Chapitre I Rappels mathématiques sur les nombres complexes (NC)

I.1 Définition d'un nombre complexe

Les nombres complexes prolongent l'ensemble des nombres réels. L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans l'espace des réels $\mathbb{R}$ et doit faire appel aux racines carrées d'un nombre négatif, ce qui conduit aux nombres complexes. Dans l'espace des nombres complexes $\mathbb{C}$, cette équation a deux racines : j et $-j$.

Ces nombres se composant d'une partie réelle et d'une partie imaginaire et se représentent par un point à deux coordonnées dans le plan, que l'on appelle plan complexe.

Leurs applications sont nombreuses en électromagnétisme et en électronique, car leur écriture trigonométrique permet de simplifier la transcription des phénomènes ondulatoires.

I.2 Les différentes forme d'un nombre complexe

I.2.1 La représentation cartésienne

Un nombre complexe z a une écriture algébrique de la forme : $Z = a + jb$ (a, b sont réels, $j^2=-1$)

Le premier terme $Re(Z) = a$ constitue sa partie réelle et le second sa partie imaginaire $Im(Z) = b$.

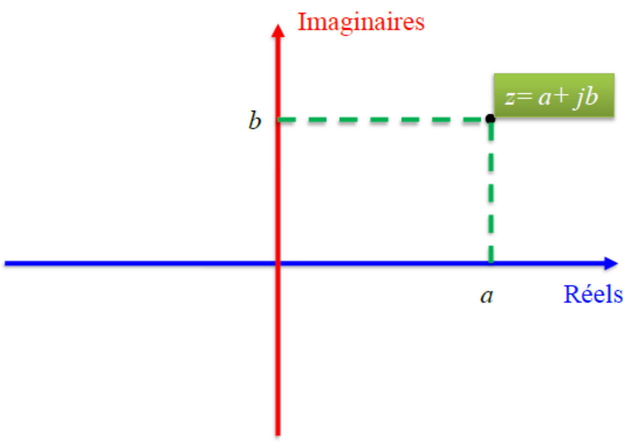


Figure 1. Représentation cartésienne

I.2.2 La représentation géométrique

Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout nombre complexe $z = a + jb$, le point $P(a, b)$ et réciproquement à tout point dans le plan, on peut lui associer un nombre complexe.

$P(a, b)$ est l'image de $z = a + jb$ et z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{au} + \overrightarrow{bv}$

I.2.3 La représentation trigonométrique

Pour P l'image de $z = a + jb$ dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- Module de z est le réel positif $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Argument de z $(z \neq 0)$ est le nombre θ défini à $2k\pi$ $(k\epsilon Z)$ avec:

$$\begin{cases} sin\theta = \dfrac{b}{r} \\ cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \theta = Arg(z) = tang^{-1}(b/a) \end{cases}$$

Géométriquement θ est, à $2k\pi$ près la mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OP})$. La forme trigonométrique de z est alors:

$$z = r(cos\theta + jsin\theta)$$

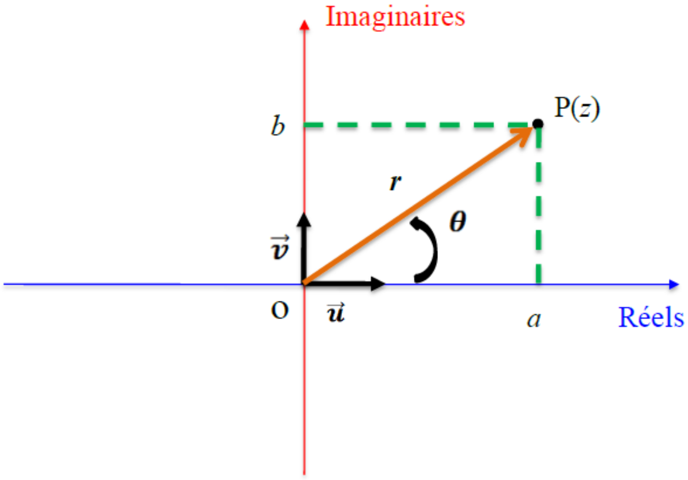


Figure 2. Représentation trigonométrique

Théorème de Moivre:

La puissance n-ième d'un nombre complexe z, est donnée par la formule de Moivre:

$$(cos\theta + jsin\theta)^n = cos(n\theta) + jsin(n\theta)$$

Exemple:

Soit un nombre complexe donné sous la forme algébrique $z = 3 + j4$. La représentation géométrique est illustrée par la figure ci-dessous:

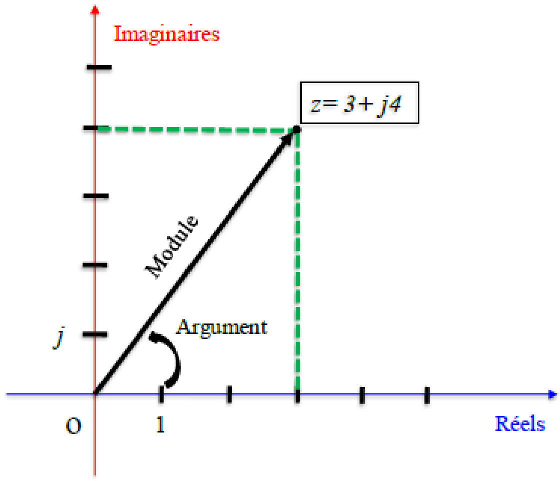


Figure 3. Représentation géométrique du NC: $z = 3 + j4$

Le module de z est une grandeur réelle positive:

$$r = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5$$

L'argument de z est un angle qui se note:

$$\arg(z) = arg(3 + j4) = tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.92\,rad \approx 53.13°$$

I.2.4 La représentation exponentielle

Tout nombre complexe admet alors une écriture : $z = [r, \theta]$ que l'on appelle forme polaire.

La formule d'Euler relie l'exponentielle complexe avec le cosinus et le sinus dans le plan complexe:

$$\forall\, \theta \in \mathcal{R};\ e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$$

Théorème d'Euler:

Soit θ un nombre réel, la formule d'Euler est exprimée:

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ sin\theta = \dfrac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \end{cases}$$

Un nombre complexe peut alors s'écrire sous la forme exponentielle, représentée ci-dessous:

$$z = re^{j\theta}$$

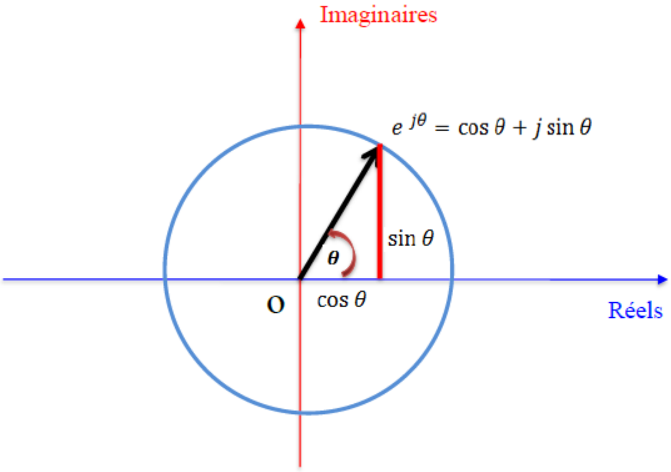


Figure 3. Représentation exponentielle

Exemple:

Utilisation pour linéariser un polynôme trigonométrique en utilisant la formule du binôme de Newton:

On donne $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$cos^4x = \left(\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}\right)^4 = \frac{\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)^4}{16}$$

$$cos^4x = \frac{e^{4jx} + 4e^{3jx}e^{-jx} + 6e^{2jx}e^{-2jx} + 4e^{jx}e^{-3jx} + e^{-4jx}}{16}$$

$$= \frac{e^{4jx} + e^{-4jx}}{16} + \frac{e^{2jx} + e^{-2jx}}{4} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) + \frac{3}{8}$$

$$Cos^4x = \frac{1}{8}\,cos4x + \frac{1}{2}cos2x + \frac{3}{8}$$

I.3 Opérations arithmétiques sur les NC

Soient deux nombres complexes $Z = a + jb$ et $Z' = a' + jb'$ et (a $\in$ IR ; b $\in$ IR ; a' $\in$ IR ; b' $\in$ IR).

I.3.1 La somme

La partie réelle du complexe somme est la somme des parties réelles, et la partie imaginaire est la somme des parties imaginaires: $z + z' = (a + a') + j(b + b')$

I.3.2 Le produit

$$z.z' = (a.a' - b.b') + j(a.b' + a'.b)$$

Le module du complexe produit est le produit des modules : $|z.z'| = |z| \times |z'|$.

L'argument du complexe produit est la somme des arguments : arg(z × z') = arg z + arg z'.

Soit pour la forme trigonométrique : $zz' = rr'\left(cos(\theta + \theta') + jsin(\theta + \theta')\right)$.

I.3.3 Le Quotient

Pour obtenir l'écriture algébrique du complexe quotient, on multiplie numérateur et dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur. $\frac{z}{z'} = \frac{a+jb}{a'+jb'} = \frac{(a+jb)(a'-jb')}{(a'+jb')(a'-jb')} = \frac{(aa'+bb')+j(a'b-ab')}{a^2+b^2}$

Le module du quotient est le quotient des modules : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

L'argument du quotient est la différence des arguments : $arg\frac{z}{z'} = argz - argz'$ ($z \neq 0$ et $z' \neq 0$) .

I.4 Le conjugué d'un nombre complexe

Le complexe conjugué de $z = a + jb$ et noté $\bar{z}$ représente le même nombre avec une partie imaginaire opposée $\bar{z} = a - jb$

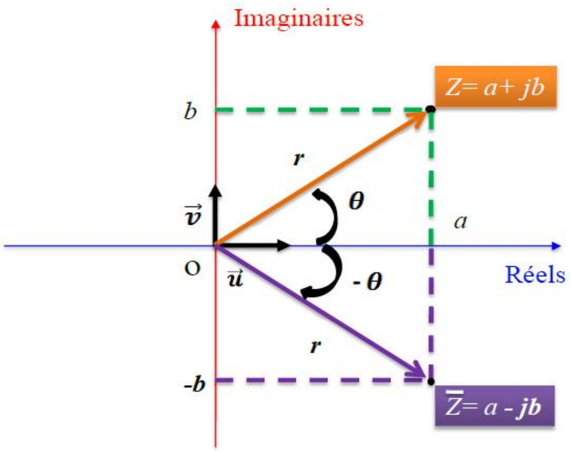


Figure 4. Complexe conjugué

- Le produit d'un nombre complexe par son conjugué est un nombre réel égal au carré de leur module commun:

$$z.\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

- Le conjugué de la somme est égal à la somme des conjugués:

  Si $z = a + jb$ et $z' = a' + jb'$, alors: $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' = (a + a') - j(b + b')$

- Le conjugué du produit est égal au produit des conjugués:

$$\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}' = \left(a.a' - b.b'\right) - j(a'b + ab')$$

I.5 Racine carrée d'un nombre complexe:

Définition: Soit Z un nombre complexe donné, on appelle racine carrée complexe de Z tout NC z, s'il existe tel que : $z^2 = Z$

Le plus simple pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe Z de forme algébrique $a + jb$ est de poser $z = x + jy$ puis de résoudre le système d'équations à deux inconnues qui en résulte:

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = a + bi \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$$

Exemple :
on veut déterminer les racines carrées de 3 + 4i

$$z^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ 2xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} ou \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

On en déduit deux racines carrées pour 3 + 4i : -2 - i et 2 + i

I.6 Application des NC à l'électricité:

I.6.1 Grandeurs sinusoïdales (tensions et courants):

A chaque grandeur sinusoïdale écrite sous la forme générale $u(t) = U_{max}sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}Usin(\omega t + \varphi)$, on associe un vecteur de Fresnel; On peut alors associer à $u(t)$ une représentation complexe: $u(t) = [U, \varphi] = U(cos\varphi + jsin\varphi)$.

De même, pour le courant électrique $i(t) = I\sqrt{2}sin(\omega t + \varphi)$, on associe la représentation complexe: $i(t) = [I, \varphi] = I(cos\varphi + jsin\varphi)$

$U = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$; $I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$: représentent la valeur efficace de la tension et du courant respectivement.

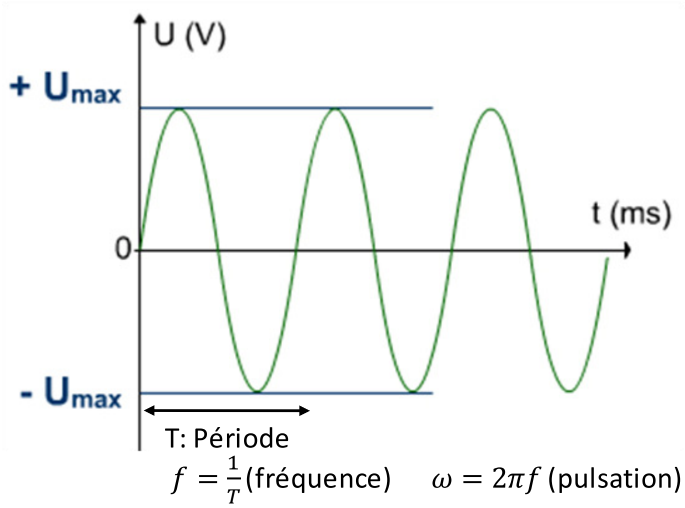
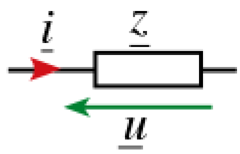


Figure 5. Grandeur sinusoïdale

I.6.2 Impédance complexe d'un dipôle :

Soit un dipôle d'impédance Z, soumis à une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ et parcourue par un courant d'intensité $i(t)$.



On appelle impédance complexe du dipôle, le nombre complexe: $Z = \frac{U}{I}$;

Où : U et I sont des grandeurs complexes associées à $u(t)$ et $i(t)$.