1. Généralité

Définition: On appelle un système de n équations à p inconnues $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ le système:

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & l_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 & l_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & l_n \end{cases}$$

Écriture matricielle : Tous système (n équations et p inconnus) peut s'écrire sous la forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

A : matrice du système linaire,

X : matrice colonne (vecteur colonne) des inconnues,

B : matrice colonne ; second membre de système.

Le système est dit homogène si $B = 0$, non homogène si $B \neq 0$.

2. Méthode de résolutions d'un système linéaire

a. Méthode de Cramer : un système de Cramer est un système de n équations à n inconnus avec $det\ (A) \neq 0$

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} ; \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \times X = B$$

A : est une matrice carrée d'ordre n

Un système de Cramer admet une solution unique donnée par : $\boldsymbol{x_i = \frac{|A_i|}{|A|},\ 1 \leq i \leq n}$

A_i est la matrice obtenue en remplaçant la i-ème colonne de A par le vecteur colonne B

Exemple: Résoudre le système par la méthode de Cramer

$$s\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 50 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 31 \end{cases}$$

Solution

$$s\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 50 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 31 \end{cases};\qquad \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

- Calcul de : $\det(A)$

- Calcul de : $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$

Pour $i = 1 \rightarrow x_1 =$

Pour $i = 2 \rightarrow x_2 =$

Pour $i = 3 \rightarrow x_3 =$

b. Méthode : Inversion matricielle

Soit A une matrice carrée avec le $det\ (A) \neq 0$, donc la matrice A admet une matrice inverse A^{-1}. Le système sous la forme matriciel $A \times X = B$ peut être multiplie par A^{-1} afin d'obtenir la solution.

$A \times X = B$; $A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \Longrightarrow \boldsymbol{X = A^{-1} \times B}$; $(A^{-1}A = AA^{-1} = I\ et\ IX = XI = I)$.

La détermination de X passe par le calcul de A^{-1} ; $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ {}^{t}com(A)$

Exemple: Résoudre le système par la méthode: **inversion matricielle**

$$s\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 50 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 31 \end{cases};$$