

Exercice 1 : Soit $\Omega = \mathbb{R}, \Sigma = \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu$ mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

- 1) On pose $f_n = \chi_{[0,n]}$; $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{f_n\}$ est monotone et converge vers une fonction f que l'on déterminera

Est-ce que le théorème de convergence monotone s'applique dans ce cas

- 2) Traiter la même question pour les cas

a. $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[n,+\infty[}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

b. $f_n = -\chi_{[n,+\infty[}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 : Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) dx$.

Exercice 3 (Théorème de dérivation sous le signe intégral) :

Soit Ω un espace mesurable et soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- 1) Pour tout $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, la fonction $x \rightarrow f(x, t)$ est intégrable.

- 2) Pour presque tout x ; la fonction $t \rightarrow f(x, t)$ est dérivable.

- 3) Il existe $g \in L^1(\Omega)$ tel que pour tout $t \in [a, b]$ et pour presque tout x on

$$\text{ait } \left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right| \leq g(x).$$

Montrer que la fonction $h : t \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x, t) dx$ est dérivable sur $[a, b]$ et on a

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Exercice 4 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sin(x-t) dt$ est

bornée et dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 5 : Existe-t-il une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $ne^{-n|x|} \leq f(x), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 : Décomposer en série de Fourier la fonction 2-periodique:

$$f(x) = \chi_{]0,1]}(x) - \chi_{]-1,0]}(x)$$

En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

Exercice 7 : On considère l'intervalle $I = [0,1]$. Déterminer $1 \leq p \leq +\infty$ tel que

$f \in L^p(I)$ dans les cas suivants :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\alpha} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{où } \alpha > 0$$

Exercice 8 : On considère l'intervalle $I = [1, +\infty[$ et la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{où } \alpha > 0$$

Déterminer $1 \leq p \leq +\infty$ tel que $f \in L^p(I)$

Exercice 9 Soit f une fonction mesurable sur \mathbb{R} . Donner un exemple, (s'il existe), d'une fonction f vérifiant les propriétés des cas suivants :

1. $f \in L^1([0,1])$ et $f \notin L^2([0,1])$
2. $f \notin L^1([0, +\infty[)$ et $f \in L^2([0, +\infty[)$
3. $f \in L^1([0, +\infty[)$ et $f \notin L^2([0, +\infty[)$

Exercice 10 : Soit $f, g \in L^3(\mathbb{R})$. Montrer que $f^2 g \in L^1(\mathbb{R})$.

Indication : Utiliser l'inégalité de Hölder

Exercice 11 Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{-\lambda|x|}, \quad \lambda > 0$$

$$g(x) = \chi_{[a,b]}(x), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x) = \chi_{[-a,a]}(x), \quad a > 0$$

$$\psi(x) = \cos(\lambda x) \chi_{[-a,a]}(x), \quad a, \lambda > 0$$

Exercice 12 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on pose $g(x) = f(\lambda x)$. Montrer que $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$

2. Pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = f(\lambda x - \mu)$. Montrer que

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|\lambda|} e^{-2i\pi\frac{\mu}{\lambda}\xi} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

Exercice 13 Soit $f(x) = e^{-ax^2}$, où $a > 0$.

1. Vérifier que $f'(x) = -2axf(x)$

2. Montrer que

$$\hat{f}'(\xi) + \frac{2\pi^2}{a} \xi \hat{f}(\xi) = 0.$$

3. Montrer que $g(\xi) = e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$ est une solution particulière de l'équation différentielle de la question précédente.

4. En déduire la transformée de Fourier de la fonction f .

$$\text{On rappelle que } \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Exercice 14. Soit f une fonction définie via sa transformée de Fourier :

$$f(x) = \frac{\sigma(x)}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Où $\sigma(x) = 1$ si $x \geq 0$ et $\sigma(x) = -1$ si $x < 0$.

- 1) Vérifier que $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- 2) Répondre par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes, en justifiant vos réponses. (Ici, **VRAI** signifie "*toujours vrai*" et **FAUX** signifie "*pas toujours vrai*").

La fonction :

- A. f est continue
- B. \hat{f} est continue

- C. \hat{f} est bornée
- D. \hat{f} est paire
- E. \hat{f} est à valeurs réelles
- F. \hat{f} est dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 15: Calculer le produit de convolution $f * f$ où : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En déduire la transformée de Fourier de la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 16 :

1. En utilisant la transformée de Fourier, examiner l'existence d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f * g = f$, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$.
2. Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation : $f * f = f$

Exercice 17 :

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\varphi(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$.
2. En déduire la valeur des intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx$$