Université Ain Temouchent — Faculté des Scie et Téc , Dṕartement de Mathés et Info
1 ère année LMD Mathématique et Informatique — Année Universitaire 2021-2022
Matière: Algèbre 1 — Responsable de Matière Mr: Hariri. M

Examen Final : Algèbre 1 **Durée : 1h30 min**

Exercice 1 (05 pts).

Soient P et Q deux prédicats (propositions). On considère les connecteurs logiques et: $\wedge$, ou:$\vee$, implique: $\Rightarrow$, négation:$\overline{P}$. Compléter le tableau de vérité.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P\vee Q$	$\overline{P}\vee Q$	$P\Rightarrow Q$	$\overline{\overline{P}\vee Q}$	$Q\Rightarrow\overline{\overline{P}\vee Q}$	$(Q\Rightarrow\overline{\overline{P}\vee Q})\wedge(P\vee Q)$
1	1								
1	0								
0	1								
0	0								

Exercice 2 (05 pts).

On considère sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne notée $\star$ définie par:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \star y = x + y + xy$$

1. Existe-t-il $x \in \mathbb{R}$ let que $x \star y = x, \quad \forall y \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $(\mathbb{R} - \{-1\}, \star)$ est un groupe commutatif .
3. Calculer $1 \star (1 \times 1)$ et $(1 \star 1) \times (1 \star 1)$. La loi $\star$ est-elle distributive par rapport a la multiplication ?.

Exercice 3 .(05 pts).

On définit la relation binaire $\mathfrak{R}$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ comme suit:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow x^3 - y^3 = x - y$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences $\overline{1}$ et $\overline{2}$.
3. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation. (Exactement deux éléments).

Exercice 4 .(05 pts).

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
Démontrer que

1. La composée deux injections est une injection.
2. La composée deux surjections est une surjection.
3. Si la composition $g \circ f$ est injective alors f est injective.

BONNE CHANCE

Examen Final : Algèbre 1 **Durée : 1h30 min**

Exercice 1 (05 pts).

Soient P et Q deux prédicats (propositions). On considère les connecteurs logiques et: $\wedge$, ou:$\vee$, implique: $\Rightarrow$, négation:$\overline{P}$. Compléter le tableau de vérité.

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P\vee Q$	$\overline{P}\vee Q$	$P\Rightarrow Q$	$\overline{P\vee Q}$	$Q\Rightarrow\overline{P\vee Q}$	$(Q\Rightarrow\overline{P\vee Q})\wedge(P\vee Q)$
1	1								
1	0								
0	1								
0	0								

Exercice 2 (05 pts).

On considère sur $\mathbb{R}$ la loi de composition interne notée $\star$ définie par:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \star y = x + y + xy$$

1. Existe-t-il $x \in \mathbb{R}$ let que $x \star y = x, \quad \forall y \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $(\mathbb{R} - \{-1\}, \star)$ est un groupe commutatif .
3. Calculer $1 \star (1 \times 1)$ et $(1 \star 1) \times (1 \star 1)$. La loi $\star$ est-elle distributive par rapport a la multiplication ?.

Exercice 3 .(05 pts).

On définit la relation binaire $\mathfrak{R}$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ comme suit:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x\mathfrak{R}y \iff x^3 - y^3 = x - y$$

1. Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences $\overline{1}$ et $\overline{2}$.
3. Quelles sont les classes d'équivalence de cette relation. (Exactement deux éléments).

Exercice 4 .(05 pts).

Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.
Démontrer que

1. La composée deux injections est une injection.
2. La composée deux surjections est une surjection.
3. Si la composition $g \circ f$ est injective alors f est injective.

BONNE CHANCE

module : Algèbre 01 — Corrigé type de l'examen final — 2022/2023

Exo : 01 Soient p et φ deux propositions

p	φ	$\bar{p}$	$\bar{\varphi}$	$p \vee \varphi$	$\bar{p} \vee \varphi$	$p \Rightarrow \varphi$	$\overline{\bar{p} \vee \varphi}$	$\varphi \Rightarrow \overline{\bar{p} \vee \varphi}$	$(\varphi \Rightarrow \overline{\bar{p} \vee \varphi}) \wedge (p \vee \varphi)$
1	1	0	0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
		0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	01	01

Exercice N° : 02

1/ $\forall y \in \mathbb{R} : \quad x * y = x = x + y + xy$

$\Rightarrow \quad y(1+x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

$(-1) * y = -1 + y - y = -1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ 01

2/ $(\mathbb{R} - \{-1\}, *)$ groupe commutatif.

- Commutativité :

$x * y = x + y + xy = y + x + yx = y * x \Rightarrow$ $*$ est commutative 01

- associativité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$(x * y) * z = (x + y + xy) * z$$
$$= x + y + xy + z + (x + y + xy) z$$
$$= x + y + xy + z + xz + yz + xyz$$

$$x * (y * z) = x * (y + z + yz)$$
$$= x + y + z + yz + x(y + z + yz)$$
$$= x + y + z + yz + xy + xz + xyz$$

$\Rightarrow$ $*$ est associative. 01

- Elément neutre :

Soit e l'élement neutre s'il existe $\Rightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x * e = x = x + e + ex$$

$$\Rightarrow e(1+x) = 0 \Rightarrow e = 0$$ 0,1

- Elément symétrique :

Soit x' le symétrique de x. 0,1

$$\Rightarrow x * x' = e = 0 = x + x' + xx'$$

$$\Rightarrow x'(1+x) = -x \Rightarrow x' = \frac{-x}{1+x}$$

Donc pour $x \neq -1$; $x' = \frac{-x}{1+x}$

finalement $(\mathbb{R}-\{-1\}, *)$ est un groupe commutatif.

3/ $1*(1\times 1) = (1*1) = 1+1+1 = 3$ 0,1

et

$(1*1)\times(1*1) = 3\times 3 = 9$. On a $1*(1\times 1) \neq (1*1)\times(1*1)$ 0,1

La loi $*$ n'est donc pas distributive par rapport à la multiplication. 0,1

Exercice N° 03 $\qquad \forall x, y \in \mathbb{R} : x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x^3 - y^3 = x - y$.

1/ Soient x, y et z dans $\mathbb{R}$.

a) $x^3 - x^3 = 0 = x - x \Rightarrow x \mathcal{R} x$, d'où $\mathcal{R}$ est réflexive. 0,1

b) $x \mathcal{R} y \Rightarrow x^3 - y^3 = x - y \Rightarrow -x^3 + y^3 = -x + y$

$$\Rightarrow y^3 - x^3 = y - x \Rightarrow y \mathcal{R} x$$

d'où $\mathcal{R}$ est symétrique. 0,1

c) $\left.\begin{array}{l} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3 - y^3 = x - y \\ \text{et} \\ y^3 - z^3 = y - z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{ x^3 - z^3 = x - z \right. \Rightarrow x \mathcal{R} z$

d'où $\mathcal{R}$ est transitive, 0,1

Donc : a), b) et c) $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. 0,1

2/ $x \in \bar{1} \Leftrightarrow x^3 - 1 = x - 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0, 1$ ou -1 donc $\bar{1} = \{0, 1, -1\}$. 0,75

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x & x-1 \\ \hline 0\;0 & x^2+x \end{array}$$

$x \in \bar{2} \Leftrightarrow x^3 - 2^3 = x - 2 \Leftrightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Rightarrow$

$(x-2)(x^2+4x+3) = 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x - 6 & x-2 \\ \hline 0\;0 & x^2+4x+3 \end{array}$$

$\Rightarrow x = 2$ car $x^2+4x+3 \neq 0$

donc, $\bar{2} = \{2\}$. 0,75

3/ Les classes d'équivalence

Soit : $x \in \bar{a} \Leftrightarrow x^3 - a^3 = x - a \Leftrightarrow x^3 - x - a^3 + a = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)(x^2 + ax + a^2 - 1) = 0$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x - a^3 + a & x-a \\ \hline 0\;0 & x^2+ax+a^2-1 \end{array}$$

$\Leftrightarrow x = a$ ou $x^2 + ax + a^2 - 1 = 0$, donc $\bar{a}$ contient deux éléments si et seulement si 1,1

$\Delta = -3a^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \bar{a} = \left\{-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right\}$.

Exercice N° 6 Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$

1/ Soit x_1 et x_2 deux éléments de E tel que

$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Comme g est injective

$f(x_1) = f(x_2)$. Comme f est injective $x_1 = x_2$.

cela prouve que $g \circ f$ est injective.

0/1

2/ Démontrons que la composée deux surjectives est une surjective.

Comme g est surjective, $\forall\, c \in G$ il existe au moins un élément $b \in F$ tel que $g(b) = c$.

Comme f est surjective, il existe au moins un élément $a \in E$ tel que $f(a) = b$. Donc :

$\forall\, c \in G$ il existe au moins un élément $a \in E$ tel que

0/1

$g(f(a)) = c$. cela prouve que $g \circ f$ est surjective.

3/ Démonstrons que $g \circ f$ est injective $\Rightarrow f$ est injective.

Soit $x_1, x_2 \in E$ tel que

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. par hypothèse

$g \circ f$ est injective, donc $x_1 = x_2$. cela implique que

02

f est injective.

merci