Université De Batna2 SCST, Matière : Math (M1), Année Universitaire 2020/2021

La suite de Série de TD N°03 (Dérivabilité)

Exercice 01
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = x\,|x|$$

1- Utilisons la définition de la dériveé, calculer $f'(x)$.
2- f est-elle dérivable en 0 ?.
Exercice 02
A-Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1\text{- } f(x) = \sqrt{3x^2+4x-1} \;\;, 2\text{- } g(x) = \ln\left[(x+1)^2\right] \;\;, 3\text{- } h(x) = \frac{x\ln(x)}{\cos(2x-1)}$$

B-Calculer la dérivée n^{ieme} des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{\,x} \quad , \quad g(x) = x^2+1$$

Exercice 03
Soit f la fonction polynomiale d´efinie par $f(x) = x^7 - x^4 + x^2 - x$,
-Montrer que $f'(x)$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0, 1[$.

Solution

Solution exercice 01
1- Rappel

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ si } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \text{ , (avec } l \text{ finie)}$$

On a

$$f(x) = x\,|x| \text{ donc } f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ si } x \prec 0 \end{cases}$$

Donc il faut Calculer la dérivée à droite et à gauche du f,

$$f'_d(x) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}(x+x_0) = 2x_0$$

$$\begin{aligned} f'_g(x) &= \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-x^2-(-x_0^2)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-(x^2-x_0^2)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{-(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} -(x+x_0) = -2x_0 \end{aligned}$$

Alors

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \geq 0 \\ -2x \text{ si } x \prec 0 \end{cases}$$

2- f est-elle dérivable en 0 ?.
On a

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=2(0)=0\ =\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2(0)=0$$

Alors f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Solution exercice 02
A- Calcule de dérivées:

$$\textbf{1-}\quad f(x)=\sqrt{3x^2+4x-1}, f'(x)=?,$$

On a $(\sqrt{u(x)})'=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ Alors Si on prend $u(x)=3x^2+4x-1\Rightarrow u'(x)=6x+4$ donc

$$f'(x)=\frac{3x+2}{\sqrt{3x^2+4x-1}}$$

$$\textbf{2-}\ g(x)=\ln\left[(x+1)^2\right]\ ,g'(x)=?,$$

On a $(\ln[u(x)])'=\frac{u'(x)}{u(x)}$ et $[u^n(x)]'=nu'(x)u^{n-1}(x)$,
Si on prend $u(x)=(x+1)^2\Rightarrow u'(x)=2(x+1)$ donc

$$g'(x)=\frac{2(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)}$$

$$\textbf{3-}\quad h(x)=\frac{x\ln(x)}{\cos(2x-1)}\ ,h'(x)=?,$$

On a $(\frac{f}{g})'(x)=\frac{f'(x).g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ Si $g(x)\neq 0$,
Si on prend $f(x)=x\ln(x)$, On a $(u.v)'(x)=u'(x).v(x)+u(x)v'(x)$
donc $f'(x)=\ln(x)+x(\frac{1}{x})=\ln(x)+1$
$g(x)=\cos(2x-1)$ on a $\cos[w(x)]'=-w'(x)\sin[w(x)]$ donc $g'(x)=-2\sin(2x-1)$
Alors

$$h'(x)=\frac{[\ln(x)+1]\cos(2x-1)+2x\ln(x)[\sin(2x-1)]}{[\cos(2x-1)]^2}$$

B-Calculer de la dérivée n^{ieme} de la fonction $f(x)=e^{\ x}$
$f(x)=e^{\ x}=f^{(0)}$
$f'(x)=e^{\ x}=f^{(1)}$
$f''(x)=e^{\ x}=f^{(2)}$

$f^{(n)}=e^{\ x}$
Solution exercice 03
Soit f tq $f(x)=x^7-x^4+x^2-x$,
-Montrons que $f'(x)$ admet au moins une solution sur l'intervalle $]0,1[$.
1- On a f est continue sur $\mathbb{R}$, d'ou continue sur $[0,1]$
2- f est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'ou f est dérivable sur $]0,1[$
3- et $f0)=f(1)=0$
Alors d'aprés le Théoréme de Rolle, il existe $c\in]0,1[$ tel que $f'(c)=0$.