UNIVERSITE DE BATNA 2
SOCLE COMMUN EN SCIENCES ET TECHNOLOGIE
MATIERE : MATHEMATIQUES (M1)
1ère ANNEE 2020/2021

SERIE DE TD N°04 « LES STRUCTURES ALGEBRIQUES »

EXERCICE 01

On munit IR de la loi de composition interne notée « $*$ » définie par :

$$\forall x, y \in \mathrm{IR}, \quad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1).$$

Montrer que $*$ est commutative, non associative, et que 1 est élément neutre.

EXERCICE 02

On définit dans G= IR* $\times$ IR, la loi de composition interne « $*$ » par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathrm{IR}^2, \quad (x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y).$$

a) Montrer que (G,$*$) est un groupe non commutatif**.**

b) Montrer que $(]0,+\infty[\times IR, *)$ est un sous-groupe de (G,$*$).

EXERCICE N°03

Soit (G , *) un groupe, on considère le centre Z de G défini par:

$$Z = \{z \in G, \forall g \in G, z * g = g * z\}$$

1) Montrer que (Z,$*$) est un sous-groupe de (G,$*$).
2) Si (G , *) est un groupe abélien, que vaut Z ?

EXERCICE N°04

Dans A = IR $\times$ IR, on définit deux lois de compositions internes « + » et « $*$ » par :

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{A}, \begin{cases} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{cases}$$

a) Montre que (A , +) est un groupe commutatif.

b) Montre que (A , + , $*$) est un anneau commutatif.

c) Est ce que (A , + , $*$) est un anneau unitaire ?

Correction d'exercice 1

On a :

$$x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1) = yx + (y^2 - 1)(x^2 - 1) = y * x$$

La loi $*$ est commutative

Pour montrer que la loi n'est pas associative, il suffit de trouver x, y et z tels que :

$$x * (y * z) \neq (x * y) * z$$

Comme on le verra ci-dessous, 1 sera l'élément neutre il ne faut pas prendre 1 dans x, y et z.

Prenons, par exemple : $x = 0$, $y = 2$ et $z = 3$

$$x * (y * z) = 0 * (2 * 3) = 0 * \left(2 \times 3 + (2^2 - 1)(3^2 - 1)\right) = 0 * (6 + 3 \times 8) = 0 * 30$$
$$= 0 \times 30 + (0^2 - 1)(30^2 - 1) = -899$$
$$(x * y) * z = (0 * 2) * 3 = \left(0 \times 2 + (0^2 - 1)(2^2 - 1)\right) * 3 = (-3) * 3$$
$$= -3 \times 3 + ((-3)^2 - 1)(3^2 - 1) = -9 + 8^2 = 55$$

La loi $*$ n'est pas associative

$$1 * x = 1 \times x + (1^2 - 1)(x^2 - 1) = x$$

De plus, comme la loi est commutative $x * 1 = 1 * x$

On a bien $x * 1 = 1 * x = x$, 1 est l'élément neutre.

Correction d'exercice 2

1. Si $x \neq 0$ et $x' \neq 0$ alors $xx' \neq 0$ donc $(x, y) * (x', y') = (xx', xy' + y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

   La loi $*$ est une loi interne.

   $$(x, y) * \left((x', y') * (x'', y'')\right) = (x, y) * (x'x'', x'y'' + y') = (xx'x'', x(x'y'' + y') + y)$$
   $$= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$$

   Et

   $$\left((x, y) * (x', y')\right) * (x'', y'') = (xx', xy' + y) * (x'', y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y)$$

   Donc la loi $*$ est associative.

   Soit (a, b) tel que pour tout $(x, y) \in G$:

   $$(a, b) * (x, y) = (x, y) = (x, y) * (a, b)$$

   Ces égalités équivalent à :

   $$(ax, ay + b) = (x, y) = (xa, xb + y) \Leftrightarrow \begin{cases} ax = x = xa \\ ay + b = y = xb + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

   Donc $(1,0)$ est l'élément neutre.

   Soit $(x, y) \in G$, on cherche (x', y') tel que $(x, y) * (x', y') = (1,0) = (x', y') * (x, y)$

   Ces égalités équivalent à :

   $$(xx', xy' + y) = (1,0) = (x'x, x'y + y') \Leftrightarrow \begin{cases} xx' = 1 = x'x \\ xy' + y = 0 = x'y + y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \\ xy' + y = 0 = \dfrac{1}{x}y + y' \end{cases}$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{x} \neq 0 \\ y' = -\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

   Le symétrique de (x, y) est $\left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$.

   Donc $(G, *)$ est un groupe.

   Comme $(1,2) * (2,0) = (2,2)$ et que $(2,0) * (1,2) = (2,4)$ il est clair que ce groupe n'est pas commutatif.

2. L'élément neutre de $(G,*)$, $(1,0) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

Soit $(x,y) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ et $(x',y') \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$. Alors

$$(x,y) * \left(\frac{1}{x'}, -\frac{y'}{x'}\right) = \left(\frac{x}{x'}, x\left(-\frac{y'}{x'}\right) + y\right) = \left(\frac{x}{x'}, \frac{-xy' + x'y}{x'}\right)$$

Comme $\frac{x}{x'} > 0$ alors $\left(\frac{x}{x'}, \frac{-xy'+x'y}{x'}\right) \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$.

Donc $(]0,+\infty[\times \mathbb{R},*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$.

Correction d'exercice 4

1. $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') \in A$ donc la loi est interne.

$$\begin{aligned}(x,y) + [(x',y') + (x'',y'')] &= (x,y) + (x'+x'', y'+y'') = \big(x + (x'+x''), y + (y'+y'')\big) \\ &= \big((x+x')+x'', (y+y')+y''\big) = [(x,y)+(x',y')] + (x'',y'')\end{aligned}$$

Donc la loi + est associative.

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y') = (x'+x, y'+y) = (x',y') + (x,y)$$

Donc la loi + est commutative

Soit (a,b) tel que $(x,y) + (a,b) = (x,y)$, il est clair que $(a,b) = (0,0)$ est l'unique élément neutre.

Soit (x',y') tel que $(x,y) + (x',y') = (0,0)$ cela équivaut à

$$(x+x', y+y') = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + x' = 0 \\ y + y' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Donc le symétrique de (x,y) est $(-x,-y)$.

Donc $(A,+)$ est un groupe commutatif.

2.

a) $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + x'y) = (x'x, x'y + xy') = (x',y') * (x,y)$ donc $*$ est commutative.

b)

$$\begin{aligned}[(x,y) * (x',y')] * (x'',y'') &= (xx', xy' + x'y) * (x'',y'') = \big(xx'x'', xx'y'' + x''(xy' + x'y)\big) \\ &= (xx'x'', xx'y'' + x''xy' + x''x'y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x,y) * [(x',y') * (x'',y'')] &= (x,y) * (x'x'', x'y'' + x''y') = (xx'x'', x(x'y'' + x''y') + x'x''y) \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xx''y' + x'x''y)\end{aligned}$$

Donc $[(x,y) * (x',y')] * (x'',y'') = (x,y) * [(x',y') * (x'',y'')]$

La loi $*$ est associative.

c) Soit (e,f) tel que pour tout $(x,y) \in A$, $(x,y) * (e,f) = (x,y)$, e et f vérifient :

$$\begin{cases} xe = x \\ xf + ye = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ xf + y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 1 \\ f = 0 \end{cases}$$

$(1,0) \in A$ est l'élément neutre de A pour la loi $*$.

d) Toutes les propriétés pour qu'un ensemble muni de deux lois soit un anneau sont dans les questions précédentes sauf la distributivité de $*$ par rapport à l'addition (à gauche ou à droite puisque la loi $*$ est commutative, c'est d'ailleurs cette commutativité qui rend l'anneau commutatif).

$$\begin{aligned}(x,y) * [(x',y') + (x'' + y'')] &= (x,y) * (x' + x'', y' + y'') \\ &= (x(x'+x''), x(y'+y'') + (x'+x'')y) = (xx' + xx'', xy' + xy'' + x'y + x''y) \\ &= (xx' + xx'', xy' + x'y + xy'' + x''y) = (xx', xy' + x'y) + (xx'', xy'' + x''y) \\ &= (x,y) * (x',y') + (x,y) * (x'',y'')\end{aligned}$$

Et voilà, $(A,+,*)$ est un anneau commutatif.

Correction d'exercice 3

1. $\forall g \in G \quad e * g = g * e$ donc $e \in Z$.
   Pour tout $z_1 \in Z$ et pour tout $z_2 \in Z$,
   $$(z_1 * z_2^{-1}) * g = z_1 * (z_2^{-1} * g) = z_1 * (g^{-1} * z_2)^{-1}$$
   Or $g^{-1} \in G$ donc $g^{-1} * z_2 = z_2 * g^{-1}$
   $$\begin{aligned}(z_1 * z_2^{-1}) * g &= z_1 * (g^{-1} * z_2)^{-1} = z_1 * (z_2 * g^{-1})^{-1} = z_1 * (g * z_2^{-1}) = (z_1 * g) * z_2^{-1} \\ &= (g * z_1) * z_2^{-1} = g * (z_1 * z_2^{-1})\end{aligned}$$
   Ce qui montre que $z_1 * z_2^{-1} \in Z$.
   Donc $(Z,*)$ est un sous-groupe de $(G,*)$
2. Si G est commutatif alors pour tout $z \in G$ et pour $g \in G$, $z * g = g * z$ donc $Z = G$.