Année Universitaire : 2020-2021

Département : S.C.M.I

Module : Algèbre 1

Correction des exercices du chapitre 4

Ex1 1) $*$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$ car $\forall$ x, y $\in \mathbb{R}$, on a : $x*y=(x+y-1) \in \mathbb{R}$.

2) $*$ est commutative car $\forall$ x, y $\in \mathbb{R}$, on a : $x*y = x+y-1=y+x-1=y*x$

3) $*$ est associative car $\forall$ x, y, z $\in \mathbb{R}$, on a : $(x*y)*z= x*(y*z)$. En effet : $(x*y)*z= (x+y-1)*z$

$=(x+y-1)+z-1=x+y+z-2$ et $x*(y*z)=x*(y+z-1)=x+(y+z-1)-1=x+y+z-2$.

4) Pour l'existence de l'élément neutre, noté e, il faut uniquement résoudre l'équation

$x*e=x$, d'inconnue e, et ce $\forall$ x $\in \mathbb{R}$ car $*$ est commutative.

$x*e=x \Rightarrow x+e-1=x$

$\Rightarrow e-1=0$

$\Rightarrow e=1$. Or : $1 \in \mathbb{R}$. Donc, l'élément neutre pour cette loi de composition interne est 1.

5) Soit x $\in \mathbb{R}$. x' est le symétrique de x si : $x*x'=1$, 1 étant l'élément neutre de la loi $*$. On se contente uniquement d'étudier cette équation car $*$ est commutative.

$x*x'=1 \Rightarrow x+x'-1=1$

$\Rightarrow x'=2-x$. on voit bien que x' est un élément de $\mathbb{R}$, pour tout x $\in \mathbb{R}$. Donc x admet bien un élément symétrique $x'=2-x$

Ex2 Il est facile de voir que, comme dans l'exercice 1, que $*$ est une loi de composition interne sur $]0, +\infty[$, commutative et associative. Par contre, elle n'admet pas d'élément neutre et d'élément symétrique.

Ex3 1) $*$ est une loi de composition interne sur G si :

$\forall$ x, y $\in$ G ; $x*y=(x+y-x.y) \in G$.

Soient x, y $\in G = \mathbb{Q}$-{1} et montrons que $(x*y) \in G = \mathbb{Q}$-{1}.

Raisonnons par l'absurde. Supposons que $x*y \notin G$. Donc

$x+y-x.y=1 \Rightarrow x+y=1+x.y$

$\Rightarrow x-x.y=1-y$

$\Rightarrow x\,(1-y)=1-y$

$\Rightarrow x=1$, car $y\neq 1$ par hypothèse. Or : $x=1$ contredit le fait que $x\neq 1$ ($x\in G$).

Donc, l'hypothèse envisagée est fausse, et de ce fait $(x*y) \in G = \mathbb{Q}-\{1\}$.

2) Pour que $(G, *)$ soit un groupe commutatif, il faut que $*$ soit commutative, admet un élément neutre $e \in G$, tout élément $x \in G$ admet un élément symétrique $x' \in G$ et $*$ soit aussi associative.

a) $*$ est commutative car $\forall$ x, y $\in$ G ; $x*y=x+y-x.y=y+x-y.x=y*x$

b) Existence de l'élément neutre e.

Soit $x \in G$; $x*e=x \Rightarrow x+e-x.e=x$

$\Rightarrow x+e(1-x)=x$

$\Rightarrow e\,(1-x)=0$

$\Rightarrow e=0$ ou $(1-x)=0$

$\Rightarrow e=0$ ou $x=1$(refusé car $x\neq 1$, par hypothèse.)

On remarque que : $e=0 \in G$. Donc l'élément neutre existe et vaut zéro.

c) Existence de l'élément symétrique.

Soit $x \in G$. x' est le symétrique de x si : $x*x'=0$, où 0 est l'élément neutre.

$x*x'=0 \Rightarrow x+x'-x.x'=0$

$\Rightarrow x'(1-x)=-x$

$\Rightarrow x' = \frac{-x}{1-x}$

Reste à prouver que $x' \in G=\mathbb{Q}-\{1\}$. Pour cela, raisonnons par l'absurde.

Supposons que $x' \notin G$, alors $x'=1 \Rightarrow x' = \frac{-x}{1-x} = 1$

$\Rightarrow -x=1-x$

$\Rightarrow 0=1$, ce qui est impossible. D'où : $x' \in G$.

Donc, $x' = \frac{-x}{1-x}$ est bien le symétrique de x.

d) $*$ est associative car $\forall$ x, y, z $\in$ G, on a : $(x*y)*z= x*(y*z)$. En effet :

$(x*y)*z=(x+y-x.y) *z=(x+y-x.y)+z-(x+y-x.y).z=x+y-x.y+z-x.z-y.z+x.y.z$

$x*(y*z)= x*(y+z-y.z)=x+(y+z-y.z)-x.(y+z-y.z)=x+y+z-y.z-x.y-x.z+x.y.z$

De a), b), c) et d), on déduit que $(G, *)$ est un groupe commutatif.