UNIVERSITE DE BATNA2
SOCLE COMMUN EN SCIENCES ET TECHNOLOGIE
MATIERE : MATHEMATIQUE(M1).
ANNEE UNIVERSITAIRE 2020/2021

Série de TD N°03 (Les fonctions réelles à une variable réelle)

Exercice 01
Montrer à l'aide de la définition de la limite que :

$$\textbf{1}.\lim_{x\to 2}(4x+5)=13 \quad , \quad \textbf{2}.\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

Exercice 02
Caculer les limites suivantes:

$$\textbf{1-}\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-2x-3} \;,\; \textbf{2-}\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} \;,\; \textbf{3-}\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}\right) \;,\; \textbf{4-}\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$\textbf{5-}\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} \;,\; \textbf{6-}\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2-x-2}{3x^2+2x-2} \;,\; \textbf{7-}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+2\left|x\right|}{x} \;,\; \textbf{8-}\lim_{x\to +\infty}\frac{\cos x}{x}$$

$$\textbf{9-}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} \;,\; \textbf{10-}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x} \;,\; \textbf{11-}\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{x^2} \;,\; \textbf{12-}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}$$

Exercice 03
Etudier la continuité de la fonction suivante:

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Exercice 04
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x\neq 0$ calculer $f'(x)$.
3. Calculer $\lim_{x\to 0}f'(x)$

Exercice 05
Utilisons la règle de l'hopital, Calculer les limites suivantes:

$$\textbf{1-}\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \quad , \quad \textbf{2-}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}$$

_ Solution Exo1 _ Corrigé de la série de TD N° 03. Math 1

_1_ On va montrer que $\lim\limits_{x \to 2} (4x+5) = 13$.

Rappel On a : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

Dans notre exemple : $x_0 = 2$ et $l = 13$. Alors

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \ |x-2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - 13| < \varepsilon.$

_ Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$|f(x) - l| = |4x+5-13|$$
$$= |4x - 8|$$
$$= 4|x-2| < \varepsilon$$
$$\Longrightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{4}.$$ Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{4}, \forall x \in \mathbb{R}, \ |x-2| < \delta \Longrightarrow |4x+5-13| < \varepsilon.$

Ainsi $\lim\limits_{x \to 2} (4x+5) = 13$.

_2_ Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

Rappel On a : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow f(x) > A.$

Dans notre exemple : $x_0 = 0$ Alors

$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*, \ |x| < \delta \Longrightarrow \frac{1}{x^2} > A,$

Soit $A > 0$, $\frac{1}{x^2} > A \Longrightarrow \frac{1}{A} > x^2$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{\sqrt{A}} < x < \frac{1}{\sqrt{A}}$$

On a $|a| \leq b \Leftrightarrow -\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$

$$\Longrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{A}}$$

Prenons $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ existe, Alors $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Solution ex02 :

-1 $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3} = \frac{0}{0}$. Forme Indéterminé

— Lever la forme indéterminé :

Factoriser pour faire apparaitre une facteur $(x-a)$ au numérateur et au dénominateur.

- Dans cette exemple. 3 est solution de notre fonction. $(x-3)$

Alors $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$.

Propriété : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Si $\Delta > 0$, il existe deux solutions x_1 et x_2. tq.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} = 3.$$

- $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$.

Il reste de calculer la limite.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-2x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{x-3}}{(x+1)\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{4}.$$

2 - $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\sqrt{5-1}-2}{5-5} = \frac{0}{0}$ F.I

- Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

Alors on a $\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$

on a $(a^2-b^2) = (a-b)(a+b)$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\cancel{x-1-4}}{\cancel{(x-5)}(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$

$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$.

3 - $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) = \frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^+} = +\infty - \infty$. F.I

$= \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} \left(1-(x-1)\right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} (2-x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

4 - $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\infty}{\infty}$. F.I

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}.\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

$-5-\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} = ?$

En $+\infty$, le numérateur tend vers l'infini, et le dénominateur est de la forme $+\infty-\infty$. (F.I).

alors : $$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$= \frac{x}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}$$; En $+\infty$ $x>0$. donc $|x|=x$

$$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\cancel{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}}$$

Donc $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}+1}-\sqrt{\cancelto{0}{\frac{1}{x^2}}+\cancelto{0}{\frac{1}{x}}}} = \underline{1}.$$

$-6-\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-x-2}{3x^2+2x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = \frac{2}{3}.$

-7- $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$, on a $x \overset{>}{\to} 0$ alors $|x| = x$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x+2 = 2.$$

-8- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} = ?$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ n'existe pas .

on utilisons le théorème de comparaison.

on a $-1 \leq \cos x \leq 1$;

Comme $x \to +\infty$, càd $x > 0$, on divise par x. par tout :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x} .$$

on prend la limite. $\underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x}}_{0} \leq \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} \leq \underbrace{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}}_{0}$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \lim \frac{\cos x}{x} \leq 0$$

Alors. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0.$

-9- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x} = 3.$

On a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(ax)}{x} = a$. $\forall a \in \mathbb{R}$

-10- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{2x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\frac{1}{2} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}} = 2.$

-11- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x}(1-\cos x)}{x^2}$

$= 0,$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

5

- 12 - $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$

On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\cos x - 1}{x^2}}{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{- \overbrace{\dfrac{1 - \cos x}{x^2}}^{\to \frac{1}{2}}}{\Big(\underbrace{\dfrac{\sin x}{x}}_{\to 1}\Big)^2} = -\frac{1}{2}.$$

- Solution ex8) -

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- Notons déjà que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$, il reste à étudier la continuité en 0.

D'autre part $\sqrt{x^2} = |x|$. nous allons donc distinguer deux cas : $x < 0$ et $x > 0$.

Si $x < 0$ alors. $f(x) = x + \dfrac{-\cancel{x}}{\cancel{x}} = x - 1.$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - 1) = -1.$$

Si $x > 0$ alors: $f(x) = x + \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = x + 1.$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x + 1) = 1$$

Par conséquent $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

Ce qui montre que f n'est pas continue en 0.

Solution Exercice 04

Soit f ta $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

-1- f est continue sur $\mathbb{R}$?

Pour $x \neq 0$. la fonction $-\frac{1}{x^2}$ est continue, et l'exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

- donc $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Au point $x = 0$,

$\lim_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$; donc $\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$.

Ainsi f est continue en 0.

-2- Calcul de $f'(x)$ pour $x \neq 0$:

$\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \left(\frac{-1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} =$

On a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$

$= -\left(\frac{-2}{x^3}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.}$$

-3- Calcul de $\lim_{x \to 0} f'(x)$.

On pose $u = \frac{1}{x}$ $\Longrightarrow f'(x) = 2u^3 . e^{-u^2}$

Lorsque $x \longrightarrow 0^{\pm}$. $-u^2 \longrightarrow -\infty$; donc $e^{-u^2} \to 0$,

et $2u^3 \longrightarrow \mp\infty$; Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty . 0$, Mais, l'exponentielle l'emporte sur les polynomes.

donc $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{u \to +\infty} 2u^3 \cdot e^{-u^2} = 0.$

Solution Exercice 05

-1- $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = ?$ $\frac{0}{0}$. FI

Utilisons la règle de l'hopital.

on a, $f(x) = \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$
et $g(x) = x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

donc $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = 1.$

-2- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{\infty}{\infty}$. F.I.

on a. e^x et x^2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$

Alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{\infty}{\infty}$. FI

de même, les deux fonctions e^x et $2x$ sont dérivables.

Alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$.