Département Socle Commun ST
2ième Année Licence
Module : ***Logique Combinatoire et Séquentielle*** (LCS)

Corrigé du TD N°1

Exercice 1

Vérification des relations en utilisant la méthode Algébrique:

1. $cd + bca + b\bar{d} = cd + b\bar{d}$

En ajoutant $\left(d + \bar{d}\right)$ au 2ieme terme du premier membre de l'équation on trouve :

$$c.d + b.c.a\left(d + \bar{d}\right) + b.\bar{d} = cd + a.b.c.d + a.b.c.\bar{d} + b.\bar{d}$$

En rassemblant les termes deux à deux on trouve :

$$cd + a.b.c.d + a.b.c.\bar{d} + b.\bar{d} = c.d.(a.b + 1) + b.\bar{d}.(1 + a.c) = c.d + b.\bar{d}$$

Cette relation est une identité.

2. $\left(a + \bar{b}\right)\left(a + b\right)\left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \left(a + \bar{b}\right)\left(a + b\right)\left(a + \bar{c}\right)$

En développant l'expression, on trouve:

$$(a + \bar{b})(a + b).(\bar{b} + \bar{c}) = \left(a + a.b + a.\bar{b}\right).(\bar{b} + \bar{c}) = a.(\bar{b} + \bar{c}) = a.\bar{b} + a.\bar{c} \_\_\_(1)$$
$$(a + \bar{b})(a + b).(a + \bar{c}) = \left(a + a.b + a.\bar{b}\right).(a + \bar{c}) = a.(a + \bar{c}) = a + a.\bar{c} \_\_\_\_(2)$$

de (1)et (2), nous avons: $a.\bar{b} = a$ $\Rightarrow$ ce n'est pas une identité.

3. $ab + ac + bc = \left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)$

En développant le 2ième membre de l'équation on trouve :

$$\left(a + b\right)\left[b.c + a.b + c + a.c\right] = a.b + a.c + b.c$$

Ce qui est équivalent au 1ièr membre et donc cette relation est *une identité*.

Exercice 2

1. $f_1(a, b, c, d) = \bar{b}.c + d.a.\bar{b} + d.a.\bar{c} + \bar{d}.\bar{a}.c$

1ière forme canonique : En traçant le tableau de Karnaugh on trouve sept termes (les termes redondants sont automatiquement éliminés) :

$$F_1(a, b, c, d) = \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.c.d + \bar{a}.b.c.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.d + a.\bar{b}.c.\bar{d} + a.\bar{b}.c.d$$

2ième forme canonique :

$$\overline{F_1(a, b, c, d)} = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d + \bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.b.\bar{c}.d + \bar{a}.b.c.d + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.b.\bar{c}.\bar{d} + a.b.c.\bar{d} + a.b.c.d$$

$$F_1(a, b, c, d) = (a + b + c + d).(a + b + c + \bar{d}).(a + \bar{b} + c + d).(a + \bar{b} + c + \bar{d}).(a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}).$$
$$(\bar{a} + b + c + d).(\bar{a} + \bar{b} + c + d).(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d).(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})$$

2. $f_2(a, b, c, d) = (a + \bar{b} + \bar{c}).(a + \bar{b}).(a + \bar{c} + \bar{d}).(\bar{a} + b + c + \bar{d}).(b + \bar{c} + \bar{d})$

$$\overline{F_2(a, b, c, d)} = \bar{a}.b.c + \bar{a}.b + \bar{a}.c.d + a.\bar{b}.\bar{c}.d + \bar{b}.c.d$$

1[ière] forme canonique : En traçant le tableau de Karnaugh on trouve :

$$F_2(a,b,c,d)=\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}+\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d+\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}+a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}+a.\bar{b}.c.\bar{d}+a.b.\bar{c}.\bar{d}+a.b.\bar{c}.d+a.b.c.\bar{d}+a.b.c.d$$

2[ième] forme canonique :

$$\overline{F_2(a,b,c,d)}=\bar{a}.\bar{b}.c.d+\bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d}+\bar{a}.b.\bar{c}.d+\bar{a}.b.c.\bar{d}+\bar{a}.b.c.d+a.\bar{b}.\bar{c}.d+a.\bar{b}.c.d$$

$$F_2(a,b,c,d)=(a+b+\bar{c}+\bar{d}).(a+\bar{b}+c+d).(a+\bar{b}+c+\bar{d}).(a+\bar{b}+\bar{c}+d).$$

$$(a+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}).(\bar{a}+b+c+\bar{d}).(\bar{a}+b+\bar{c}+\bar{d})$$

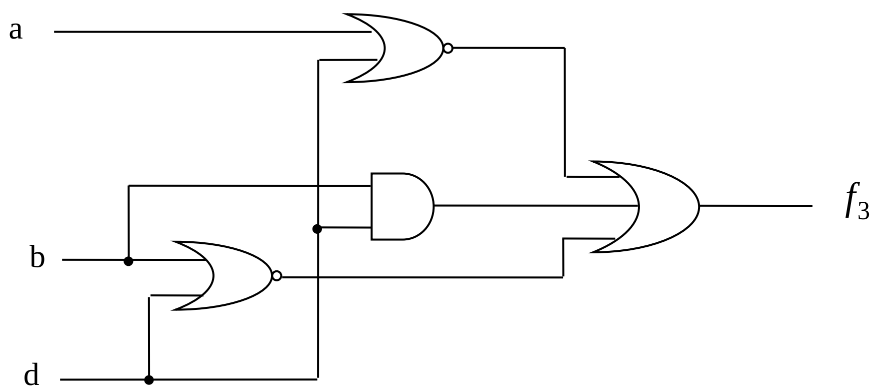
$$f_3(a,b,c,d)=\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}+\bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d}+a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}+\bar{a}.b.\bar{c}.d+a.b.\bar{c}.d+\bar{a}.b.c.d+a.b.c.d+\bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d}+\bar{a}.b.c.\bar{d}+a.\bar{b}.c.\bar{d}$$

3. Simplification de f_3 en utilisant la méthode de Karnaugh:

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	1	0	1

$$f_3=b.d+\bar{b}.\bar{d}+\bar{a}.\bar{d}$$

4. Représenter le logigramme de f_3.



Exercice supplémentaire

1. **Table de vérité :**

a	b	c	d	X	Y	Z
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

2. Première et seconde forme canonique de Z :

1ère forme:

A partir de la table de vérité on peut obtenir la somme des mintermes où la fonction Z est égale à 1. On obtient alors :

$$Z = \bar{a}.b.\bar{c}.d + \bar{a}.b.c.d + a.\bar{b}.\bar{c}.d + a.\bar{b}.c.d + a.b.\bar{c}.d + a.b.c.d$$

2nd forme:

A partir de la table de vérité on peut obtenir $\bar{Z}$ par la somme des mintermes où la fonction est égale à 0. On obtient alors :

$$\bar{Z} = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d + \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.c.d + \bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.b.c.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.c.\bar{d} + a.b.\bar{c}.\bar{d} + a.b.c.\bar{d}$$

On appliquant le théorème de De Morgan, on obtient :

$$Z = (a+b+c+d).(a+b+c+\bar{d}).(a+b+\bar{c}+d).(a+b+\bar{c}+\bar{d}).(a+\bar{b}+c+d).$$
$$(a+\bar{b}+\bar{c}+d).(\bar{a}+b+c+d).(\bar{a}+b+\bar{c}+d).(\bar{a}+\bar{b}+c+d).(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+d)$$

3. Simplification par le tableau de Karnaugh :

	00	**01**	**11**	**10**
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

$$X = a.d + a.c + b.c$$

	00	**01**	**11**	**10**
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

$$Y = a.b + c.d + a.c$$

	00	**01**	**11**	**10**
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	0	0

$$Z = a.d + b.d$$