la colonne contenant le plus grand nombre de zéro.

Suivant une ligne : $\det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}c_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij}$

Suivant une colonne : $\det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}c_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij}$

Exemple: Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\det(A) = \cdots$

Méthode de Sarrus (n'est valable que pour les matrices de format (3×3)).

$$|A| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$

Propriétés (pour les matrice de format 3×3)

1. Si tous les éléments d'une ligne (colonne) de A sont nuls alors $|A| = 0$.
2. Si deux lignes (ou 2 colonnes) sont identiques (ou proportionnelles)→ $|A| = 0$; $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \cdots$
3. Si l'on permute les lignes et les colonnes d'un déterminant, la valeur reste inchangée ; $|A| = |A^T|$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad |A| = \qquad ; \quad |A^T| =$$

4. Si l'on permute deux lignes (ou deux colonnes) d'un déterminant, le signe du déterminant est changé

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \qquad ; \ |B| = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 6 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \qquad ; \ |C| = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \\ 1 & 9 & -3 \end{vmatrix} =$$

5. Si chaque élément d'une ligne (ou colonne) est multiplié par un scalaire k, le déterminant et multiplié par k.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 4 & 6 & 6 \\ -3 & 1 & -15 \end{vmatrix} = \qquad ; \ |E| = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -3 \\ 8 & 12 & -4 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

6. Si A et B deux matrice carrées d'ordre n : $|A.B| = |A||B| = |B||A|$
   Si $B = A^{-1}$; $\quad |A.B| = |A.A^{-1}| = |I|$
   $= |A|\,|A^{-1}| = 1; \qquad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

5. Calcul de l'inverse d'une matrice

- Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$; A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$
- Soit A une matrice carrée d'ordre n. si $\det(A) \neq 0$ alors il existe une matrice carrée d'ordre n telle que :

$$\boldsymbol{A.B = B.A = I,\ B = A^{-1}.} \qquad \boldsymbol{A^{-1}} \text{ est la matrice } \textbf{inverse} \text{ de A.}$$

- La matrice A est **singulièr**e si : $\boldsymbol{det(A) = 0}$, **régulière** dans le cas contraire ($\boldsymbol{det(A) \neq 0}$).

a. Matrice carrée (2×2)

Soit : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\det(A) = ad - bc \neq 0}$. $\quad Donc\ A^{-1}\ existe;$ $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

b. Matrice carrée $(\boldsymbol{n \times n})$: Méthode par l'adjointe (comatrice):

Soit $A_n = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.

- On appelle **comatrice** ou (**matrice adjointe**) de A, la matrice carrée d'ordre n, notée **com (A)** ou (**adj(A)**) définie par

$$com(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

où $\boldsymbol{c_{ij}}$ est le cofacteur de l'élément a_{ij} de A défini à partir du mineur m_{ij} par la relation : $\boldsymbol{c_{ij} = (-1)^{i+j} \times m_{ij}}$

- On appelle **matrice inverse** de la matrice A, la matrice, si elle existe, notée par $\boldsymbol{A^{-1}}$ telle que

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$, obtenue par la relation suivante : $\boldsymbol{A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}.\ {}^{t}com(A)}$

$\boldsymbol{{}^{t}com(A)}$: est la transposée de la comatrice de A

Exemple : calculer l'inverse des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

Solution

1.

2.

$$com(B) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$