Département de Génie Industriel
3ième Année Licence
Module: Automatique Industrielle

Chapitre VI : Performances des Systèmes Linéaires (Stabilité et Précision)

I. Introduction:

L'objectif de ce chapitre est de présenter les notions de base pour l'étude des performances des systèmes linéaires continus. La première performance réside dans l'étude de la stabilité et la deuxième partie est consacrée à l'étude de la précision.

II. Stabilité:

Définition 1: Un système est stable si légèrement perturbé de sa position d'équilibre, il y revient. Il est instable s'il s'en éloigne.

Définition 2: Un système est stable si pour tout signal d'entrée bornée correspond un signal de sortie borné.

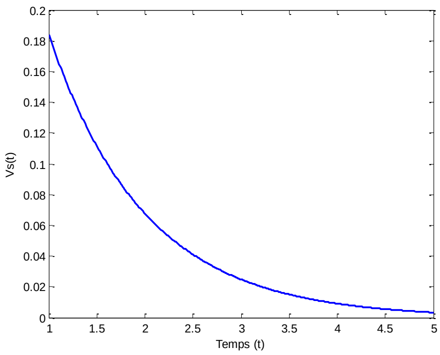
Définition 3: Un système est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers "0" quand le temps t tend vers ∞.

II.1. Exemples:

a. Système du 1ier ordre

- La fonction de transfert d'un système RL est donnée par :

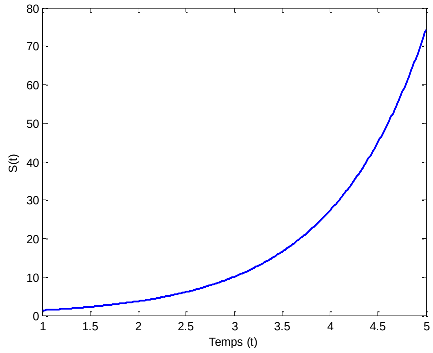
$H(p) = \dfrac{1/R}{\left(1+\dfrac{L}{R}.p\right)}$ Ce qui donne comme réponse impulsionnelle : $v_s(t) = \dfrac{1}{L}.e^{-\frac{R}{L}.t}$.



La forme de la réponse impulsionnelle permet de déduire que le système est stable.

- Considérons le système représenté par la fonction de transfert :

$H(p) = \dfrac{1}{(p-2)}$ $\Rightarrow$ La réponse impulsionnelle est $s(t) = s_0.e^{2.t}$.

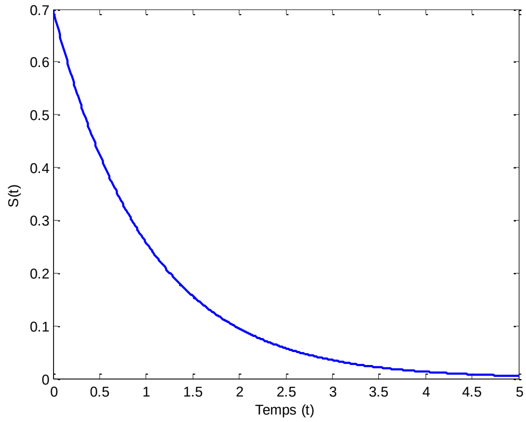


Cette courbe représente l'allure d'un système instable.

Remarque : A partir des deux exemples, on constate que la stabilité d'un système est déterminée par le signe du pôle de la fonction de transfert considérée. Le fait que le pôle soit réel négatif conduit l'exponentiel à s'annuler avec l'écoulement du temps.

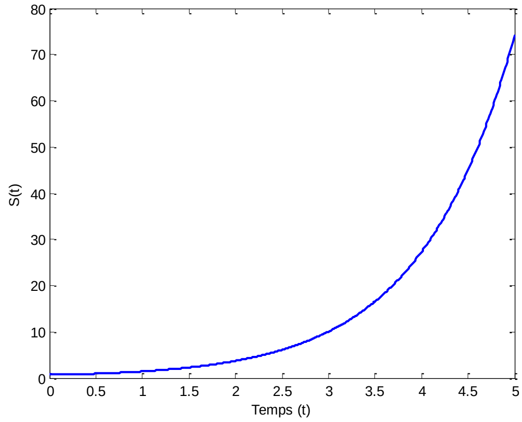
b. Système du 2nd ordre

- Pour un système de F.T : $H_1(p)=\dfrac{1}{(p+2)(p+1)}$:



$p_1=-1$ et $p_1=-2$, on constate que tous les pôles sont à partie réelle négative. La réponse impulsionnelle : $s(t)=A.e^{-2t}+B.e^{-t}$. Il s'agit d'un système stable.

- $H_2(p)=\dfrac{1}{(p-2)(p+1)}$; les pôles sont : $p_1=2$ et $p_2=-1$.



On constate qu'il y a un pôle à partie réelle positive.

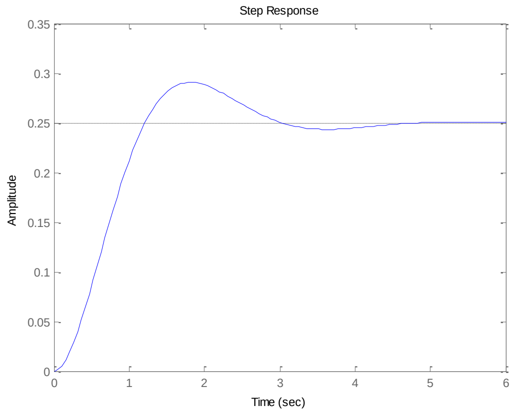
La réponse impulsionnelle : $s(t)=A.e^{2t}+B.e^{-t}$.

Il s'agit d'un système instable. Le pôle à partie réelle positive induit l'instabilité du système (divergence).

- Système oscillant :

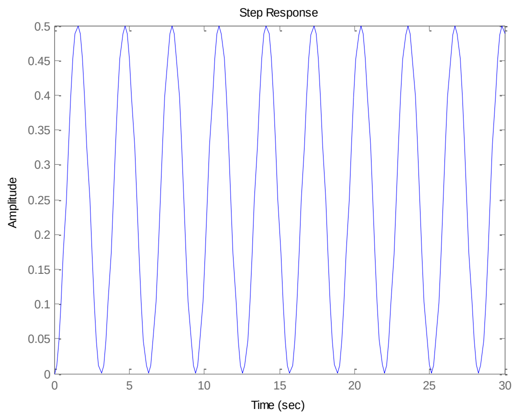
$H_3(p)=\dfrac{1}{p^2+2.p+4}$; Les pôles sont : $p_1=-1-j.\sqrt{3}$ et $p_2=-1+j.\sqrt{3}$.

On constate qu'il y a deux pôles complexes conjugués à partie réelle négative. La réponse impulsionnelle : $s_3(t)=A.e^{-\alpha.t}.\cos(\omega t+\varphi)$.



Le système est stable.

- $H_4(p)=\dfrac{1}{p^2+4}$; On peut le mettre sous la forme $\dfrac{A}{(p+2.j)}+\dfrac{B}{(p-2.j)}$



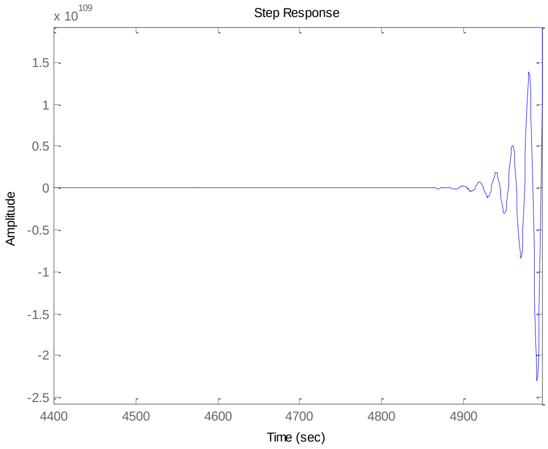
On obtient une réponse impulsionnelle $s(t)=A.\cos(\omega t+\varphi)$.

La partie réelle des pôles est nulle. Le système présente un effet d'oscillation permanente qui n'est pas amortie ; on dit alors qu'il est à la limite de la stabilité ou qu'il est juste oscillant. Cette situation est la limite entre la stabilité et l'instabilité.

- $H_5(p)=\dfrac{1}{p^2-0.1p+0.1}$ qui peut s'écrire : $H_5(p)=\dfrac{A}{(p-0.05+0.3j)}+\dfrac{B}{(p-0.05-0.3.j)}$.

Les pôles sont complexes conjugués à partie réelle positive : $p_1=0.05+0.3j$ et $p_1=0.05-0.3j$.

La réponse est donnée par : $s(t)=A.e^{0.05t}.\sin(0.3t)$, le système est instable.



Conclusion : On peut conclure que le signe des parties réelles des pôles est responsable de la stabilité ou de l'instabilité. Les parties imaginaires sont responsables d'oscillations.

Définition: Un système linéaire continu à temps invariant est asymptotiquement stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

II.2. Critère algébrique de la stabilité (Critère de Routh-Hurwitz):

Le critère de Routh est un critère permettant de déterminer à partir du polynôme dénominateur de la fonction de transfert le signe des racines de ce polynôme sans avoir à résoudre l'équation:

$F(p) = \frac{K.G(p)}{1+k.G(p).H(p)} \Rightarrow$ L'équation caractéristique (E.C): $1 + k.G(p).H(p) = 0$

$$B_n.p^n + B_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + B_0 = 0$$

Condition nécessaire et non suffisante:

Pour que le système soit stable, il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique soient du même signe que B_n .

Table de Routh:

p^n	B_n	B_{n-2}	B_{n-4}	. . .	B_0
p^{n-1}	B_{n-1}	B_{n-3}	B_{n-5}	B_n	B_1
p^{n-2}	X_1	X_2	X_3		
p^{n-3}	Y_1	Y_2			
.					
.					
.					
p^0					

Tel que:

$$X_1 = -\frac{1}{B_{n-1}}\begin{bmatrix} B_n & B_{n-2} \\ B_{n-1} & B_{n-3} \end{bmatrix} = -\frac{1}{B_{n-1}}[B_n.B_{n-3} - B_{n-1}.B_{n-2}]$$

$$X_2 = -\frac{1}{B_{n-1}}\begin{bmatrix} B_n & B_{n-4} \\ B_{n-1} & B_{n-5} \end{bmatrix} = -\frac{1}{B_{n-1}}[B_n.B_{n-5} - B_{n-1}.B_{n-4}]$$

De la même manière:

$$Y_1 = -\frac{1}{X_1}\begin{bmatrix} B_{n-1} & B_{n-3} \\ X_1 & X_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{X_1}[B_{n-1}.X_2 - X_1.B_{n-3}]$$

$$Y_2 = -\frac{1}{X_2}\begin{bmatrix} B_{n-3} & B_{n-5} \\ X_2 & X_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{X_2}[B_{n-3}.X_3 - X_2.B_{n-5}]$$

<u>Enoncé du critère:</u>

Un système est stable selon le critère de R.H si et seulement si tous les coefficients de la 1ière colonne de la table sont de même signe.

Le nombre de racines à partie réelle positive est égale au nombre de changements de signe dans la 1ière colonne (pivot).

Exemple :

$F(p) = \frac{1}{p^3+2.p^2+p+1} = \frac{N(p)}{D(p)}$; l'E.C: $D(p) = p^3 + 2.p^2 + p + 1 = 0$

Tous les coefficients sont de même signe, alors la condition nécessaire non suffisante (C.N.N.S) est vérifié.

Condition nécessaire suffisante (C.N.S): (table de Routh)

p^3	1	1
p^2	2	1
p^1	1/2	0
p^0	1	

Les valeurs de la première colonne sont positives, alors le système est stable.

<u>Cas particuliers:</u>

1ier Cas: Une ligne de zéros indique la présence d'une racine imaginaire pure, le système est juste instable (limite de la stabilité). Dans ce cas, il faut utiliser le polynôme auxiliaire (dont les coefficients sont les termes de la dernière ligne non nulle).

<u>Exemple:</u>

$D(p) = p^3 + 10.p^2 + 16.p + 160 = 0$

p^3	1	16
p^2	10	160
p^1	0^{20}	0
p^0	160	

$\Rightarrow$ 2 racines imaginaires pures conjugués: $P_{aux}: 10.p^2 + 160$ $\Rightarrow$ La dérivée: $P'_{aux}: 20.p$

$\Rightarrow p^2 = -16 \Rightarrow p_{1,2} = \pm 4j$

$\Rightarrow$ Le système est marginalement stable.

On écrit à la place de la ligne concernée obtenue en dérivant le polynôme auxiliaire.

Exemple:

$D(p) = p^4 + p^3 + 5.p^2 + 4.p + 4 = 0$

p^4	1	5	4
p^3	1	4	0
p^2	1	4	0
p^1	0_2	0	0
p^0	4		

$\Longrightarrow$ 2 racines imaginaires pures conjugués: $P_{aux}: p^2 + 4 \Longrightarrow$ La dérivée: $P'_{aux}: 2.p$

$\Longrightarrow p^2 = -4 \Longrightarrow p_{1,2} = \pm 2j$

$\Longrightarrow$ Le système est marginalement stable.

2ième Cas:

Cas d'un pivot nul $\Longrightarrow$ Il faut remplacer l'élément nul par $\varepsilon \to 0^+$

Exemple:

$D(p) = p^5 + p^4 + 4.p^3 + 4.p^2 + 2.p + 1 = 0$

p^5	1	4	2
p^4	1	4	1
p^3	0^{ε}	1	0
p^2	$\dfrac{4\varepsilon - 1}{\varepsilon}$	1	0
p^1	$\dfrac{4\varepsilon - 1 - \varepsilon^2}{\varepsilon - 1}$	0	
p^0	1		

$\varepsilon \to 0^+$ Le système est stable si:

$\lim\limits_{\epsilon \to 0+} \frac{4\epsilon - 1}{\epsilon} = -\infty$

$\lim\limits_{\epsilon \to 0+} \frac{4\epsilon - 1 - \epsilon^2}{\epsilon} = \lim\limits_{\epsilon \to 0+} 1 - \frac{\epsilon^2}{4\epsilon - 1} = 1$

$\Longrightarrow$ On a 2 racines à partie réelle positive.

Pour les objectifs d'analyse et de conception, la stabilité est classifiée en stabilité absolue et stabilité relative. La stabilité absolue détermine les conditions de stabilité pour que le système soit stable ou instable (oui ou non). Cependant, lorsque le système est stable, il est intéressant de déterminer comment est-il stable et ce degré de stabilité est une mesure de stabilité relative.

Remarque:

Le critère de Routh-Hurwitz est un critère de stabilité absolue. Il ne permet pas de préciser les marges de stabilité du système.

III. Précision:

Un système asservis (en B.F) sera d'autant plus précis que sa sortie est proche de la consigne (valeur désirée) et donc l'erreur sera minime. Cette erreur sera significative de la précision de l'asservissement:

- Pendant le régime transitoire; On parlera de précision dynamique.
- Pendant le régime permanent atteint; On parlera de précision statique.

III.1. Définitions :

Un système est jugé par sa stabilité et par la précision avec laquelle il suit la loi d'entrée. Les sources d'erreur sont à la fois les variations de l'entrée, mais aussi les effets de perturbations.

Etudier la précision d'un système c'est calculer son erreur statique.

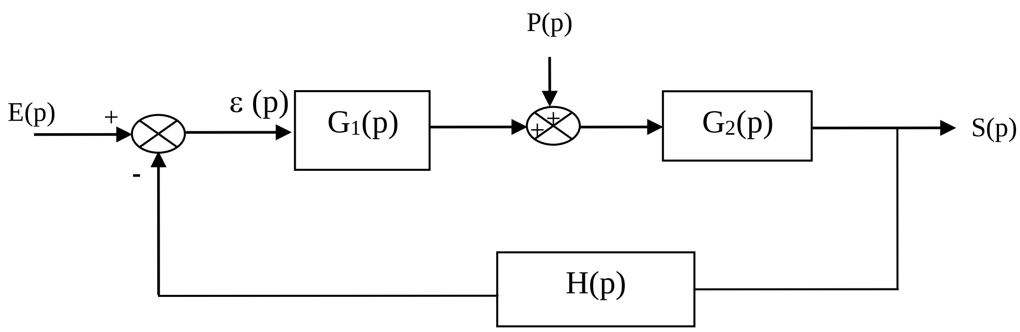
Erreur statique : c'est l'erreur en régime permanent entre la sortie et la loi d'entrée. Pour déterminer cette erreur on soumet le système à des entrées canoniques.

Echelon : On parle alors d'erreur indicielle ou de position.

Rampe : Erreur de traînage ou erreur de poursuite.

Parabole : Erreur en accélération.

III.2. **Précision relative à la fonction d'asservissement et la fonction de régulation :**



$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p).H(p) \; ; \; S(p) = G_2(p).\left[P(p) + \varepsilon(p).G_1(p)\right].$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - H(p).G_2(p).\left[P(p) + \varepsilon(p).G_1(p)\right].$$

$$\varepsilon(p).\left[1 + H(p).G_1(p).G_2(p)\right] = E(p) - H(p).G_2(p).P(p).$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p) - H(p).G_2(p).P(p)}{1 + H(p).G_1(p).G_2(p)}$$

$$\varepsilon(p) = \underbrace{\frac{E(p)}{1 + H.G_1.G_2}}_{\text{Fonction d'asservissement ou de poursuite}} - \underbrace{\frac{H.G_2.P(p)}{1 + H.G_1.G_2}}_{\text{Fonction de régulation}}$$

- **Erreur permanente relative à l'entrée ($P(p)=0$) :**

$\varepsilon(p)=\dfrac{E(p)}{1+H.G_1.G_2}$ tel que : $H.G_1.G_2$: F.T.B.O= $G(p)$.

La F.T en B.O $G(p)=H.G_1.G_2$ peut s'écrire dans tous les cas sous la forme :

$$G(p)=\frac{K.N(p)}{P^{\alpha}D(p)}=\frac{K}{p^{\alpha}}.\frac{\prod_{i=1}^{m}(p-Z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(P-P_i)}\ ;\quad \begin{cases} Z_i : \textit{Zéros} \\ P_i : \textit{Pôles} \\ \alpha : \textit{Déter}\min e\ \textit{le type du système} \end{cases}$$

$$G(p)=\frac{K}{P^{\alpha}}.\frac{1+a_1.p+a_2.p^2+.....+a_m.p^m}{1+b_1.p+b_2.p^2+.....+b_n.p^n}$$

Lorsque $t\to\infty \Rightarrow p\to 0 \Rightarrow \quad G(p)\approx\dfrac{K}{p^{\alpha}}$ pour $(p\to 0)$

1ier Cas :

Si $\alpha=0 \Rightarrow G(p)=K \Rightarrow$ Le système ne présente pas d'intégration ; Il est dit de classe « 0 » et K est appelé gain en position.

2ième Cas :

Si $\alpha=1 \Rightarrow G(p)=\dfrac{K}{P} \Rightarrow$ Le système possède une intégration ; Il est dit de classe « 1 » et $K=K_v$ est appelé gain en vitesse.

3ième Cas :

Si $\alpha=2 \Rightarrow G(p)=\dfrac{K}{p^2} \Rightarrow$ Le système possède deux intégrations ; Il est dit de classe « 2 » et $K=K_a$ est appelé gain en accélération.

a. **Système de classe « 0 » :**

*Entrée échelon : $E(p)=\dfrac{E}{P}$

$$\varepsilon(p)=\frac{E(p)}{1+G(P)}=\frac{E/p}{1+\dfrac{K}{p^{\alpha}}.\dfrac{1+a_1.p+.....}{1+b_1.p+.....}}$$

$$\varepsilon(\infty)=\lim_{t\to\infty}(\varepsilon(t))=\lim_{p\to 0}(p.\varepsilon(p))=\lim_{p\to 0}p.\left(\frac{E/p}{1+K.\dfrac{1+a_1.p+.....}{1+b_1.p+.....}}\right)=\frac{E}{1+K_p}=cste$$ ***Erreur de position***

$$K_p=\lim_{p\to 0}(G(p))$$

*Entrée rampe : $E(p)=\dfrac{E}{P^2} \Rightarrow \varepsilon(\infty)=\dfrac{1}{p}.\dfrac{E}{(1+K)}=\infty$

*Entrée parabole : $E(p)=\dfrac{E}{P^3} \Rightarrow \varepsilon(\infty)=\dfrac{1}{p^2}.\dfrac{E}{(1+K)}=\infty$

b. Système de classe « 1 » :

1. Echelon : $\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0}(\ p.\varepsilon(p)) = \lim_{p\to 0}\ p.\left(\dfrac{E/p}{1+\dfrac{K}{p}.\dfrac{1+.....}{1+.....}}\right) = 0$

2. Rampe : $\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0}(\ p.\varepsilon(p)) = \lim_{p\to 0}\ p.\left(\dfrac{E/p^2}{1+\dfrac{K}{p}.\dfrac{1+.....}{1+.....}}\right) = \dfrac{E}{K} = cste$ ***Erreur de vitesse***

3. Accélération : $E(p) = \dfrac{E}{P^3} \Rightarrow \varepsilon(\infty) = \infty$

c. Système de classe « 2 » :

1. Echelon : $\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0}\ p.\left(\dfrac{E/p}{1+\dfrac{K}{p^2}.\dfrac{1+.....}{1+.....}}\right) = 0$

2. Rampe : $\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0}\ p.\left(\dfrac{E/p^2}{1+\dfrac{K}{p^2}.\dfrac{1+.....}{1+.....}}\right) = 0$

3. Accélération : $\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0}\ p.\left(\dfrac{E/p^3}{1+\dfrac{K}{p^2}.\dfrac{1+.....}{1+.....}}\right) = \dfrac{E}{K} = cste$ ***Erreur d'accélération***

Classe du système / Entrée	Classe « 0 » Pas d'intégration	Classe « 1 » 1 Intégration	Classe « 2 » 2 Intégrations	Classe >2
Echelon	$\dfrac{E}{1+K_p}$	0	0	0
Rampe	∞	$\dfrac{E}{K_v}$	0	0
Parabole	∞	∞	$\dfrac{E}{K_a}$	0

Remarques :

1. L'erreur permanente, lorsqu'elle est constante non nulle, elle décroit lorsque le gain statique K en boucle ouverte croit.
2. On peut supprimer l'erreur de position en introduisant une intégration dans la chaîne.