Université de Batna2 SCST,
Matière : Math (M1),
Année-Univ 2020/2021

TD 4 -Structure Algebrique-

Exercice 01
On définit sur $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ la loi de composition interne $*$ comme suit:

$$\forall (x,y),(x',y') \in G, \quad (x,y)*(x',y') = (xx', xy'+y)$$

-Démontrer que $(G,*)$ est un groupe non commutatif.

Exercice 02
Dans les questions suivantes, déterminer si la partie H est un sous-groupe du groupe G.
1- $G = (Z,+)$; $H = \{\text{nombres pairs}\}$.
2- $G = (Z,+)$; $H = \{\text{nombres impairs}\}$.

Exercice 03
Les applications $f : G \to H$ définies ci-dessous sont-elles des morphismes de groupes?
1- $G = (\mathbb{R}_+^*, \times), H = (\mathbb{R}, +),\ f(x) = \ln(x)$.
2- $G = (\mathbb{R}^*, \times), H = (\mathbb{R}^*, \times),\ f(x) = |x|$.
Exercice 04
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, On a deux LCI suivantes:

$$x \ \tau \ y = x + y - 1 \qquad \text{et} \qquad x * y = xy - x - y + 2$$

-Montrer que $(\mathbb{R}, \tau, *)$ est un corps commutatif.

Exercices Supplémentaires

Exercice 01
Montrer que $(\mathbb{R}^*, *)$ tel que $x * y = \frac{xy}{2}$ est un groupe abelien.
Exercice 02
On munit l'ensemble $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois de compositions internes " $+$ " et " $*$ " définies par:

$$(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

et

$$(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + x'y)$$

1-Montrer que $(A,+,*)$ est un anneau commutatif unitaire.
2-Est ce que $(A,+,*)$ est un corps commutatif?

Solution TD4

Exercice ① : On définit sur $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ loi interne $*$ comme suit :

$$\forall (x,y), (x',y') \in G, \quad (x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$$

- Montrer que $(G, *)$ est un groupe non commutatif.

Solution : $(G, *)$ est un groupe ssi

$$\begin{cases} 1)\ \forall (x,y), (x',y') \in G,\ (x,y) * (x',y') \in G \\ 2)\ * \text{ admet un élément neutre} \\ 3)\ \text{Tout élément de } G \text{ admet un inverse dans } G \\ 4)\ * \text{ est associative} \end{cases}$$

① On a $\forall (\underset{\mathbb{R}^*}{x}, \underset{\mathbb{R}}{y}), (\underset{\mathbb{R}^*}{x'}, \underset{\mathbb{R}}{y'}) \in G$, $(\underbrace{xx'}_{\in \mathbb{R}^*}, \underbrace{xy' + y}_{\in \mathbb{R}}) \in G$

② $(e, \acute{e}) \in G$ est un élément neutre ssi

$$\forall (x,y), (e,\acute{e}) \in G. \quad (x,y) * (e,\acute{e}) = (e,\acute{e}) * (x,y) = (x,y)$$

$$\begin{cases} (x,y) * (e,\acute{e}) = (x,y) \\ (e,\acute{e}) * (x,y) = (x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (xe, x\acute{e} + y) = (x,y) \\ (ex, ey + \acute{e}) = (x,y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \cdot e = x \\ x\acute{e} + y = y \\ e \cdot x = x \\ ey + \acute{e} = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{e = 1} \in \mathbb{R}^* \\ \acute{e} = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$y + \acute{e} = y \Rightarrow \acute{e} = 0$

Alors $(e, \acute{e}) = (1, 0) \in G$ est l'élément neutre

③ l'élément inverse :

$$\forall (x,y) \in G,\ \exists (x',y') \in G :$$
$$(x,y) * (x',y') = (x',y') * (x,y) = (e, e') = (1,0)$$

$$\begin{cases} (x,y)*(x',y') = (1,0) \\ (x',y') * (x,y) = (1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xx',\ xy'+y = (1,0) \\ x'x,\ x'y+y' = (1,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x.x' = 1 \\ xy'+y = 0 \\ x'.x = 1 \\ x'y+y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*, \text{ et } x \in \mathbb{R}^*. \\ y' = \frac{-y}{x} \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ainsi le symétrique de $(x,y) \in G$ est $(x',y') = \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x}\right) \in G$

③ * est associative ssi :

$$\forall (x,y), (x',y'), (x'',y'') \in G :$$
$$(x,y) * \left[(x',y') * (x'',y'')\right] = \left[(x,y) * (x',y')\right] * (x'',y'')$$

$$(x,y) * \left[(x',y') * (x'',y'')\right] = (x,y) * \left[x'x'',\ x'y''+y'\right]$$

$$= xx'x'',\ x(x'y''+y')+y$$

$$= (xx'x'',\ xx'y''+xy'+y) \sim ①$$

$$[(x,y)*(x',y')]*(x'',y'') = (xx', xy'+y)*(x'',y'')$$

$$= (xx'x'', xx'y''+xy'+y) \quad \text{--- } ②$$

① = ② donc * est associative

Alors d'après 1), 2) et 3). $(G,*)$ est un groupe

* est commutatif ssi :

$\forall (x,y),(x',y') \in G, \quad (x,y)*(x',y') = (x',y')*(x,y)$

On a $(x,y)*(x',y') = (xx', xy'+y)$ -- ①

$(x',y')*(x,y) = (x'x, x'y+y')$ - ②

① ≠ ② Alors * est non commutatif.

$(G,*)$ est un groupe non commutatif

par exemple $(x,y) = (2,0) \in G$

et $(x',y') = (1,1) \in G$

$(2,0)*(1,1) = (2,2)$

$(1,1)*(2,0) = (2,1)$

Solution Ex02

Rappel : Soit $(G, *)$ un groupe, et soit H une partie de G ($E \subset G$),
H est un sous groupe de G ssi
1. $e \in H$ (e est l'élément neutre de $*$)
2. Pour tout $x, y \in H$: $x * y \in H$
3. Pour tout $x \in H$, $x' \in H$ (x' est l'élément symétrique).

① $G = (\mathbb{Z}, +)$ est un groupe.
$H = \{$nombres pairs$\}$ est un sous groupe de G ?

1. On a $e = 0 \in H$ et $H = \{ \ldots -4, -2, 0, 2, 4, 6 \ldots \}$
2. $\forall x, y \in H$ alors $x + y \in H$. (La somme de deux entiers pairs donne un entier pair).
3. $\forall x \in H$ on a $x' = -x \in H$

D'après 1, 2, 3, H est un sous_groupe de G.

② $G = (\mathbb{Z}, +)$ est un groupe, $H = \{$nombres impairs$\}$?

On a $e = 0 \notin H$ donc H n'est pas un sous_groupe de G.

Solution Ex03

①
$$f : (\mathbb{R}^*_+, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}, +)$$
$$x \longmapsto f(x) = \ln x$$

f est un morphisme de groupes ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}^*_+$,
$$f(x \times y) = f(x) + f(y).$$

On a $f(x \times y) = \ln(x \cdot y)$
$= \ln(x) + \ln(y)$
$= f(x) + f(y)$

Et donc f est bien un morphisme de groupes

②
$$f : (\mathbb{R}^*, \times) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \times)$$
$$x \longmapsto |x|$$

f est morphisme de groupes ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $f(x \cdot y) = f(x) f(y)$

On a pour tout $x, y \neq 0$,
$f(x \times y) = |x \times y|$
$= |x| \times |y|$
$= f(x) \times f(y)$

donc f est un morphisme de groupes.

Exercice ④ : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a deux L.C.I suivantes

$$\boxed{x \top y = x + y - 1} \quad \text{et} \quad \boxed{x * y = xy - x - y + 2}$$

Montrer que $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un corps.

$(\mathbb{R}, \top, *)$ est un corps commutatif si :

① $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe abélien

② $(\mathbb{R} \setminus \{e_{\mathbb{R}}\}, *)$ est un groupe abélien

③ $*$ est distributive par rapport $\top$.

Solution : ① $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe abélien ?

① $\forall x, y \in \mathbb{R}$ alors $x + y - 1 \in \mathbb{R}$

② $\top$ est commutatif : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $x \top y = y \top x$

$x \top y = x + y - 1 = y + x - 1 = y \top x$ ($\top$ comm)

③ $\top$ est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$

$x \top (y \top z) = x + (y \top z) - 1$
$= x + y + z - 1 - 1 = x + y + z - 2$ ①

$(x \top y) \top z = (x \top y) + z - 1 = x + y - 1 + z - 1 = x + y + z - 2$ ②

$\top$ assoc

④ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists e \in \mathbb{R}$ $x \top e = e \top x = x$

$x \top e = x \Rightarrow \cancel{x} + e - 1 = \cancel{x} \Rightarrow \boxed{e = 1} \in \mathbb{R}$ élément neutre existe.

⑤ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists x' \in \mathbb{R}$ $x \top x' = x' \top x = e = 1$

$x \top x' = 1 \Rightarrow x + x' - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{x' = 2 - x} \in \mathbb{R}$ élément symétrique existe

Alors $(\mathbb{R}, \top)$ est un groupe commutative

② $(\mathbb{R}\setminus\{1\}, *)$ est un groupe comm.

$$\boxed{x * y = xy - x - y + 2}$$

① $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $xy \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $-x \in \mathbb{R}$, $-y \in \mathbb{R}$ / $xy - x - y + 2 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

② $*$ commutat. $\forall x, y \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. $x * y = y * x$

alors. $x * y = xy - x - y + 2 = yx - y - x + 2 = y * x$

③ $*$ Assoc. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. $x*(y*z) = (x*y)*z$

$$\begin{aligned}
x*(y*z) &= x(y*z) - x - (y*z) + 2 \\
&= x(yz - y - z + 2) - x - (yz - y - z + 2) + 2 \\
&= xyz - xy - xz + 2x - x - yz + y + z - \cancel{2} \cancel{+2} \\
&= xyz - xy - xz + x - yz + y + z \quad — ①
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x*y)*z &= (x*y)\cdot z - (x*y) - z + 2 \\
&= (xy - x - y + 2)z - (xy - x - y + 2) - z + 2 \\
&= xyz - xz - yz + 2z - xy + x + y - \cancel{2} - z \cancel{+2} \\
&= xyz - xz - yz + z - xy + x + y \quad — ②
\end{aligned}$$

① = ②. Alors $*$ est associative

④ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\exists e \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. $x * e = e * x = x$

$x * e = x \Rightarrow xe - x - e + 2 = x \Rightarrow xe - e = 2x - 2$

$\Rightarrow e(x-1) = 2(x-1) \Rightarrow e = \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 2 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. existe

⑤ $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $\exists x' \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. $x * x' = x' * x = e = 2$

$x * x' = 2 \Rightarrow xx' - x - x' + \cancel{2} = \cancel{2}$

$\Rightarrow x'(x-1) = x \Rightarrow \boxed{x' = \frac{x}{x-1}} \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$

D'où $(\mathbb{R}\setminus\{1\}, *)$ est un groupe abélien

③ * est distributive par rapport à $\top$.

$$\boxed{x \top y = x+y-1}$$

$$\boxed{x * y = xy - x - y + 2}$$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $\quad x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z)$ — ①

et $\quad (x \top y) * z = (x * z) \top (y * z)$ — ②

$x * (y \top z) = x(y \top z) - x - (y \top z) + 2$

$= x(y+z-1) - x - (y+z-1) + 2$

$= xy + xz - \cancel{x} - x - y - z + 1 + 2 + 2 - 2$

$= \underbrace{xy - x - y + 2}_{(x * y)} + \underbrace{xz - x - z + 2}_{(x * z)} - 1$

$= (x * y) \top (x * z)$.

$(x * y) \top (x * z)$

$= (x * y) + (x * z) - 1$

$= xy - x - z + 2 + xz - x - z + 2 - 1$

$(x \top y) * z \overset{?}{=} (x * z) \top (y * z)$

$= (x \top y)z - (x \top y) - z + 2$

$= (x+y-1)z - (x+y-1) - z + 2$

$= xz + yz - z - x - y + 1 - z + 2 + 2 - 2$

$= \underbrace{xz - x - z + 2}_{(x * z)} \top \underbrace{+ yz - y - z + 2}_{(y * z)} - 1$.

$(x * z) \top (y * z)$

$= (x * z) + (y * z) - 1$

$= xz - x - z + 2 + yz - y - z + 2 - 1$

D'après ①, ② et ③

$(\mathbb{R}, \top, *)$ est un anneau commutatif

Solution exercices supplémentaires

Exercice (1) : Montrer que $(\mathbb{R}^*, *)$, $x * y = \frac{x.y}{2}$.

est un groupe commutatif ?

(1) On a $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $\frac{xy}{2} \in \mathbb{R}^*$

(2) $*$ admet un élément neutre. ssi $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x * e = e * x = x$

$x * e = x \Rightarrow \frac{x.e}{2} = x \Rightarrow \boxed{e = 2}$ donc l'élément neutre existe

$e * x = x \Rightarrow \frac{e.x}{2} = x \Rightarrow e = 2$ $\boxed{e = 2} \in \mathbb{R}^*$

(3) Elément symétrique : $\exists x' \in \mathbb{R}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$: $x * x' = x' * x = e$

$x * x' = 2 \Rightarrow \frac{x.x'}{2} = 2 \Rightarrow x' = \frac{4}{x}$ l'élément symétrique

$x' * x = 2 \Rightarrow \frac{x'x}{2} = 2 \Rightarrow x' = 4/x$. existe. $\boxed{x' = \frac{4}{x}} \in \mathbb{R}^*$

(4) $*$ est associative ssi $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*$, $x * (y * z) = (x * y) * z$.

$x * (y * z) = \frac{x.\left(\frac{yz}{2}\right)}{2} = \frac{xyz}{4}$ ... ① Alors $*$ est transitive.

$(x * y) * z = \frac{\frac{xy}{2}.z}{2} = \frac{xy.z}{4}$ ... ②

(5) $*$ est commutative ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $x * y = y * x$

$x * y = \frac{x.y}{2} = \frac{yx}{2} = y * x$ $(*)$ est commutative

Exercice ② : On munit l'ensemble $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de deux lois définies par : $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$.

et : $(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + x'y)$.

- Montrer que $(A, +, *)$ est un anneau commutatif.

Solution

1) $(A,+)$ est un groupe commutatif ?

i) $\forall (x,y), (x',y') \in A \quad (x,y) + (x',y') \in A$ ✓

ii) $\forall (x,y) \in A, \exists (e,\bar{e}) \in A. \quad (x,y) + (e,\bar{e}) = (e,\bar{e}) + (x,y) = (x,y)$

$$\begin{cases} (x,y) + (e,\bar{e}) = (x,y) \\ (e,\bar{e}) + (x,y) = (x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+e, y+\bar{e}) = (x,y) \\ (e+x, \bar{e}+y) = (x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+e = x \\ y+\bar{e} = y \end{cases}$$

Alors $(e,\bar{e}) = (0,0) \in A$ donc l'élément neutre existe

iii) $\forall (x,y) \in A, \exists (x',y') \in A, \quad (x,y) + (x',y') = (x',y') + (x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} (x,y) + (x',y') = (0,0) \\ (x',y') + (x,y) = (0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+x', y+y') = (0,0) \\ (x'+x, y'+y) = (0,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+x' = 0 \\ y+y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

donc $\exists (x',y') = (-x,-y) \in A$.

iiii) $+$ est associative. $\forall (x,y), (x',y'), (x'',y'') \in A$

$$\underbrace{(x,y) + [(x',y') + (x'',y'')]}_{①} = \underbrace{[(x,y) + (x',y')] + (x'',y'')}_{②}$$

9

$① = (x,y) + (x'+x'', y'+y'') = (x+x'+x'', y+y'+y'')$

$② = (x+x', y+y') + (x'',y'') = (x+x'+x'', y+y'+y'')$

donc $① = ②$

$(A,+)$ est un groupe

Donc $+$ est associative

mien) + est commutative. SSI

$\forall (x,y),(x',y') \in A, \quad \underbrace{(x,y)+(x',y')}_{①} = \underbrace{(x',y')+(x,y)}_{②}$

$① = (x+x', y+y')$ $\quad ① = ②$ Alors + est commutative

$② = (x'+x, y'+y)$ $\quad$ donc $(G,+)$ est un groupe commutatif

② $(A,*)$ est associative ?

$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in A$

$$\underbrace{(x,y) * [(x',y') * (x'',y'')]}_{①} = \underbrace{[(x,y) * (x',y')] * (x'',y'')}_{②}$$

$① = (x,y) * (x'x'', x'y''+x''y')$

$= (xx'x'', x(x'y''+x''y') + x'x''y)$

$= (xx'x'', xx'y''+xx''y'+x'x''y)$

$② = (xx', xy'+x'y) * (x'',y'')$ $\quad ① = ②$

$= (xx'x'', xx'y''+x''(xy'+x'y))$ $\quad$ donc $(*)$ est associative.

$= (xx'x'', xx'y''+xx''y'+x'x''y)$

10

③ $(A,*)$ est distributive par rapport à +

$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in A$

$$\underbrace{(x,y) * [(x',y')+(x'',y'')]}_{①} = [(x,y) * (x',y')] + [(x,y) * (x'',y'')].$$

$$\underbrace{[(x',y')+(x'',y'')] * (x,y)}_{②} = [(x',y') * (x,y)] + [(x'',y'') * (x,y)]$$

$① = (x,y) * (x'+x'', y'+y'') = (x(x'+x''), x(y'+y'')+(x'+x'')y)$

$= (xx'+xx'', xy'+xy''+x'y+x''y)$

$= (xx', xy'+x'y) + (xx'', xy''+x''y) = [(x,y) * (x',y')] + [(x,y) * (x'',y'')].$

$(2) = (x'+x'', y'+y'') * (x,y)$

$= ((x'+x'').x , (x'+x'')y + x(y'+y''))$

$= (x'x + x''x , x'y + x''y + xy' + xy'')$

$= (x'x , x'y + xy') + (x''x , x''y + xy'')$

$= [(x', y') * (x,y)] + [(x'', y'') * (x,y)]$

Alors d'après (1) et (2) . * est distributive

d'après 1) 2) et 3. $(A, +, *)$ est un anneau

* est commutative ?

$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R} \quad (x,y) * (x',y') = (x',y') * (x,y)$

$(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + x'y)$ — (1) // Alors (*) comm

$(x',y') * (x,y) = (x'x, x'y + xy')$ — (2) D'où $(A, +, *)$ anne comm

---

* admet élément neutre ssi

$\forall (x,y) \in A, \exists (e,\bar{e}) \in A, \underbrace{(x,y) * (e,\bar{e})}_{(1)} = (x,y)$

$(1) . (xe, x\bar{e} + ey) = (x,y)$

$\Rightarrow \begin{cases} xe = x \\ x\bar{e} + ey = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{e=1} \\ \bar{e}=0 \end{cases} \quad (e,\bar{e}) = (1,0) \in A$

$(A, +, *)$ est un anneau commutatif et unitaire

1) est un anneau commutatif unitaire

2) $0_A = (0,0) \neq 1_A = (1,0)$

3) $\forall (x,y) \in A / \{(0,0)\}$ admet un inverse pour $*$, $\exists (x',y')$ tq

$$(x,y) * (x',y') = (x',y') * (x,y) = 1_A = (1,0).$$

$$(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + x'y) = (1,0)$$

$\Rightarrow xx' = 1$ et $xy' + x'y = 0$ $\quad (x',y') = \left(\frac{1}{x}, \frac{-y}{x^2}\right)$

$\Rightarrow \boxed{x' = \frac{1}{x}}$ et $xy' + \frac{1}{x}y = 0 \Rightarrow y' = \frac{-y}{x^2}$. Alors $\forall (x,y) \in A / \{(0,0)\}$

Alors $(A, +, *)$ est un corps commutatif.