Université -Tissemsilt
Dép. de Mathématiques-Informatique
Enseignant - A.Dellal

$1^{\text{er}}$ année M-I
Module : Algèbre I
Année Universitaire : 2022/2023

*Correction-Examen semestre -I-*

Durée : 1h 30 m

**Exercice 1** *( 8 pts )*

- Donner la négation des deux propositions suivantes et indiqué vraie ou fausse.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y \leq 0.$

   ..................................................................................................................................................
   $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y(y = -x - 1) \in \mathbb{R} : x + y = -1 \leq 0.$ (vraie)
   Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$

2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geq x$

   ..................................................................................................................................................
   $\exists x(x = 0) \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \geq x$ . (vraie)
   Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y) \in \mathbb{R} : y^2 < x$

---

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

3. Déterminer $f(A)$ tel que $A = [1; 2]$ .

   ..................................................................................................................................................
   $f'(x) = 2x - 4,$
   $f'(x) \leq 0$ pour $x \in A$, $f$ est décroissante.
   $f(A) = \{f(x),\ x \in A\}$
   soit $x \in A$,
   $1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow f(2) \leq f(x) \leq f(1) \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 0$
   $f(A) = [-1; 0]$

4. Déterminer $f^{-1}(B)$ tel que $B = [-1; 3]$

   ..................................................................................................................................................
   $f^{-1}(B) = \{x,\ f(x) \in B\}$
   $-1 \leq f(x) \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - 4x + 3 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \leq 3 \ \ et \ \ -1 \leq x^2 - 4x + 3$

   $x^2 - 4x + 3 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 4]$
   et
   $-1 \leq x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ vraie pour toute $x \in \mathbb{R}$
   Donc

$$f^{-1}(B) = [0; 4] \cap \mathbb{R} = [0; 4]$$

**Exercice 2** *( 12 pts )*

Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation suivante : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y=4k \ \ tq \ \ k\in\mathbb{Z}$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

   ........................................................................................................................................................

   Soient $x,y,z\in\mathbb{Z}$

   - Réflexive : $x-x=0=4\times 0 \Leftrightarrow x\mathcal{R}x$

   - Symétrique :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Leftrightarrow x-y=4k \ \ tq \ \ k\in\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow y-x=-4k=4(-K) \ \ tq \ \ -k\in\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

   - Transitive :

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y \ \ et \ \ y\mathcal{R}z &\Leftrightarrow x-y=4k \ \ et \ \ y-z=4k' \ \ tq \ \ k,k'\in\mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x-z=4(k+k') \Leftrightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

   $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence de 1 et 0.

   ........................................................................................................................................................

$$\begin{aligned} \dot{1} &= \{x\in\mathbb{Z}, \ tq \ \ x\mathcal{R}1\} = \{x\in\mathbb{Z}, \ tq \ \ x-1=4k, \ \ k\in\mathbb{Z}\} \\ &= \{x, \ tq \ \ x=4k+1, \ \ k\in\mathbb{Z}\} = \{4k+1, \ \ k\in\mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{0} &= \{x\in\mathbb{Z}, \ tq \ \ x\mathcal{R}0\} = \{x\in\mathbb{Z}, \ tq \ \ x=4k, \ \ k\in\mathbb{Z}\} \\ &= \{4k, \ \ k\in\mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

3. Donner la définition d'un corps.

   ........................................................................................................................................................

   Définition 1

   - On dit qu'un ensemble $(A,\oplus,\otimes)$est un corps si
   $(A,\oplus)$ est un groupe commutatif, $(A^*,\otimes)$ est un groupe et $\otimes$ distributive par rapport à $\oplus$ .
   Si de plus $\otimes$ est commutative, on dit que $A$ est un corps commutatif

   ---

   Définition 2

   - On dit qu'un anneau unitaire $(A,\oplus,\otimes)$ est un corps si tout élément non nul de $A$ est inversible.
   Si de plus $\otimes$ est commutative, on dit que $A$ est un corps commutatif

L'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3\}$ muni des deux lois de composition interne definies par les tableaux ci-dessous

| $\oplus$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

| $\otimes$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

4. L'ensemble $(A, \oplus, \otimes)$ est il un corps, justifier votre réponce.

.............................................................................................................................................

L'élément 2 ne possède pas un élément inverse (l'élément symétrique),
l'ensemble $(A, \oplus, \otimes)$ n'est pas un corps

5. Montrer que : $(x \oplus 1)^2 = x^2 \oplus 2x \oplus 1$ dans l'anneau $(A, \oplus, \otimes)$.

.............................................................................................................................................

En utilisant les propriétés de l'anneau commutatif $A$ .
"0" l'élément neutre pour $\oplus$ et "1" l'élément neutre pour $\otimes$.

$$\begin{aligned}
(x \oplus 1)^2 &= (x \oplus 1) \otimes (x \oplus 1) = (x \oplus 1) \otimes x \oplus (x \oplus 1) \otimes 1 \quad \text{(Distributivité )} \\
&= (x \otimes x \oplus 1 \otimes x) \oplus (x \otimes 1 \oplus 1 \otimes 1) \quad \text{(Distributivité + Associativité)} \\
&= x^2 \oplus x \oplus x \oplus 1 = x^2 \oplus 2x \oplus 1 \quad \text{( Associativité)}
\end{aligned}$$

6. Résoudre l'equation suivante : $x^2 \oplus 2x \oplus 1 = 0$ dans l'anneau $(A, \oplus, \otimes)$.

.............................................................................................................................................

En utilisant les propriétés de l'anneau commutatif $A$ et les deux tableaux, on a

$$\begin{aligned}
x^2 \oplus 2x \oplus 1 &= (x \oplus 1)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x \oplus 1 = 0 \quad ou \quad x \oplus 1 = 2 \\
&\Leftrightarrow x \oplus 1 \oplus 3 = 0 \oplus 3 \quad ou \quad x \oplus 1 \oplus 3 = 2 \oplus 3 \\
&\Leftrightarrow x \oplus 0 = 3 \quad ou \quad x \oplus 0 = 1 \\
&\Leftrightarrow x = 3 \quad ou \quad x = 1
\end{aligned}$$

7. Soient les polynomes suivant dans $\mathbb{R}$
$A(x) = x^2(x+2)^5(x+1)(x+3)^4, \quad B(x) = (x-2)(x+1)^2(x+3)^6$
- Calculer le pgcd de $A$ et $B$

.............................................................................................................................................

$pgcd(A, B) = (x+1)(x+3)^4$

- Calculer le ppcm de $A$ et $B$

.............................................................................................................................................

$ppcm(A, B) = x^2(x+2)^5(x-2)(x+1)^2(x+3)^6$