Département d'Electronique
Niveau : L2
Filières: ***Electronique; G. Biomédical; Automatique; Télécommunication***
Module : ***Logique Combinatoire et Séquentielle*** (LCS)

TD N 2: Algèbre de Boole et logique Combinatoire

Corrigé

Exercice 1

1. Vérification des relations en utilisant la méthode algébrique:

$$\mathrm{cd} + \mathrm{bca} + \mathrm{b}\overline{\mathrm{d}} = \mathrm{cd} + \mathrm{b}\overline{\mathrm{d}}$$

En ajoutant $(\mathrm{d} + \overline{\mathrm{d}})$ au 2ieme terme du premier membre de l'équation on trouve :

$$\mathrm{c.d} + \mathrm{b.c.a}(\mathrm{d} + \overline{\mathrm{d}}) + \mathrm{b.}\overline{\mathrm{d}} = \mathrm{cd} + \mathrm{a.b.c.d} + \mathrm{a.b.c.}\overline{\mathrm{d}} + \mathrm{b.}\overline{\mathrm{d}}$$

En rassemblant les termes deux à deux on trouve :

$$\mathrm{cd} + \mathrm{a.b.c.d} + \mathrm{a.b.c.}\overline{\mathrm{d}} + \mathrm{b.}\overline{\mathrm{d}} = \mathrm{c.d.}(\mathrm{a.b} + 1) + \mathrm{b.}\overline{\mathrm{d}}.(1 + \mathrm{a.c}) = \mathrm{c.d} + \mathrm{b.}\overline{\mathrm{d}}$$

Cette relation est une identité.

2. Démonstration des égalités:

a. $A + \bar{A}.B = A + B$

$$\Rightarrow A.(B + \bar{B}) + \bar{A}.B = AB + A\bar{B} + \bar{A}B + AB$$
$$= A.(B + \bar{B}) + B.(A + \bar{A}) = A + B$$

b. $\overline{(A + C).(B + \bar{C})} = (\bar{A} + C).(\bar{B} + \bar{C})$

En développant les 2 membres de l'égalité, on trouve:
Par application du théorème de DEMORGAN; Le 1ier membre devient:

$$\overline{(A + C).(B + \bar{C})} = \bar{A}\bar{C} + \bar{B}C$$

Le 2ième membre: $(\bar{A} + C).(\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}.C = \bar{A}\bar{B}.(C + \bar{C}) + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}.C$
$= \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{C} + \bar{B}.C = \bar{A}\bar{C}.(\bar{B} + 1) + \bar{B}.C.(\bar{A} + 1) = \bar{A}\bar{C} + \bar{B}.C$

Les 2 membres sont égaux.

c. $(A + B).(\bar{A} + C).(B + C) = (A + B).(\bar{A} + C)$

En développant les 2 membres de l'égalité, on trouve:
Le 1ier membre: $(A + B).(\bar{A} + C).(B + C) = A.B.C + A.C + \bar{A}.B + \bar{A}.B.C + B.C$

$$= A.C.(B + 1) + \bar{A}.B.(C + 1) + B.C$$
$$= A.C + \bar{A}.B + B.C$$

Le 2ième membre: $(A + B).(\bar{A} + C) = A.C + \bar{A}.B + B.C$

Les 2 membres sont égaux.

d. $\overline{A.C + B.\bar{C}} = \bar{A}.C + \bar{B}.\bar{C}$

Le 1ier membre: $\overline{A.C + B.\bar{C}} = (\bar{A} + \bar{C}).(\bar{B} + C) = \bar{A}.\bar{B} + \bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.C$

Cette équation peut s'écrire: $\bar{A}.\bar{B}.(\bar{C} + C) + \bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.C = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.C$

$$= \bar{B}.\bar{C}.(\bar{A} + 1) + \bar{A}.C.(\bar{B} + 1)$$
$$= \bar{A}.C + \bar{B}.\bar{C}$$

Ce qui correspond au 2ième membre.

<u>Exercice 2</u>

a. L'expression algébrique de F à 3 variables;

$$F = \left(\overline{a.b.\bar{c}}\right).\left(\overline{b.c}\right) = \left(\bar{a} + \bar{b} + c\right).\left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a}.\bar{b} + \bar{a}.\bar{c} + \bar{b} + \bar{b}.\bar{c} + \bar{b}.c$$

b. Première forme canonique:

$$F = \bar{a}.\bar{b}.(\bar{c} + c) + \bar{a}.\left(\bar{b} + b\right).\bar{c} + (\bar{a} + a).\bar{b}.(\bar{c} + c) + (\bar{a} + a).\bar{b}.\bar{c} + (\bar{a} + a).\bar{b}.c$$

$$F = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + a.\bar{b}.c$$

c. Seconde forme canonique:

$$\bar{F} = \bar{a}.b.c + a.b.\bar{c} + a.b.c$$

$$F = \bar{\bar{F}} = \overline{\bar{a}.b.c + a.b.\bar{c} + a.b.c} = \left(a + \bar{b} + \bar{c}\right).\left(\bar{a} + \bar{b} + c\right).\left(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\right)$$

d. Simplification de la fonction F algébriquement. Ce qui peut se faire par tableau de Karnaugh:

$$F = \bar{b}.(1 + \bar{a} + \bar{c} + c) + \bar{a}.\bar{c} = \bar{b} + \bar{a}.\bar{c}$$

<u>Exercice 3</u>

1. Soit l'expression : $S = (A + \bar{B} + C).(A + \bar{C}).(\bar{A} + \bar{B})$

a. Le complément de S est: $\bar{S} = \overline{(A + \bar{B} + C).(A + \bar{C}).(\bar{A} + \bar{B})} = \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.C + A.B$

$$= \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.(\bar{B} + B).C + A.B.(\bar{C} + C) = \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.C + A.B.\bar{C} + A.B.C$$

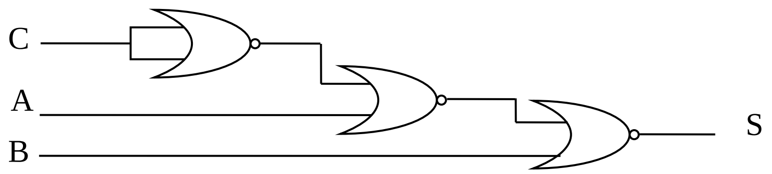
$$= \bar{A}.C + \bar{A}.B.(\bar{C} + C) + A.B.(\bar{C} + C) = \bar{A}.C + \bar{A}.B + A.B = \bar{A}.C + B.(\bar{A} + A) = \bar{A}.C + B$$

On peut directement utiliser le tableau de Karnaugh.

b. L'équation de S en n'utilisant que des portes NOR à 2 entrées:

$$S = \overline{\bar{A}.C + B} = \overline{\overline{A + \bar{C}} + B}$$

c. Le logigramme de S:



Exercice 4

1. Table de vérité :

a	b	c	d	X	Y	Z
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1

2. Première et seconde forme canonique de Z :

<u>1ère forme:</u>

A partir de la table de vérité on peut obtenir la somme des mintermes où la fonction Z est égale à 1. On obtient alors :

$$Z = \bar{a}.b.\bar{c}.d + \bar{a}.b.c.d + a.\bar{b}.\bar{c}.d + a.\bar{b}.c.d + a.b.\bar{c}.d + a.b.c.d$$

<u>2nd forme:</u>

A partir de la table de vérité on peut obtenir $\bar{Z}$ par la somme des mintermes où la fonction est égale à 0. On obtient alors :

$$\bar{Z} = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.\bar{c}.d + \bar{a}.\bar{b}.c.\bar{d} + \bar{a}.\bar{b}.c.d + \bar{a}.b.\bar{c}.\bar{d} + \bar{a}.b.c.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.c.\bar{d} + a.b.\bar{c}.\bar{d} + a.b.c.\bar{d}$$

On appliquant le théorème de De Morgan, on obtient :

$$Z = (a+b+c+d).(a+b+c+\bar{d}).(a+b+\bar{c}+d).(a+b+\bar{c}+\bar{d}).(a+\bar{b}+c+d).$$
$$(a+\bar{b}+\bar{c}+d).(\bar{a}+b+c+d).(\bar{a}+b+\bar{c}+d).(\bar{a}+\bar{b}+c+d).(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+d)$$

3. Simplification par le tableau de Karnaugh :

	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	1
11	0	1	1	1
10	0	1	1	1

$$X = a.d + a.c + b.c$$

	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	0	0	1	0
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

$$Y = a.b + c.d + a.c$$

	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	0	1	1	1
10	0	0	0	0

$$Z = a.d + b.d$$