TD n° 1 Calcul matriciel ; Résolution d'un système d'équations

Exercice n°1

1. Donner la matrice A telle que : $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ et $a_{ij} = i - \frac{1}{2}j$
2. Donner la transposée ; ${}^{t}A$ et sa dimension.
3. Donner les coefficients de la diagonale principale.
4. Donner l'opposée de A.

Exercice n°2

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 21 & 6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}, D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

1. Calculer toutes les sommes possibles de deux de ces matrices.
2. Calculer $3A + 2C$ et $5B - 4D$.
3. Trouver $\propto$ telle que : $A - \propto C = 0$.

Exercice n°3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits suivant lorsque c'est possible.

$$AB, \quad BA, \quad CD, \quad DC, \quad AE \ et \ CE .$$

2. Calculer : AB puis $(AB)E$ et BE puis $A(BE)$. Conclure.

Exercice n°4

1. Calculer les déterminants suivants : $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}, \quad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
2. Déduire les déterminants suivants :

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, |D| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \ |E| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \ |F| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 9 & 4 \end{vmatrix} \quad et \quad |G| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 3 & 9 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Exercice n°5

Soit A une matrice définie par: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est inversible.
2. Trouver deux réels $\propto et\ \beta$ telle que $A^2 = \propto A + \beta I_3$ et déduire l'inverse de A.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équation par :
   - La méthode de Cramer.
   - La méthode : inversion matricielle

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1 \end{cases}$$