Université Oran 1 Ahmed Ben Bella

Faculté des Sciences Exactes et Appliquées

Licence 1 MI (2022/2023)

Examen de rattrapage d'Algèbre 1 - Durée 01h30

Exercice 1. (*04 pts*)
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier vos réponses.

1. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions logiques, alors on a l'équivalence suivante :
$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow (\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}).$$
2. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, et A une partie de E alors
$$\complement_F f(A) \subset f(\complement_E A)$$
3. Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$, alors $\mathcal{R}$ est anti-symétrique.
4. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, si $x\mathcal{R}y$ alors $\overline{x} = \overline{y}$.

Exercice 2. (*05 pts*)
Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ une application définie par $f(n) = \frac{1}{n^2}$.

1. Calculer $Im(f)$ et $f^{-1}(B)$ tel que $B = \{\frac{1}{2}, 9\}$.
2. f est-elle injective, surjective ?

Exercice 3. (*05 pts*)
Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie par :
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \ x\mathcal{R}y \ \Leftrightarrow \ x^3 - y^3 = \lambda(x^2 - y^2)$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. On pose $\lambda = 4$, calculer la classe d'équivalence de 2.

Exercice 4. (*06 pts*)
Soit $G = \mathbb{R} - \{-2\}$ et $*$ une loi définie sur G par :
$$x * y = xy + 2(x + y) + 2$$

1. Montrer que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

BON COURAGE.

Corrigé et barème

Corrigé 1. **0,25 pour chacune des réponses +0,75 pour la justification**

1. **Vraie** la preuve de cette équivalence peut être donnée de deux manières différentes. Soit enn utilisant l'équivalence $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \iff (\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}})$, on obtient :

$$\begin{aligned}(\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}) &\iff (\overline{\mathcal{P}} \vee \overline{\overline{\mathcal{Q}}}) \\ &\iff (\overline{\mathcal{P}} \vee \mathcal{Q}) \\ &\iff (\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{P}}) \\ &\iff (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})\end{aligned}$$

   Soit en utilisant les valeurs de vérité des implications $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et $(\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}})$.

2. **Fausse** Il suffit de prendre un contre exemple.
3. **Fausse** $\mathcal{R}$ n'est pas anti-symétrique, cela veut dire

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \text{ tels que } x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \text{ mais } x \neq y$$

   On a $0\mathcal{R}2\pi$ car $\cos^2 2\pi + \sin^2 0 = 1$, et aussi $2\pi\mathcal{R}0$ car $\cos^2 0 + \sin^2 2\pi = 1$ mais $0 \neq 2\pi$.

4. **Vraie** La double inclusion ($\overline{x} \subset \overline{y}$ et $\overline{y} \subset \overline{x}$) doit être montrée.

Corrigé 2. Soit $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ une application définie par $f(n) = \frac{1}{n^2}$.

1.

$$\begin{aligned}Im(f) &= \{f(n)/n \in \mathbb{N}^*\}\textbf{....0,5} \\ &= \{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, ...\}\textbf{....0,75}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f^{-1}(B) &= \{n \in \mathbb{N}^*/f(n) \in B\}\textbf{....0,5} \\ &= \big\{n \in \mathbb{N}^*/f(n) \in \{\frac{1}{2}, 9\}\big\} = \big\{\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{3}\big\} \cap \mathbb{N}^* = \emptyset\textbf{....0,75}\end{aligned}$$

2. f est injective $\Leftrightarrow \Big(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\Big)$ **....0,75**
   Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow \frac{1}{n_1^2} = \frac{1}{n_2^2} \Rightarrow n_1 = n_2$**....0,5**.
   D'après la question 1, on peut remarquer que f n'est pas surjective i.e

$$\exists y \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \neq y\textbf{....0,75}$$

   pour $y = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) \neq \frac{1}{2}$**....0,5**

Corrigé 3. 1. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

- Réflexive. **....0,5**
- Symétrique. **....1pt**
- Transitive. **....1pt**

2. Soit $\lambda = 4$, déterminons la classe d'équivalence de 2.

$$\overline{2} = \{x \in \mathbb{R}/x\mathcal{R}2\}\textbf{....0,75pt}$$

$$x \in \overline{2} \Leftrightarrow x\mathcal{R}2 \Leftrightarrow x^3 - 2^3 = 4(x^2 - 2^2)\textbf{....0,5pt}$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x - 4) = 0\textbf{....0,75}$$

Les solutions de l'équation ci-dessus sont $1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}$ et 2. Ainsi $\overline{2} = \{2, 1+\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}\}$**.....0,5**

Corrigé 4. Soit $G = \mathbb{R} - \{-2\}$ et $*$ une loi définie sur G par :

$$x * y = xy + 2(x+y) + 2$$

Montrons que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

1. $*$ est une loi de composition interne : en effet, $x * y \in \mathbb{R}$ car l'addition et la multiplication sont stables dans $\mathbb{R}$ **....0,5pt**.
Soient maintenant x, y deux réels différents de -2 et supposons par l'absurde que $x * y = -2$ alors

$$\begin{aligned} xy + 2(x+y) + 2 = -2 &\Rightarrow xy + 2x + 2y + 4 = 0 \\ &\Rightarrow x(y+2) + 2(y+2) = 0 \\ &\Rightarrow (x+2)(y+2) = 0 \\ &\Rightarrow x = -2 \vee y = -2 \end{aligned}$$

Ce qui est une contradiction, ainsi $x * y \in \mathbb{R} - \{-2\}$**....1pt**.

2. La commutativité : soient $x, y \in G^2$

$$x * y = xy + 2(x+y) + 2 = yx + 2(y+x) + 2 = y * x$$

d'où $*$ est commutative.**....0,5pt**

3. L'associativité : Soient $x, y, z \in G$: $(x*y)*z \stackrel{?}{=} x*(y*z)$

$$(x*y)*z = (xy+2(x+y)+2)*z = xyz+2z(x+y)+2z+2(xy+2(x+y)+2+z)+2$$
$$= xyz + 2xz + 2yz + 2xy + 4x + 4y + 4z + 6 \quad \textbf{....0,5pt}$$
$$x*(y*z) = x*(yz+2(y+z)+2) = xyz+2xy+2xz+2x+2(yz+2(y+z)+2+x)+2$$
$$= xyz + 2xy + 2xz + 2yz + 4y + 4z + 6 + 4x \quad \textbf{....0,5pt}$$

4. L'existence de l'élément neutre : $\exists e? \in \mathbb{R} - \{-2\}, \forall x \in \mathbb{R} - \{-2\} : x * e = x$**....0,5**
on a $x * e = x \Rightarrow xe + 2(x+e) + 2 = x \Rightarrow xe + x + 2e + 2 = 0$
$\Rightarrow e(x+2) = -(x+2)$ **....0,75pt** ce qui implique $e = -1 \in \mathbb{R}\{-2\}$ **....0,25**

5. L'existence du symétrique : $\forall x \in \mathbb{R}-\{-2\}, \exists ?x' \in \mathbb{R}-\{-2\} : x * x' = 0$**....0,5**
On a $x * x' = e = -1 \Rightarrow xx' + 2(x + x') + 2 = -1 \Rightarrow x'(x+2) = -3 - 2x$

$$\Rightarrow x' = \frac{-3-2x}{x+2} \overset{?}{\in} \mathbb{R}-\{-2\} \quad \textbf{.....0,5}$$

On montre que $x' \in \mathbb{R}-\{-2\}$ c'est à dire $x' \neq -2$. On suppose que

$$x' = \frac{-3-2x}{x+2} = -2 \Rightarrow -3 - 2x = -2x - 4 \Rightarrow -3 = -4$$

c'est absurde, d'où $x' \in \mathbb{R}-\{-2\}$ **....0,5**