Examen Final

EXERCICE 01 (04pts):

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par disjonction des cas que $n(n^2+2)$ est un multiple de 3.

2) Montrer par l'absurde que $(\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists p \in \mathbb{N}^* :\ n = p^2) \Longrightarrow (\forall q \in \mathbb{N}^* :\ 2n \neq q^2)$.

EXERCICE 02 (06pts):

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 + x = 0$.
2. Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, resoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 + x - a = 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(1-x)$.
   f est-elle injectivite ? Est-elle surjectivite ?
4. Montrer que l'application $g : \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\longrightarrow \left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$ définie par $g(x) = f(x)$ est bijective.

EXERCICE 03 (04pts):

Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \ :\ a\mathcal{R}b \Leftrightarrow (a - b \text{ est divisible par 2 ou par 3}).$$

- Étudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité de $\mathcal{R}$. Conclure.

EXERCICE 04 (06pts):

Soit $*$ la loi de composition définie dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x, y \in \mathbb{R} :\ x * y = x + y + \frac{1}{10}$.

1. Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.
2. Montrer que l'application g définie par : $g(x) = 5x + \frac{1}{2}$ est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, *)$ dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$.
3. Soit $H = \left\{\frac{2n-1}{10}\ , n \in \mathbb{Z}\right\}$, Montrer que $(H, *)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, *)$

Bon courage

Corrigé de l'Examen final

EXERCICE 01 (4pts) :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

1er cas : Si $n = 3k,\ avec\ k \in \mathbb{N}$ alors $n(n^2+2) = 3k((3k)^2+2)$ qui est un multiple de 3.

2ème cas : Si $n = 3k+1, avec\ k \in \mathbb{N}$ alors $n(n^2+2) = (3k+1)((3k+1)^2+2) = (3k+1)(9k^2+6k+1+2)$

$= 3(3k+1)(3k^2+2k+1)$ qui est un multiple de 3.

3ème cas : Si $n = 3k+2, avec\ k \in \mathbb{N}$ alors $n(n^2+2) = (3k+2)((3k+2)^2+2) = (3k+2)(9k^2+12k+4+2)$

$= 3(3k+2)(3k^2+4k+2)$ qui est un multiple de 3

Par suite, dans tous les cas $n(n^2+2)$ est un multiple de 3………………………………………*(2pts)*

2) Supposons que $(\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p \in \mathbb{N}^* : n = p^2)$ et $(\exists q \in \mathbb{N}^* : 2n = q^2)$. ………………………………*(0.5pt)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $n = p^2$ et $2n = q^2$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, ainsi $2p^2 = q^2$, d'où $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel. ………………………………………………………………*(1.5pt)*

Exercice 02(6pts) :

1) $-x^2 + x = 0 \iff x(1-x) = 0 \iff (x = 0\ \ ou\ \ x = 1)$, donc l'ensemble des solutions $S = \{0,1\}$……*(01pt)*

2) $-x^2 + x - a = 0$ est une équation de second degré, calculons son discriminant : $\Delta = 1 - 4a$

Si $a > \frac{1}{4}$, alors $\Delta < 0$, donc il n'y a pas de solutions dans $\mathbb{R}$. ………………………………………*(0.5pt)*

Si $a \leq \frac{1}{4}$, alors $\Delta \geq 0$, donc on a les solutions : $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$ ………………*(1pt)*

3) D'après *1)*, on a : $f(1) = f(0)$ mais $1 \neq 0$ donc f n'est pas injective. ……………………………*(0.5pt)*

D'après *2)*, on a : $y = 1$ n'a pas d'antécédent, alors f n'est pas surjective. ………………………*(0.5pt)*

4.1) Soient $x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$:

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) &\Longrightarrow x_1(1-x_1) = x_2(1-x_2) \Longrightarrow x_1 - x_2 = {x_1}^2 - {x_2}^2 \\ &\Longrightarrow x_1 - x_2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \Longrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ &\Longrightarrow (x_1 - x_2 = 0)\ ou\ (x_1 + x_2 - 1 = 0) \Longrightarrow (x_1 = x_2)\ ou\ (x_1 = 1 - x_2) \\ &\Longrightarrow (x_1 = x_2)\ ou\ \left(x_1 = x_2 = \tfrac{1}{2}\right), \text{ car } 1 - x_2 \geq \tfrac{1}{2} \Longrightarrow x_2 \leq \tfrac{1}{2} \Longrightarrow x_2 = \tfrac{1}{2} \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

………………………………………………………………*(01pt)*

Alors g est injective.

4.2) Soit $y \in \left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$, d'après *2)*, l'équation $g(x) = y$ admet au moins une solution x dans $\mathbb{R}$.

On a $x_1 - \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{1-4y}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{1-4y}}{2} \geq 0$ d'où $x_1 \geq \frac{1}{2}$ ……………………………………*(0.5pt)*

et $x_2 - \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{1-4y}-1}{2} = \frac{-\sqrt{1-4y}}{2} \leq 0$ d'où $x_2 \leq \frac{1}{2}$. ……………………………………*(0.5pt)*

Alors il suffit de prendre $x = \frac{1+\sqrt{1-4y}}{2} \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, pour avoir $y = g(x)$.

Alors g est surjective. ……………………………………………………………*(0.5pt)*

Par suite g est bijective.

EXERCICE 03 (04pts):

1) Soit $a \in \mathbb{Z}$ on a : $a - a = 0$ est divisible par 2 ou par 3 , c-à-d : $a\mathcal{R}a$

Alors $\mathcal{R}$ est réflexive. ……………………………………………………………………………………*(0.5pt)*

2) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, on a :

$$
\begin{aligned}
a\mathcal{R}b &\Longrightarrow a - b \text{ est divisible par 2 ou par 3} \\
&\Longrightarrow -(a - b) \text{ est divisible par 2 ou par 3} \\
&\Longrightarrow b - a \text{ est divisible par 2 ou par 3} \\
&\Longrightarrow b\mathcal{R}a
\end{aligned}
$$

Alors $\mathcal{R}$ est symétrique. ……………………………………………………………………………………*(1pt)*

3) On a par exemple $(6 - 3$ est divisible par 2 ou par 3) et $(3 - 6$ est divisible par 2 ou par 3) et $(3 \neq 6)$

C.à.d : $\exists a, b \in \mathbb{Z},\ a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$ et $a \neq b$.

Alors $\mathcal{R}$ n'est pas antisymétrique. ……………………………………………………………………*(1pt)*

4) On a par exemple $(6 - 3$ est divisible par 2 ou par 3) et $(3 - 1$ est divisible par 2 ou par 3) et $(6 - 1$ n'est pas divisible ni par 2, ni par 3).

C.à.d : $\exists a, b, c \in \mathbb{Z},\ a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$ et $\overline{a\mathcal{R}c}$.

Alors $\mathcal{R}$ n'est pas transitive. ……………………………………………………………………………*(1pt)*

On conclut que $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'ordre et n'est pas une relation d'équivalence. ……………*(0.5pt)*

EXERCICE 04 (06pts):

1.1) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $x + y + \frac{1}{10} \in \mathbb{R}$ c-à-d $x * y \in \mathbb{R}$.

Alors $*$ est une loi interne dans $\mathbb{R}$. ……………………………………………………………………*(0.5pt)*

1.2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$x * y = x + y + \frac{1}{10} = y + x + \frac{1}{10} = y * x$$

Alors $*$ est une loi commutative. …………………………………………………………………………*(0.5pt)*

1.3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a:

$$
\begin{aligned}
(x * y) * z &= \left(x + y + \frac{1}{10}\right) * z = x + y + \frac{1}{10} + z + \frac{1}{10} = \left(x + \left(y + z + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10}\right) \\
&= \left(x + (y * z) + \frac{1}{10}\right) = x * (y * z)
\end{aligned}
$$

Alors $*$ est associative. …………………………………………………………………………………………*(0.5pt)*

1.4) Cherchons $e \in \mathbb{R}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ x * e = e * x = x$.

On a: $x * e = x \Leftrightarrow x + e + \frac{1}{10} = x \Leftrightarrow e = -\frac{1}{10}$

Puisque $-\frac{1}{10} \in \mathbb{R}$ et $*$ est commutative, alors $e = -\frac{1}{10}$ est l'élément neutre de la loi $*$.……………*(1pt)*

1.5) Soit $x \in \mathbb{R}$, cherchons $x' \in \mathbb{R}$, tel que $x * x' = x' * x = -\frac{1}{10}$

On a : $x * x' = -\frac{1}{10} \Leftrightarrow x + x' + \frac{1}{10} = -\frac{1}{10} \Leftrightarrow x' = -x - \frac{1}{5}$

Puisque $-x - \frac{1}{5} \in \mathbb{R}$ et $*$ est commutative, alors $x' = -x - \frac{1}{5}$ est le symétrique de x par rapport à la loi $*$…..*(1pt)*

Par suite $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien.

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x * y) = g\left(x + y + \frac{1}{10}\right) = 5\left(x + y + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{2} = 5x + 5y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \left(5x + \frac{1}{2}\right) + \left(5y + \frac{1}{2}\right) = g(x) + g(y).$$

Alors g est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R},*)$ dans le groupe $(\mathbb{R},+)$. ……………………………………………*(1pt)*

3) On a: $e = -\frac{1}{10} = \frac{2(0)-1}{10} \in H$. ……………………………………………………………………………*(0.5pt)*

Soient $x, y \in H$, alors $\exists n, m \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{2n-1}{10}$, $y = \frac{2m-1}{10}$, on a :

$$x * y^{-1} = x * \left(-y - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{2n-1}{10}\right) * \left(-\frac{2m-1}{10} - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{2n-1}{10}\right) * \left(\frac{-2m-1}{10}\right) = \frac{2n-1}{10} + \frac{-2m-1}{10} + \frac{1}{10}$$

$$= \frac{2(n-m)-1}{10} \in H, \text{ car } n - m \in \mathbb{Z}.$$

Par suite $(H, *)$ est un sous groupe de $(\mathbb{R},*)$. ……………………………………………………………*(1 pt)*