Département de Génie Industriel
3ième Année Licence
Module: Automatique Industrielle

Corrigé du TD N°2: Analyse Temporelle des S.L.C

Exercice 1

1. On considère un système d'entrée e(t) et de sortie s(t) régi par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^3s(t)}{dt^3}+3.\frac{d^2s(t)}{dt^2}+3.\frac{ds(t)}{dt}+.s(t)=2.\frac{de(t)}{dt}+e(t)$$

- Fonction de transfert:

$$(P^3+3.P^2+3.P+1).S(P)=(2.P+1).E(P)$$

$$\Rightarrow H(P)=\frac{S(P)}{E(P)}=\frac{2.P+1}{P^3+3.P^2+3.P+1}=\frac{2P+1}{(P+1)^3}$$

- Ce système a un zéro (Z=-1/2) et un pôle triple (P=-1).

2. On considère un système d'entrée e(t) et de sortie s(t) régi par l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2}+3.\frac{ds(t)}{dt}+2.s(t)=e(t)$$

- Fonction de transfert:

$$(P^2+3.P+2).S(P)=E(P)\ \Rightarrow H(P)=\frac{S(P)}{E(P)}=\frac{1}{P^2+3.P+2}=\frac{1}{(P+1).(P+2)}$$

- La réponse de ce système à une entrée e(t) en échelon unitaire:

$$S(P)=\frac{1}{P.(P+1).(P+2)}=\frac{1}{2}.\frac{1}{P}-\frac{1}{(P+1)}+\frac{1}{2}.\frac{1}{(P+2)}$$

$$\Rightarrow s(t)=\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}.e^{-2t}$$

Exercice 2

1. Un système du premier ordre est défini par l'équation différentielle qui suit :

$$\tau.\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=k.e(t)$$

En réalisant avec ce système un asservissement à retour unitaire, la fonction de transfert en BF :

$$\tau.p.S(p)+S(p)=k.E(p)\ \Leftrightarrow G(p)=\frac{k}{\tau p+1}\text{ est la FT en B.O.}$$

Donc la FT en BF sera : $H(p)=\frac{k}{\tau p+k+1}$.

2. La réponse temporelle face à l'échelon unitaire :

$$S(p)=H(p).E(p)=\frac{k}{p.(\tau p+k+1)}=\frac{k}{k+1}\frac{1}{p}-\frac{k}{k+1}\frac{1}{\left(p+\left(\frac{k+1}{\tau}\right)\right)}\Rightarrow s(t)=\frac{k}{k+1}\left(1-e^{-(k+1/\tau).t}\right)$$

3. Le gain statique en BF est : $k'=\frac{k}{k+1}$.

4. Le temps de réponse à 5% est : $t_r\approx\frac{3.\tau}{k+1}$.

Exercice 3

On considère un système d'entrée E(p) et de sortie S(p) donnée par le schéma bloc suivant:

$$E(P) \longrightarrow \boxed{\frac{2}{(p+3)(p^2+3p+2)}} \longrightarrow S(P)$$

1. La décomposition en éléments simples de la fonction de transfert:

$$H(P) = \frac{1}{(P+1)(P+2).(P+3)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{(P+1)} - \frac{1}{(P+2)} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(P+3)}$$

2. La réponse impulsionnelle représente La T.L inverse de $H(P)$:

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}.e^{-3t}$$

3. La réponse à l'échelon unitaire:

$$S(P) = \frac{1}{P.(P+1)(P+2).(P+3)} = \frac{1}{6}.\frac{1}{P} - \frac{1}{2}.\frac{1}{(P+1)} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(P+2)} - \frac{1}{6}.\frac{1}{(P+3)}$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}.e^{-2t} - \frac{1}{6}.e^{-3t}$$

Exercice 4

1. F.T.B.O: $D(p).R(p) = \dfrac{K}{0.2p^2 + 2.1p + 1}$;

F.T.B.F: $\dfrac{D(p)}{1 + D(p).R(p)} = \dfrac{K(1+0.1p)}{0.2p^2 + 2.1p + 2K + 1} = \dfrac{5.K(1+0.1p)}{p^2 + 10.5p + 10K + 5}$

2. Ce système est un système linéaire du second ordre. Pour que la réponse indicielle en B.F du système en question soit oscillatoire, le facteur d'amortissement doit être inférieur à 1.

La F.T de ce système peut se mettre sous sa forme canonique, telle que:

$H(p) = \dfrac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$; Ce qui donne par correspondance:

$p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2 = p^2 + 10.5p + 10K + 5$;

$\omega_n = \sqrt{10K+5}$ ce qui donne: $\zeta = \dfrac{10.5}{2.\sqrt{10K+5}} < 1$; On trouve alors que:

Lorsque $K > 2.26$, la réponse indicielle en B.F est oscillatoire.

3. Pour une valeur de $K = 1$, le facteur d'amortissement est $\zeta > 1$. Dans ce cas le système fonctionne en régime amorti, nous avons alors:

$H(p) = \dfrac{5.(1+0.1p)}{p^2 + 10.5p + 15}$; Ce qui donne une réponse indicielle unitaire égale à:

$S(p) = H(p).E(p) = \dfrac{5.(1+0.1p)}{p^2 + 10.5p + 15}.\dfrac{1}{p}$; Cette équation doit être décomposer en éléments simples:

$$S(p)=\frac{1}{p}.\frac{5.(1+0.1p)}{p^2+10.5p+15}=\frac{A}{p}+\frac{B}{(p+8.79)}+\frac{C}{(p+1.71)}=\frac{0.33}{p}+\frac{0.01}{(p+8.79)}-\frac{0.34}{(p+1.71)};$$

Alors:

$$s(t)=0.33u(t)+0.01e^{-8.79t}-0.34e^{-1.71t}.$$

4. Pour une entrée $e(t)=E_0\left(1-e^{-10t}\right)$, nous avons $E(p)=\frac{E_0}{p}-\frac{E_0}{(p+10)}=\frac{10E_0}{p.(p+10)}$;

La sortie du système est alors:

$$S(p)=H(p).E(p)=\frac{50.(1+0.1p)}{p^2+10.5p+105}.\frac{10.E_0}{p.(p+10)}=\frac{50.(p+10)}{p^2+10.5p+105}.\frac{E_0}{p.(p+10)}=\frac{50.E_0}{p.\left(p^2+10.5p+105\right)}$$

Tel que:

$$\omega_n=\sqrt{105}=10.25;\ \zeta=\frac{10.5}{2.\omega_n}=0.51 \text{ et } K'\omega_n^2=50 \Rightarrow K'=0.48$$

Dans ce cas le régime de fonctionnement est oscillatoire amorti et la réponse du système est de la forme:

$$s(t)=K'.E_0(1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}.\sin(\omega_p t+\varphi)).e^{-\zeta\omega_n t};\text{ Avec: } \omega_p=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{ et } \varphi=arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$\omega_p=8.8;\ \varphi=1.035rd\approx 59.33°$; Alors:

$$s(t)=0.48.E_0(1-1.16.\sin(8.8t+59.33°)).e^{-5.23t}.$$