Chapitre I : Régime Continu et théorèmes fondamentaux

I.1 Introduction

L'analyse des circuits électriques linéaires est effectuée à partir des lois et théorèmes généraux suivants:

1. Lois de Kirchhoff
2. Ponts diviseurs
3. Théorème de Millman
4. Théorème de Superposition
5. Théorèmes de Thévenin et Norton
6. Théorème de Kennely

I.2 Définitions

I.2.1 Circuits électriques

Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de composants (éléments ou dipôles linéaires) interconnectés. En général, le circuit comporte au moins une source de tension ou de courants, des composants passifs et éventuellement un ou plusieurs composants actifs.

Les composants utilisés en électronique présentent des bornes électriques ou pôles permettant leur connexion dans un réseau. On distingue alors:

- Les dipôles (2 pôles) comme les résistances, les condensateurs, les bobines, ...
- Les quadripôles (4 pôles) comme les filtres, les transformateurs, ...

II.2.2 Dipôle électrique

Un dipôle électrique est un composant unique ou un ensemble de composants, connectés à deux bornes.

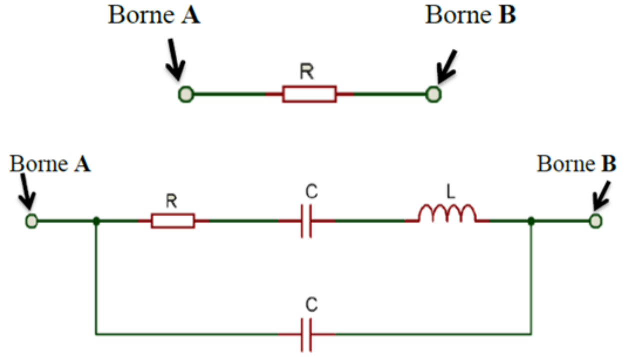


Figure I.1. Dipôles électriques.

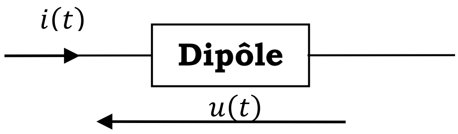
Dipôle passif: C'est un dipôle qui consomme de l'énergie électrique et ne comporte aucune source d'énergie. On citera par exemples: résistances, inductances et ampoules.

Dipôle actif: C'est un dipôle qui comporte une source d'énergie, comme c'est le cas de la pile et du moteur à courant continu.

Figure I.2. Dipôles passifs et actifs

Dipôle linéaire: Un dipôle est linéaire si sa caractéristique tension-courant est linéaire.

Ex: Résistance, source de tension ou de courant.



$u(t) = a.i(t) + b; a \; et \; b$ des constantes

Figure I.3. Dipôle linéaire

I.3.5 Dipôles élémentaires R, L et C

Résistance:

Une résistance est un dipôle constitué par un matériaux conducteur et caractérisé par sa résistance R exprimée en Ohm(Ω). Son inverse représente la conductance: $G = \frac{1}{R}$ exprimée en siemens (S).

Bobine (Inductance):

C'est un dipôle constitué d'un conducteur métallique enroulé autour d'un support cylindrique. Lorsqu'un courant traverse celle-ci, elle produit un champ magnétique dans l'espace environnant. L'inductance s'exprime en henry (H).

Condensateur:

Un condensateur est formé de deux conducteurs dont l'un entoure complètement l'autre (condensateur cylindrique) ou de deux conducteurs plans séparés par un isolant (condensateur plan). La capacité s'exprime en farad (F).

Les lois générales régissant ces composants sont représentées sur la figure ci-dessous:

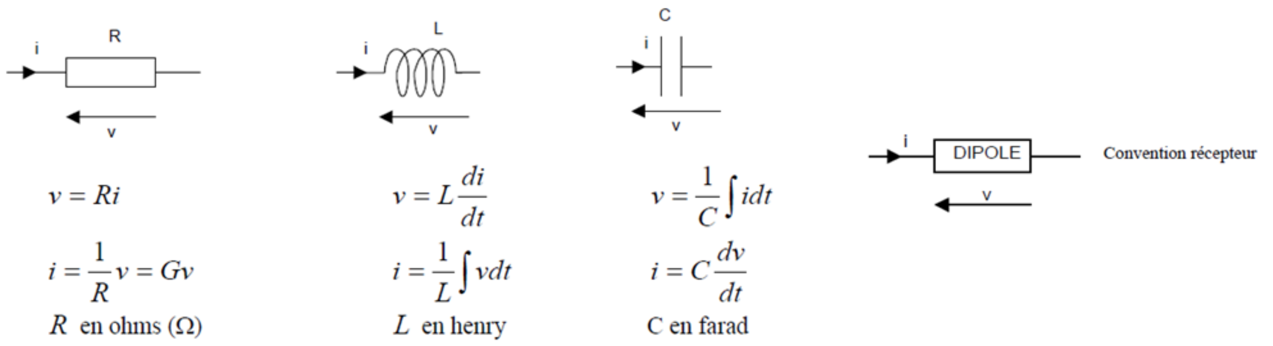


Figure I.4. Dipôles élémentaires et leurs équations électriques

I.2.3 Source de tension et source de courant

Une source de tension parfaite est un dipôle actif qui maintient entres ses bornes une différence de potentiel constante quel que soit le courant qu'il débite. Si la source a une résistance interne en série, elle est dite réelle.

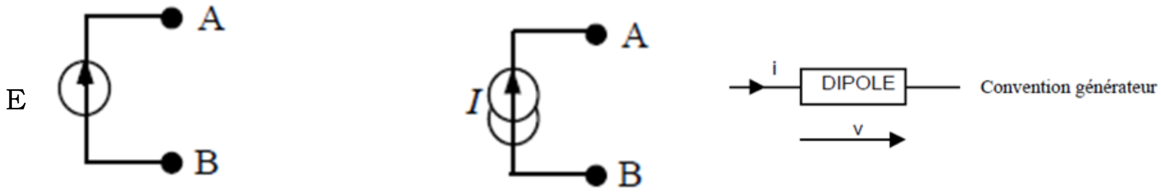


Figure I.5. Sources de tension et de courant

I.2.4 Puissance électrique

Un récepteur électrique est un dispositif destiné à consommer de l'énergie électrique. Sa capacité de consommer de l'énergie électrique est caractérisée par un paramètre très important, appelé la puissance électrique "P". La puissance électrique s'exprime par le rapport entre l'énergie électrique consommée par le récepteur dans un temps déterminé et la valeur de cette même durée. Son unité est le Watt:

$$P = v(t).i(t)$$

Si on remplace la tension U par son équivalence fournie par la loi d'Ohm, on obtient:

$$P = \frac{v(t).v(t)}{R} = \frac{v^2(t)}{R}$$

I.3 lois de Kirchhoff

I.3.1 ***Nœud*:** Un nœud est un point de connexion entre plusieurs dipôles (éléments), au moins trois fils électriques qui viennent se connecter au même endroit et souvent matérialisé sur un schéma par un point.

I.3.2 *Loi des nœuds:* La somme algébrique des intensités des courants arrivant à un nœud est égale à la somme des intensités des courants sortant du nœud.

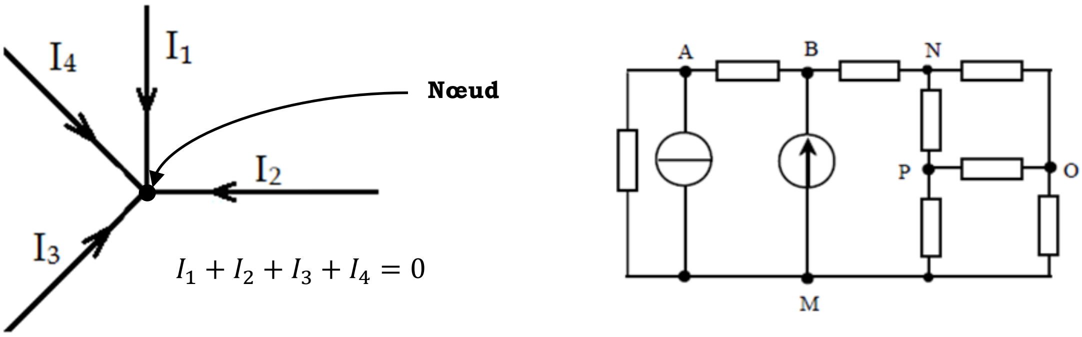
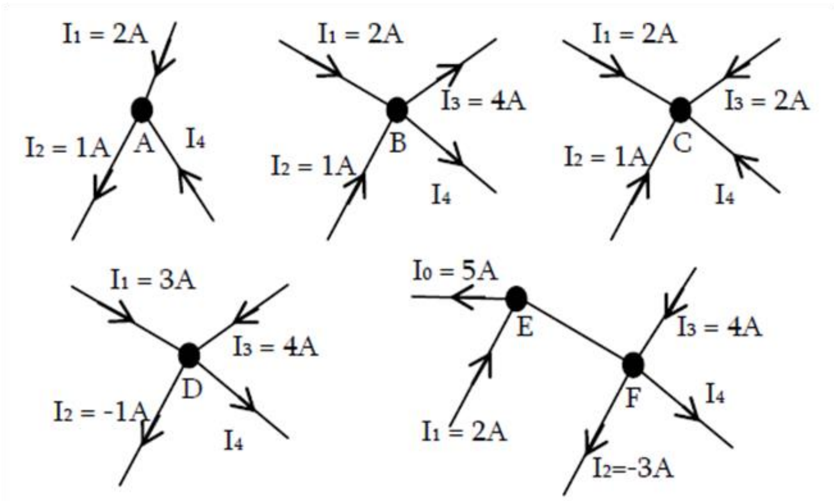


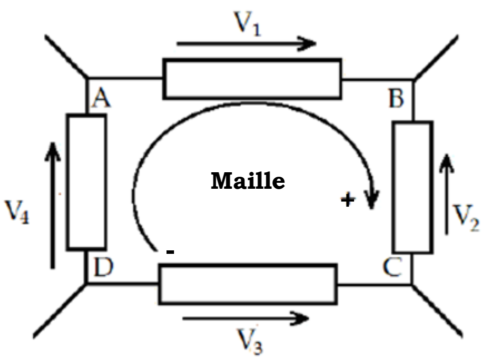
Figure I.6. Loi des nœuds

Exemples:



I.3.3 M*aille:* Une maille est un contour fermé constitué par une succession de branches, mais ne comportant jamais deux fois la même branche (ne passant jamais deux fois sur le même nœud).

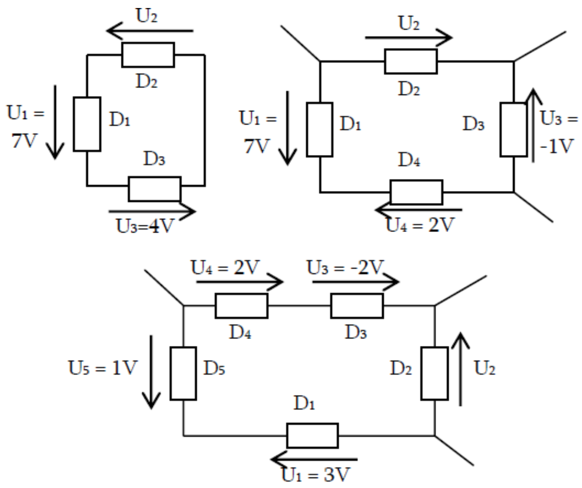
I.3.4 *Loi des mailles:* La somme des tensions orientées le long d'une maille d'un circuit électrique est nulle.



$$V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0$$

Figure I.7. Loi des mailles

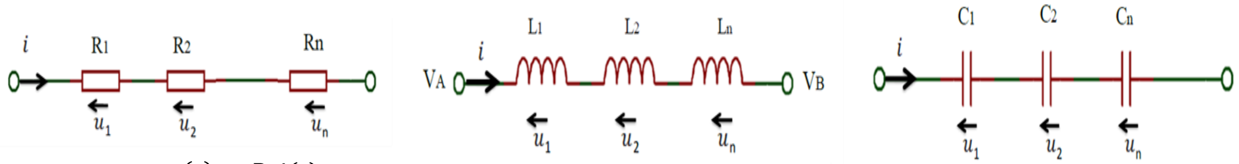
Exemples:



I.3.5 Association de dipôles élémentaires R, L et C

a. Association en série:

Les dipôles sont associés en série lorsqu'ils sont branchés les un à la suite des autres. Dans ce cas, le courant $i(t)$ est commun à tous les dipôles et la tension $u(t)$ est la somme des tensions aux bornes de chaque dipôle.



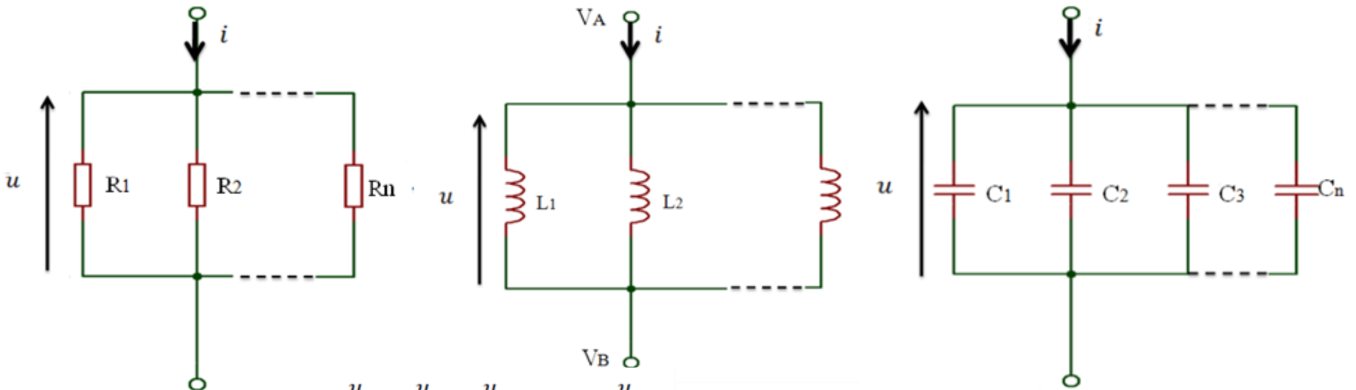
$u(t) = R.i(t)$

$u = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

Figure I.7. Association en série

b. Association en parallèle:

La tension $u(t)$ est commune à tous les dipôles et donc le courant total $i(t)$ est la somme des courants aux bornes de chaque dipôle.

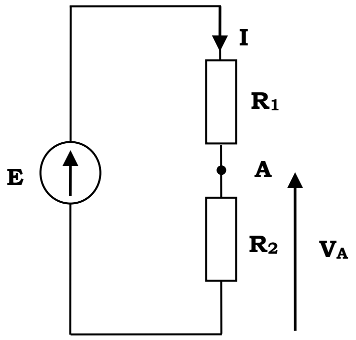


$= \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2} + \frac{u}{R_2} + \cdots + \frac{u}{R_n}$ $\quad i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n$

Figure I.8. Association en parallèle

I.4 Les ponts diviseurs

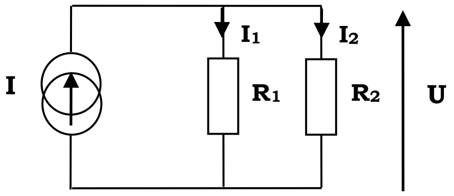
I.4.1 Le pont diviseur de tension



- Les deux résistances R_1 et R_2 sont en série.
- En appliquant la loi d'Ohm: $\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{R_1+R_2}}$; D'où le potentiel V_A au point A qui est aux bornes de R_2 est: $\boldsymbol{V_A} = \frac{\boldsymbol{R_2}}{\boldsymbol{R_1+R_2}}.\boldsymbol{E}$

Figure I.10. Pont diviseur de tension

I.4.2 Le pont diviseur de courant



- Ce circuit représente un pont de deux résistances placées en parallèle et alimentées par un générateur de courant parfait.
- Les dipôles sont ainsi soumis à la même d.d.p U
- La source de courant alimente (R_1// R_2).

Figure I.11. Pont diviseur de courant

En appliquant la loi d'Ohm $U = (R_1 \parallel R_2).I = \frac{R_1.R_2}{R_1+R_2}.I$; D'où:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{R_2}{R_1+R_2}.I$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_1}{R_1+R_2}.I$$

I.5 Théorème de Millman

Ce théorème est une réécriture de la loi des nœuds, et permet d'exprimer le potentiel en un nœud quelconque d'un réseau en fonction des potentiels seuls aux nœuds voisins. L'avantage réside dans le fait qu'on exprime des relations sans courants, ce qui s'avère très commode et très efficace, notamment dans les montages comportant des amplificateurs opérationnels.

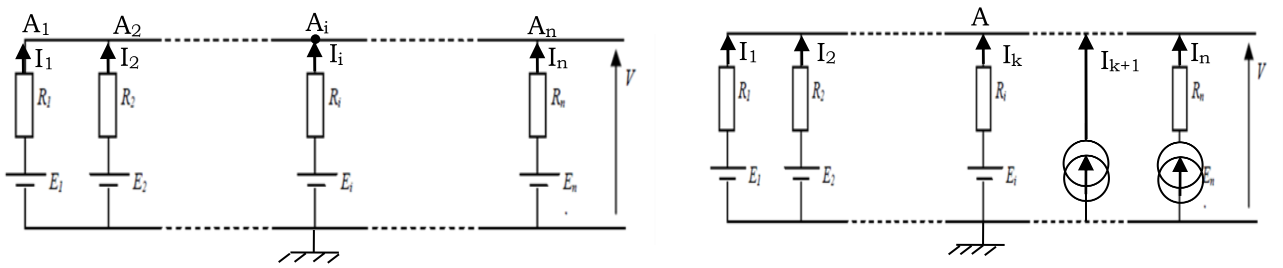
La figure I.12 représente l'exemple où: Les nœuds A_i , avec $i = 1,2, \dots n$ sont portés à des potentiels connus par les tensions E_i entre ces points et la masse.

Comme l'intensité du courant dans la branche i, de conductance G_i, arrivant au noeud A a pour expression $I_i = G_i(E_i - V_A)$, la loi des neuds donne (figure I.1.2 (a)):

Élément	Équivalent série	Diviseur de tension	Équivalent parallèle	Diviseur de courant
Résistance	$R_{eq}=\sum_{k=1}^{N} R_k$	$v_k=\frac{R_k}{\sum_{k=1}^{N} R_k}v$	$\frac{1}{R_{eq}}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{R_k}$	$i_k=\frac{1}{R_k\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{R_k}}i$
Inductance	$L_{eq}=\sum_{k=1}^{N} L_k$	$v_k=\frac{L_k}{\sum_{k=1}^{N} L_k}v$	$\frac{1}{L_{eq}}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{L_k}$	$i_k=\frac{1}{L_k\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{L_k}}i$
Condensateur	$\frac{1}{C_{eq}}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{C_k}$	$v_k=\frac{1}{C_k\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{C_k}}v$	$C_{eq}=\sum_{k=1}^{N} C_k$	$i_k=\frac{C_k}{\sum_{k=1}^{N} C_k}i$

Tableau I.1. Tableau récapitulatif

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = G_1(E_1-V_A)+G_2(E_2-V_A)+\cdots\ldots+G_n(E_n-V_A) \Rightarrow V_A=\frac{G_1.E_1+G_2.E_2+\cdots\ldots+G_n.E_n}{G_1+G_2+\cdots\ldots+G_n}$$



(a) (b)

Figure I.12 n branches en parallèle comprenant chacune une source de tension, de courants et une impédance

Ce qui donne alors:

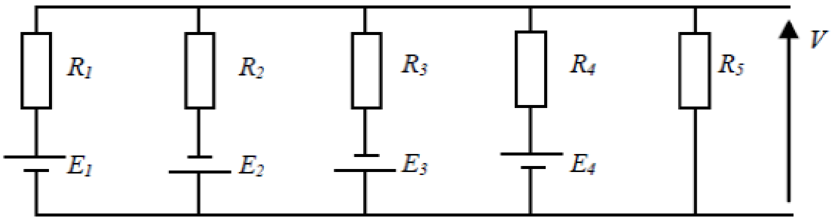
$$V_A=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{E_i}{R_i}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R_j}}$$

Le théorème de Millman généralisé est donnée pour le circuit (Figure I.12 (b)), par :

$$V_A = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{E_i}{R_i} + \sum_{i=k+1}^{n} I_i}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{R_j}}$$

Exemple:

On considère le circuit électrique ci-dessous, on cherche de calculer la tension aux bornes de la résistance R_5



En appliquant directement le théorème de Millman. On obtient:

$$V = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3} + \frac{E_4}{R_4} + \frac{0}{R_5}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}}$$

I.5 Transformation de source

Cette méthode permet de transformer une source de tension ayant une résistance en série à une source de courant ayant une résistance en parallèle.

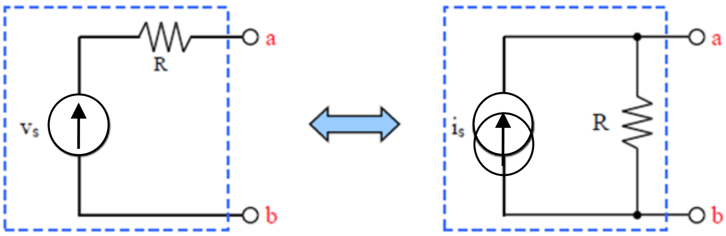
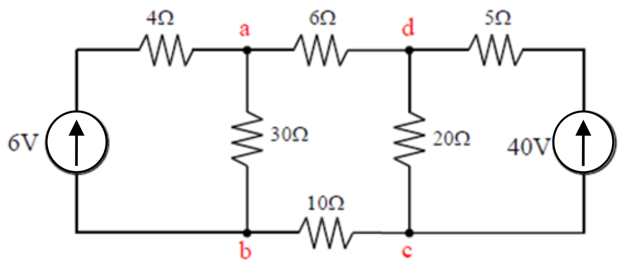


Figure I.13. Transformation de sources

La transformation de source est donnée à la figure I.12. Pour que les deux circuits soient équivalents, il faut que les tensions et les courants soient les mêmes. On a alors: $v_{ab} = i_s.R$ et $i_s = \frac{v_s}{R}$. Cette dernière permet de transformer une source de tension en un source de courant, et vice-versa. La résistance R est la même dans les deux cas.

Exemple:

Calculer la puissance dans la source de 6V du circuit suivant:



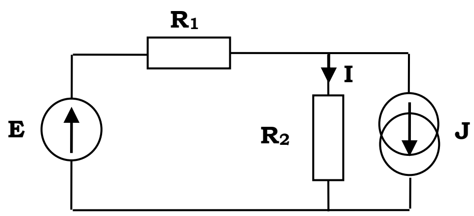
I.6 Théorème de Superposition

C'est un théorème qui s'applique aux circuits comportant des sources indépendantes (au moins 2 sources indépendantes de tension et/ou de courant).

- La tension entre deux points A et B (ou bien le courant dans la branche AB) d'un circuit électrique linéaire comportant plusieurs générateurs est égale à la somme des tensions (courants) obtenues entre ces deux points lorsque chaque source agit seule.
- La source de tension étant remplacée par un fil conducteur et la source de courant étant enlevée (circuit ouvert).
- La tension V (le courant I) est la somme algébrique des tensions V_i (des courants I_i)

Exemple d'application:

Donner l'expression du courant I qui transverse la résistance R_2

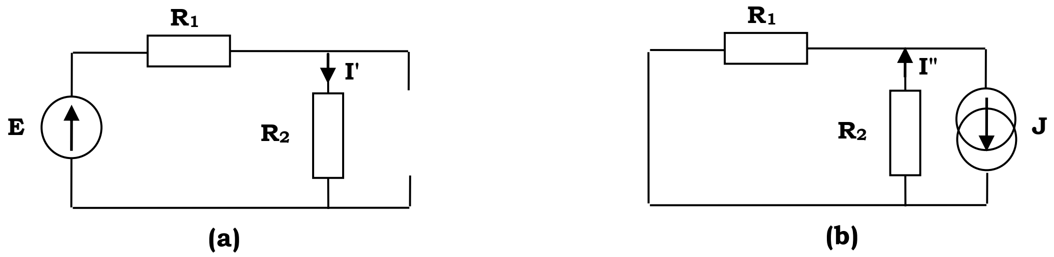


<u>*Etape 1:*</u> Calcul de I lorsque $J = 0$ **(a)**

Lorsque la source indépendante J est passivée (enlevée), Le courant dans la branche R_2 est : $I' = \frac{E}{R_1+R_2}$;

<u>*Etape 2:*</u> Calcul de I lorsque $E = 0$ **(b)**

Lorsque la source indépendante E est passivée (court-circuitée); En appliquant le calcul pour le pont diviseur de courant, le courant dans la branche R_2 est: $I" = \frac{R_1}{R_1+R_2}J$



Etape 3: Le courant I est la somme algébrique des courants I' et $I"$; Soit $I = I' - I"$

Le signe (-) de $I"$ indique que ce dernier traverse R_2 dans le sens opposé de I. On obtient alors:

$$I = I' - I" = \frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} J$$

I.7 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Les théorèmes de Thévenin et de Norton sont les théorèmes les plus importants de l'éctronique. Ils permettent de résoudre des problèmes complexes en un minimum de temps et en manipulant très peu d'équations.

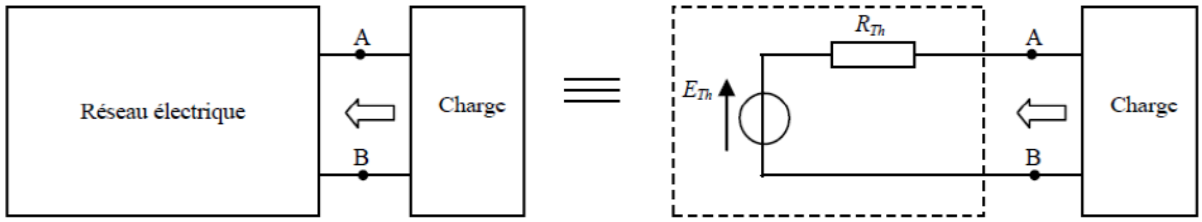


Figure I.14. Circuit de Thévenin équivalent à un circuit électrique

I.7.1 Théorème de Thévenin

En régime continu, tout réseau linéaire dipôlaire est équivalent à un générateur de force électromotrice E_{th} et de résistance interne R_{th} (figure I.13 (a)).

- R_{th}: est égale à la résistance équivalente du réseau lorsque tous ses générateurs sont éteints;
- E_{th}: est égale à la tension à vide du réseau, lorsque $I = 0$.

I.7.2 Théorème de Norton

En régime continu,tout réseau linéaire dipôlaire est equivalent à un générateur de courant dit de Norton, de courant I_N et de résistance interne R_N (figure I.13 (b)) égale à la résistance de Thévenin. Le courant I est égale au courant de la source I_N, lorsque l'on court-circuite cette dernière.

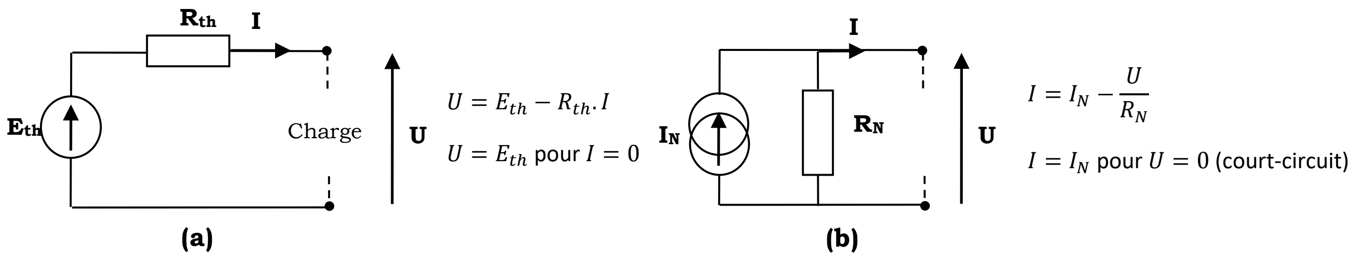


Figure I.15. Circuits de Thévenin et Norton

I.7.2 Equivalence Thévenin - Norton

Un générateur de tension de Thévenin, de force électromotrice E_{th} et de résistance interne R_{th} est équivalent à un générateur de Norton, de courant $I_N = \frac{E_{th}}{R_{th}}$ et de même résistance interne R_N.

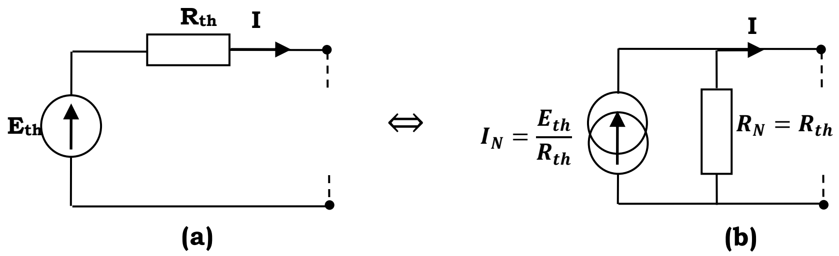


Figure I.16. Equivalence Thévenin - Norton

Les théorèmes de Thévenin et de Norton sont utiles lorsque l'on recherche une grandeur électrique particulière, par exemple le courant dans une résistance placée dans un circuit complexe. On considère alors que cette résistance est alimentée par le reste du circuit que l'on isole ainsi et dont on cherche l'équivalent de Thévenin ou de Norton.

I.8 Théorème de Kennelly:

Le théorème de Kennelly permet d'établir une équivalence entre des impédances placées en triangle et des impédances placées en étoiles.

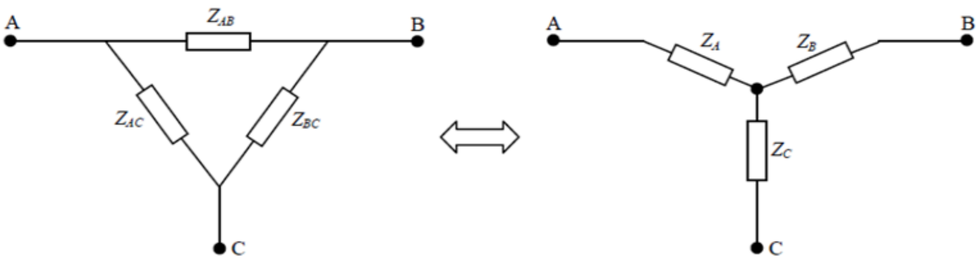


Figure I.17. Montage triangle et montage étoile

I.8.1 Conversion triangle -étoile

La résistance d'une branche de l'étoile équivalente est égale au produit des résistances adjacentes divisé par la somme totale des résistances.

$$Z_A = \frac{Z_{AB}Z_{AC}}{Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC}}$$

$$Z_B = \frac{Z_{AB}Z_{BC}}{Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC}}$$

$$Z_C = \frac{Z_{AC}Z_{BC}}{Z_{AB}+Z_{AC}+Z_{BC}}$$

I.8.2 Conversion étoile-triangle

La résistance d'une branche du triangle équivalent est égale à la somme des produits des résistances, divisée par la résistance de la branche opposée.

$$Z_{AB} = \frac{Z_{AB}Z_{AC}+Z_{AB}Z_{BC}+Z_{AC}Z_{BC}}{Z_C}$$

$$Z_{AC} = \frac{Z_{AB}Z_{AC}+Z_{AB}Z_{BC}+Z_{AC}Z_{BC}}{Z_B}$$

$$Z_{BC} = \frac{Z_{AB}Z_{AC}+Z_{AB}Z_{BC}+Z_{AC}Z_{BC}}{Z_A}$$

Exemple d'application: