Ex : 02

On a : $f \in L^1(\mathbb{R})$

calculons $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x)$

Théorème de convergence dominée

> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de fonctions mesurables tq :
>
> 1) $f_n \longrightarrow f$ p.p sur Ω
>
> 2) $\exists g \in L^1(\Omega)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p sur Ω.
>
> Alors :
>
> a) $f \in L^1(\Omega)$
>
> b) $\lim_{n \to +\infty} \int f_n(x)\, d\mu = \int f(x)\, d\mu$

On pose $h_n(x) = f(x) \cos^n(\pi x)$

1/ h_n est mesurable ?

Nous avons, $\forall n \in \mathbb{N}$ $x \longmapsto \cos^n(\pi x)$ continue donc mesurable.
et $f \in L^1(\mathbb{R})$ Alors $h_n : x \longmapsto f(x)\cos^n(\pi x)$ mesurable, $\forall n \in \mathbb{N}$

2] $h_n \longrightarrow h$ p.p sur $\mathbb{R}$?

Si $x \in \mathbb{Z}$

$$\cos(\pi x) = \pm 1$$

donc $\lim_{n \to +\infty} h_n(x) = \lim f(x) \cos^n(\pi x) = \pm f(x)$

avec $\mu(\mathbb{Z}) = 0$

c-à-d h_n n'est pas convergente sur $\mathbb{Z}$, $\mu(\mathbb{Z}) = 0$

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors : $|\cos(\pi x)| < 1$

donc $\lim\limits_{n \to \infty} (\cos(\pi x))^n = \lim\limits_{n \to \infty} \cos^n(\pi x) = 0.$

Ainsi : $\lim\limits_{n \to \infty} h_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x) \cos^n(\pi x) = 0 \quad , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$

finalement $h_n \longrightarrow 0 \quad$, p.p sur $\mathbb{R}$ (car $\mu(\mathbb{Z}) = 0$).

3] Trouvons $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

on a : $|\cos^n(\pi x)| \leq 1 \quad$, sur $\mathbb{R}$.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|h_n(x)| = |f(x) \cos^n(\pi x)| \leq |f(x)| \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

donc il suffit de prendre : $g(x) = |f(x)|$ & $\forall x \in \mathbb{R}$
$g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ car $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

De 1), 2) et 3) En utilisant le T.C. dominée

on Trouve :

$$\lim_{n \to \infty} \int h_n(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} 0 \, dx$$

$$= 0$$

Exercice : 04

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(x-t)\, dt$.

1/ g est bornée ?

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$|g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(x-t)\, dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| |\sin(x-t)|\, dt$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt$$

comme $f \in L^1(\mathbb{R})$ donc :

$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < +\infty$, c-à-d : $\exists M > 0$ tq : $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt \leq M$

On en déduit que :

$\exists M > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq M$ (g est bornée).

2/ g est dérivable ?

On pose : $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow F(t, x) = f(t) \sin(x-t)$.

En appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégrale comme suit :

a/ $t \longmapsto F(t, x)$ est intégrable ?

On a : F est mesurable, car $f \in L^1(\mathbb{R})$ et sin est continue (par rapport à t).

et $\int_{\mathbb{R}} |F(t,x)|\,dt = \int |f(t)\sin(x-t)|\,dt$

$< +\infty$ (d'après question 1)

Alors : $t \longmapsto F(t,x)$ est intégrable

b) $x \longmapsto F(t,x)$ est dérivable ?

En effet $x \longmapsto F(t,x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque

$x \longmapsto \sin(x-t)$ l'est aussi. ($f(t)$ considéré constante)

c) Cherchons de $h \in L^1(\mathbb{R})$ tq : $\left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\right| \leq h(t)$.

On a : $\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = f(t)\cos(x-t)$

d'où

$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\right| = |f(t)\cos(x-t)| \leq |f(t)|$

donc il suffit de prendre $h(t) = |f(t)| \in L^1(\mathbb{R})$.

D'après a), b), c) en utilisant le théorème, on déduit que

$$g : x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} F(T,x)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\sin(x-t)\,dt$$

est dérivable et que :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\cos(x-t)\,dt \, ,$$

Exercice : 05

Existe-t-il $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tq : $ne^{-n|x|} \leq f(x)$?

Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq :

$$f_n : x \longmapsto f_n(x) = n e^{-n|x|}$$

on a : 1] $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable car :

a) f_n est mesurable (continue sur $\mathbb{R}$) $\forall n \in \mathbb{N}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} n e^{-n|x|}$

$$= 2\int_0^{+\infty} n e^{-nx}\,dx$$

$$= \lim_{t \to +\infty} 2\left[-e^{-nx}\right]_0^t = 2$$

2] $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} n e^{-nx} = 0$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

avec $\mathcal{M}(\{0\}) = 0$ alors : $f_n \longrightarrow 0$ p.p sur $\mathbb{R}$

3] supposons que : $\exists f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ tq :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| = ne^{-nx} \leq f(x)$$

De 1, 2, 3 et par T. convergence dominée on trouve :

$$\lim \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \lim f_n(x)\,dx = \int 0\,dx = 0$$

Nous avons contradiction avec $\left(\lim \int_{D_n} f_n(x)\,dx = 2\right.$, d'après 1).

Alors, n'existe pas de f.

- Exercice : 07

Déterminons $1 \leq p \leq +\infty$, tq : $f \in L^p(I)$, $I = [0, 1]$.

A/ $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

- si $p = +\infty$

On a : $L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) mesurable et bornée p.p sur $\Omega \}$.

f n'est pas majorée $\left(\lim_{x \searrow 0} f(x) = +\infty \right)$ donc $f \notin L^\infty([0,1])$

- si $1 \leq p < +\infty$

$$\int_I \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right|^p dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{p}{2}}} = \begin{cases} \left[\ln x \right]_0^1 & , p = 2 \\ \left[\dfrac{2 x^{\frac{2-p}{2}}}{2-p} \right]_0^1 & , p \neq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\infty & , p = 2 \\ \frac{2}{2-p} & , p < 2 \\ +\infty & , p > 2 \end{cases}$$

ainsi $f \in L^p([0,1])$, si $p \in [1, 2[$.

B/ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0$

- $f \notin L^\infty([0,1])$ (f n'est pas majorée)
- si $p < +\infty$

$$\int_0^1 |f(x)|^p = \begin{cases} [\ln x]_0^1 & , p = \frac{1}{\alpha} \\ \frac{x^{1-\alpha p}}{1-\alpha p} & , p \neq \frac{1}{\alpha} \end{cases} = \begin{cases} +\infty & , p = \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{1-\alpha p} & , p < \frac{1}{\alpha} \\ +\infty & , p > \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

Alors: $f \in L^p([0,1])$ si $p \in [1, \frac{1}{\alpha}[$ (remarquons que $0 < \alpha < 1$)

<u>Exercice : 08</u> $\quad I = [1, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$

sur $[1, +\infty[$, $0 < f(x) \leq 1$ (f bornée).
et f continue sur I donc mesurable.

Ainsi $f \in L^\infty([1, +\infty[)$.

• si $p < +\infty$

$$\int_1^{\infty} |f(x)|^p dx = \begin{cases} +\infty & ; \quad p = \frac{1}{\alpha} \\ +\infty & , \quad p < \frac{1}{\alpha} \\ \frac{-1}{1-\alpha p} & , \quad p > \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

donc : $f \in L^p([1, +\infty[)$, $p \in]\frac{1}{\alpha}, +\infty]$.

Exercice : 09

1/ $f \in L^1([0,1])$ et $f \notin L^2([0,1])$ (Voir Ex: 07).

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & , x \in]0,1] \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$$\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 < +\infty \Rightarrow f \in L^1([0,1])$$

or que : $\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = +\infty$

donc $f \notin L^2([0,1])$.

2/. $f \notin L^1([0,+\infty[)$ et $f \in L^2([0,+\infty[)$ (Voir Exo8)

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0,+\infty[$

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = \ln(x+1)\Big|_0^{+\infty} = +\infty \Rightarrow f \notin L^1([0,1])$$

mais $$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{-1}{1+x}\Big|_0^{+\infty} = 1 < +\infty \Rightarrow f \in L^2([0,1])$$

3/ $f \in L^1([0,+\infty[)$ et $f \notin L^2([0,+\infty[)$

Soit $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & , x \in]0,1[\\ \frac{1}{x^2} & , x \geq 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= 3 < +\infty \Rightarrow f \in L^1([0,+\infty[)$$

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = +\infty$$ (voir exemple 1)

donc $f \notin L^2([0,+\infty[)$.

Exercice : 10

$f, g \in L^3(\mathbb{R})$ et montrons que $f^2 g \in L^1(\mathbb{R})$

$$f \in L^3(\mathbb{R}) \Longrightarrow \int |f(x)|^3 \, dx < +\infty$$

$$\Longrightarrow \int \left(|f(x)|^2\right)^{\frac{3}{2}} dx < +\infty$$

$$\Longrightarrow f^2 \in L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$$

mais $\frac{1}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

En utilisant l'inégalité de Hölder

$$f^2 \cdot g \in L^1(\mathbb{R}).$$